DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.07.013

Kaup-Boussinesq 方程的留数对称和相互作用解

呼星汝

西北大学 数学学院，西安 710127

摘要： 研究了 Kaup-Boussinesq(KB)方程的留数对称和相互作用解. 首先，通过 Painlevé 截断展开得到 KB 方程的留数对称，并将其留数对称局域化；其次，运用相容 Riccati 展开法，证明了该方程是相容 Riccati 展开可解的；最后，通过求解相容性方程，并且借助雅可比椭圆函数构造了孤立波与椭圆周期波的相互作用解.

关 键 词： Kaup-Boussinesq 方程；留数对称；CRE 可解；相互作用解

中图分类号：O175.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2021)07-0097-08

非线性演化方程及其精确解在物理、自然科学等领域有着非常重要的作用，因此构造非线性发展方程的精确解一直以来都是广大数学物理研究的重要问题之一. 众所周知，对称群理论[1]和 Painlevé 分析理论[2-3]是发现和解决非线性演化方程的两大重要方法. 在可积系统中，获取非局域的方法主要有逆递推算子法[4]、Darboux 变换法[5]、Bäcklund 变换法[6-7]、截断的 Painlevé 方法[8]等. Painlevé 分析是研究系统可积性的重要方法之一，其重要的一个推广是截断的 Painlevé 展开方法. 该方法不仅可以直接构造系统的 Bäcklund 变换和解析解，还可以用来构造系统的非局域对称，并且很多方程的相互作用解可以由非局域对称得到. 文献[9]在做非局域对称的 Painlevé 截断展开时发现，奇异流形的留数是一个非局域对称，称为留数对称[9]. 文献[10]通过 Painlevé 截断展开方法提出了相容的 Riccati 展开方法(CRE)，此方法不仅可以用来证明方程的 CRE 可解性，而且可以根据可解性来构造方程的不同类型的相互作用解，例如孤立子、椭圆函数解等，这说明很多可积系统是相容 Rccati 展开可解并具有相互作用解的.

本文主要研究了如下形式的 Kaup-Boussinesq 方程[11]

$$\begin{cases} u_t + (uv)_x + \dfrac{1}{4}\gamma^2 v_{xxx} = 0 \\ v_t + vv_x + u_x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

方程(1)描述了浅水波运动，其中 $u(x,t)$ 表示水平底部以上的水面高度，$v(x,t)$ 是相关的水平速度场. 当 $\gamma=2$ 时，方程(1)可化为 Boussinesq 系统

收稿日期：2019-09-19

基金项目：国家自然科学基金项目(11775047).

作者简介：呼星汝，硕士研究生，主要从事偏微分方程研究.

$$\begin{cases} u_t+(uv)_x+v_{xxx}=0 \\ v_t+vv_x+u_x=0 \end{cases} \tag{2}$$

若取 $\gamma^2=\frac{4}{3}$，那么方程(1)就可以转化为色散长波方程

$$\begin{cases} u_t+(uv)_x+\frac{1}{3}v_{xxx}=0 \\ v_t+vv_x+u_x=0 \end{cases} \tag{3}$$

文献[11]利用 F 展开法得到了方程(1)的一些精确解；文献[12]给出了广义 Kaup-Boussinesq 方程的不变解和守恒律；文献[13]利用 Euler-Lagrange 变分原理得到了 Kaup-Boussinesq 方程的守恒律. 目前，方程(1)的留数对称及其相互作用解还未被研究.

本文首先利用截断的 Painlevé 展开方法构造了 Kaup-Boussinesq 方程(1)的留数对称，并通过引入新的函数关系使之局域化；然后通过 CRE 方法证明了方程(1)的相容 Riccati 展开可解性，并利用此性质构造了方程(1)的相互作用解. 在求解的过程中，根据 Riccati 方程的解和椭圆方程的解，再结合 Jacobi 椭圆函数和第三类不完全椭圆积分构造出了一组新的椭圆周期波与孤立波相互作用解. 通过对 KB 方程的研究发现，CRE 方法与 Jacobi 椭圆函数、第三类不完全椭圆积分的结合是探索非线性方程新的精确解的一种十分便捷且有效的方法.

1 留数对称及其局域化

对于 Kaup-Boussinesq 方程，相应的 Painlevé 截断展开式为

$$\begin{cases} v=v_0+\dfrac{v_1}{\varphi} \\ u=u_0+\dfrac{u_1}{\varphi}+\dfrac{u_2}{\varphi^2} \end{cases} \tag{4}$$

其中 $v_0,v_1,u_0,u_1,u_2,\varphi$ 是关于(x,t)的函数. 将方程(4)代入到方程(1)中，令$\frac{1}{\varphi}$的各次幂的系数为零可以得到

$$\begin{cases} v_0=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varphi_{xx}^2\gamma+2\varphi_t}{\varphi_x} \\ v_1=\varphi_x\gamma \\ u_0=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\gamma(\varphi_{xxx}\varphi_x\gamma-\varphi_{xx}^2\gamma+2\varphi_{xt}\varphi_x-2\varphi_{xx}\varphi_t)}{\varphi_x^2} \\ u_1=\dfrac{1}{2}\varphi_{xx}\gamma \\ u_2=-\dfrac{1}{2}\varphi_x^2\gamma^2 \end{cases} \tag{5}$$

并且 φ 满足如下的 Schwarzian 形式

$$-P_t-\gamma P_{xx}-\frac{1}{4}\gamma^2S_x+PP_x=0 \tag{6}$$

其中

$$P=\frac{\varphi_t}{\varphi_x}$$

$$S=\frac{\varphi_{xxx}}{\varphi_x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x^2}$$

Schwarzian 形式(6) 在下面的 Möbious 变换

$$\varphi\longrightarrow\frac{a+b\varphi}{c+\mathrm{d}\varphi}(ad\neq bc) \tag{7}$$

保持不变. 把(4) 式代入方程(1) 可以得到下面的定理：

定理 1(自 Bäcklund 变换定理)　如果 φ 满足方程(6)，则

$$\begin{cases} v=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varphi_{xx}\gamma+2\varphi_t}{\varphi_x} \\ u=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\gamma(\varphi_{xxx}\varphi_x\gamma-\varphi_{xx}^2\gamma+2\varphi_{xt}\varphi_x-2\varphi_{xx}\varphi_t)}{\varphi_x^2} \end{cases} \tag{8}$$

是方程(1) 的一个解.

定理 2　Kaup-Boussinesq 方程具有下面形式的留数对称：

$$\sigma^u=\frac{\gamma}{2}\varphi_{xx}\qquad \sigma^v=\gamma\varphi_x \tag{9}$$

其中：u,v,φ 满足(8) 式；σ^u,σ^v 分别为 u,v 的对称.

证　方程(1) 的对称方程是

$$\begin{cases} \sigma_t^u+u_x\sigma_x^v+v_x\sigma_x^u+\dfrac{1}{4}\gamma^2\sigma_{xxx}^v=0 \\ \sigma_t^v+v\sigma_x^v+\sigma^v v_x+\sigma_x^u=0 \end{cases} \tag{10}$$

把(9) 式代入(10) 式中，在方程(6) 和(8) 的帮助下，(10) 式是成立的.

为了使留数对称非局域化，我们引入两个新的变量

$$\varphi_x=f\qquad \varphi_{xx}=g \tag{11}$$

将 Kaup-Boussinesq 方程的非局域留数对称局域化为扩展系统

$$\begin{cases} u_t+(uv)_x+\dfrac{1}{4}\gamma^2 v_{xxx}=0 \\ v_t+vv_x+u_x=0 \\ v=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varphi_{xx}\gamma+2\varphi_t}{\varphi_x} \\ u=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\gamma(\varphi_{xxx}\varphi_x\gamma-\varphi_{xx}^2\gamma+2\varphi_{xt}\varphi_x-2\varphi_{xx}\varphi_t)}{\varphi_x^2} \\ f=\varphi_x \\ g=\varphi_{xx} \end{cases} \tag{12}$$

的 Lie 点对称

$$\begin{cases} \sigma^u=\dfrac{\gamma}{2}g \\ \sigma^v=\gamma f \\ \sigma^\varphi=-\varphi^2 \\ \sigma^f=-2\varphi f \\ \sigma^g=-2(f^2+\varphi g) \end{cases} \tag{13}$$

相应的 Lie 点对称向量场为

$$V=\frac{\gamma}{2}g\partial_u+\gamma f\partial_v-\varphi^2\partial_\varphi-2\varphi f\partial_f-2(f^2+\varphi g)\partial_g \tag{14}$$

最后根据 Lie 点对称第一定理，解下列初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\hat{u}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\dfrac{\gamma}{2}\hat{g}(\varepsilon),\ \hat{u}(0)=u\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{v}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=\gamma\hat{f}(\varepsilon),\ \hat{v}(0)=v\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{\varphi}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=-\hat{\varphi}(\varepsilon)^2,\ \hat{\varphi}(0)=\varphi\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{f}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=-2\hat{\varphi}(\varepsilon)\hat{f}(\varepsilon),\ \hat{f}(\varepsilon)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{g}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=-2(\hat{f}(\varepsilon)^2+\hat{\varphi}(\varepsilon)\hat{g}(\varepsilon)),\ \hat{g}(\varepsilon)=0\end{cases} \tag{15}$$

得到如下的对称群变换定理：

定理 3 若 u,v,φ,f,g 是扩展系统(12)的解，则

$$\begin{cases}\hat{u}(\varepsilon)=u+\dfrac{\gamma\varepsilon^2(\varphi g-f^2)+\gamma\varepsilon g}{2(1+\varepsilon\varphi)^2}\\ \hat{v}(\varepsilon)=v+\dfrac{\gamma\varepsilon f}{1+\varepsilon\varphi}\\ \hat{\varphi}(\varepsilon)=\dfrac{\varphi}{1+\varepsilon\varphi}\\ \hat{f}(\varepsilon)=\dfrac{f}{(1+\varepsilon\varphi)^2}\\ \hat{g}(\varepsilon)=\dfrac{g(1+\varepsilon\varphi)-2\varepsilon f^2}{(1+\varepsilon\varphi)^3}\end{cases} \tag{16}$$

也是该系统的解，其中 ε 是任意群参数.

2 CRE 可解及其相互作用解

2.1 CRE 可解

通过领头项分析，我们可以得到 KB 方程有如下形式的解：

$$\begin{cases}v=v_0+\dfrac{v_1}{R(w)}\\ u=u_0+\dfrac{u_1}{R(w)}+\dfrac{u_2}{R(w)^2}\end{cases} \tag{17}$$

式中 v_0,v_1,u_0,u_1,u_2 是关于 x 和 t 的待定函数，$R(w)$ 是 Riccati 方程

$$R_w=a_0+a_1R(w)+a_2R(w)^2 \tag{18}$$

的解，这里 a_0,a_1,a_2 是任意常数. 将(17)式和 Riccati 方程(18)式代入到方程组(1)中，消去 $R(w)$ 的各阶系数，可以得到

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\gamma w_x^2 a_1 - \gamma w_{xx} - 2w_t}{w_x} \\ v_1 = a_0 \gamma w_x \\ u_0 = -\dfrac{1}{2}\gamma^2 a_0 a_2 w_x^2 + \dfrac{1}{4}\gamma^2 a_1 w_{xx} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\gamma(\gamma w_{xxx} + 2w_{xt})}{w_x} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\gamma(-\gamma w_{xx}^2 - 2w_{xx}w_t)}{w_x^2} \\ u_1 = -\dfrac{1}{2}\gamma^2 w_x^2 a_0 a_1 + \dfrac{1}{2}\gamma^2 w_{xx} a_0 \\ u_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma^2 w_x^2 a_0^2 \end{cases} \tag{19}$$

其中 w 满足 Schwarzian 形式：

$$-P_{1t} - \gamma P_{1xx} - \frac{1}{4}\gamma^2 S_{1x} + P_1 P_{1x} + \frac{1}{4}\gamma^2 \delta w_{xx} = 0 \tag{20}$$

$$P_1 = \frac{\varphi_t}{\varphi_x}$$

$$S_1 = \frac{\varphi_{xxx}}{\varphi_x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x^2}$$

$$\delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$$

显然，如果 w 是相容性方程(20) 的解，则由 $R(w)$ 和(19) 式可知(17) 式是方程组(1) 的解.

综上，我们得到如下定理：

定理 4 对于给定的方程(20)，如果 w 是方程(20) 的解，则

$$\begin{cases} v = v_0 + \dfrac{a_0 \gamma w_x}{R(w)} \\ u = u_0 + \dfrac{-\dfrac{1}{2}\gamma^2 w_x^2 a_0 a_1 + \dfrac{1}{2}\gamma^2 w_{xx} a_0}{R(w)} + \dfrac{-\dfrac{1}{2}\gamma^2 w_x^2 a_0^2}{R(w)^2} \end{cases} \tag{21}$$

是 KB 方程组(1) 的解，其中 v_0 和 u_0 满足方程(19)，$R \equiv R(w)$ 是 Riccati 方程的解.

2.2 KB 系统的相互作用解

我们知道 Riccati 方程有如下形式的双曲正切函数解：

$$R(w) = -\frac{1}{2a_2}\left(a_1 + \sqrt{\delta}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta} w\right)\right) \tag{22}$$

式中 $\delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$. 将 Riccati 方程的解(22) 式代入到(21) 式中，即可得到方程组(1) 的如下形式的解

$$\begin{cases} v = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\gamma a_1 w_x^2 - \gamma w_{xx} - 2w_t}{w_x} - \dfrac{2a_0 a_2 \gamma w_x}{a_1 + \sqrt{\delta}\tanh\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\delta} w\right)} \\ u = -\dfrac{1}{2}\gamma^2 a_0 a_2 w_x^2 + \dfrac{1}{4}\gamma^2 a_1 w_{xx} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\gamma(\gamma w_{xxx} + 2w_{xt})}{w_x} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\gamma(-\gamma w_{xx}^2 - 2w_{xx}w_t)}{w_x^2} \\ -\dfrac{2(-\dfrac{1}{2}\gamma^2 a_0 a_1 w_x^2 + \dfrac{1}{2}\gamma^2 a_0 w_{xx}) a_2}{a_1 + \sqrt{\delta}\tanh\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\delta} w\right)} - \dfrac{2\gamma^2 a_0^2 a_2^2 w_x^2}{\left(a_1 + \sqrt{\delta}\tanh\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\delta} w\right)\right)^2} \end{cases} \tag{23}$$

由定理 4 可知，只要找到相容性条件(20) 的解，代入到方程(23) 就可以得到 KB 方程的解. 我们假设 w 具

有如下特殊形式的解

$$w=k_1x+p_1t+W(k_2x+p_2t),\ W(k_2x+p_2t)=W(\xi)=W \tag{24}$$

其中 $W_1\equiv W_1(\xi)=W_\xi$ 满足椭圆方程:

$$W_{1\xi}^2=C_0+C_1W_1+C_2W_1^2+C_3W_1^3+C_4W_1^4 \tag{25}$$

式中 $C_i(i=0,\cdots,4)$ 是常数. 把(24) 式和椭圆方程(25) 式代入到相容性方程(20) 中, 经过计算得到:

$$\begin{cases} C_0=\dfrac{-\delta\gamma^2k_1^4k_2^2+\gamma^2C_2k_1^2k_2^4-4k_1^2p_2^2+8k_1k_2p_1p_2-4k_2^2p_1^2}{3k_2^6\gamma^2} \\ C_1=\dfrac{-\delta k_1^3+C_2k_1k_2^2}{k_2^3} \\ C_2=C_2 \\ C_3=-\dfrac{-5\delta k_1^2-C_2k_2^2}{3k_1k_2} \\ C_4=\delta \end{cases} \tag{26}$$

显然椭圆方程(25) 的通解可以用雅可比椭圆函数来表示, 将(25) 式的解取为如下形式:

$$W(\xi)=cE_\pi(sn(\xi,\ m),\ n,\ m) \tag{27}$$

其中, $sn(\xi,\ m)$ 为一般的椭圆正弦函数, $E_\pi(sn(\xi,\ m),\ n,\ m)$ 是第三类不完全椭圆积分, 则

$$w=k_1x+w_1t+W(\xi)=k_1x+w_1t+cE_\pi(sn(k_1x+w_1t,\ m),\ n,\ m) \tag{28}$$

把(28) 式代入到(23) 式中, 即可得到方程组(1) 的一组孤立波与椭圆周期波的相互作用解:

$$\begin{cases} v=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{\gamma(S^2k_1n-ck_2-k_1)a_1}{(S^2n-1)^2}-\dfrac{2\gamma ck_2^2nSCD}{(-S^2n+1)^2}-\dfrac{2(S^2nw_1-cw_2-w_1)}{S^2n-1}\right)(S^2n-1)}{S^2k_1n-ck_2-k_1}- \\ \dfrac{2a_0a_2\gamma(S^2k_1n-ck_2-k_1)}{(S^2n-1)T} \\ u=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\gamma^2a_0a_2(S^2k_1n-ck_2-k_1)^2}{(S^2n-1)^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\gamma^2a_1ck_2^2nSCD}{(-S^2n+1)^2}- \\ \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{S^2k_1n-ck_2-k_1}\left(\gamma\left(\gamma\left(\dfrac{-8ck_2^3n^2S^2C^2D^2}{(-S^2n+1)^2}-\dfrac{2ck_2^3nC^2D^2}{(-S^2n+1)}+\dfrac{2ck_2^3nS^2D^2}{(-S^2n+1)}+\dfrac{2ck_2^3nS^2C^2m^2}{(-S^2n+1)}\right)-\right.\right. \\ \left.\left.\dfrac{4ck_2nsw_2CD}{(-S^2n+1)}\right)\right)-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\gamma\left(-\dfrac{4\gamma c^2k_2^4n^2S^2C^2D^2}{(-S^2n+1)^2}-\dfrac{4ck_2^2nSCD(S^2nw_1-cw_2-w_1)}{S^2n-1}\right)}{(S^2k_1n-ck_2-k_1)^2}- \\ \dfrac{-a_2\left(\dfrac{\gamma^2(S^2k_1n-ck_2-k_1)^2a_0a_1}{(S^2n-1)^2}+\dfrac{\gamma^2ck_2^2nSCDa_0}{(-S^2n+1)^2}\right)}{T}-\dfrac{2\gamma^2(S^2k_1n-ck_2-k_1)^2a_0^2a_2^2}{(S^2n-1)T} \end{cases} \tag{29}$$

式中

$$S=sn(\xi,\ m)$$

$$C=cn(\xi,\ m)$$

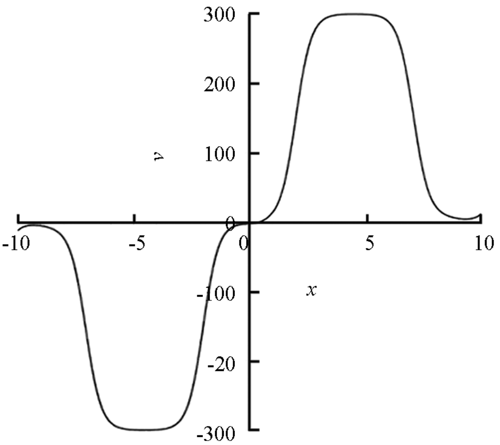
$$D=\mathrm{d}n(\xi,\ m)$$

$$T=a_1+\sqrt{\delta}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}(k_1x+w_1t+cE_\pi(S,\ n,\ m))\right)$$

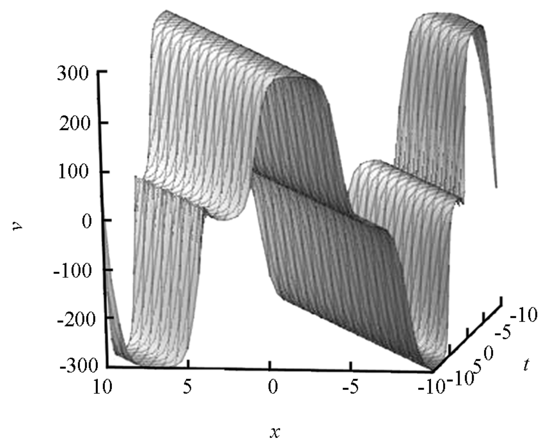
取参数如下：

$$\{\gamma, c, m, k_1, k_2, a_0, a_1, a_2, w_1, w_2, n, \delta\}=$$
$$\{3, 3, 0.99999, -3, -1.5, 1, 1, 0.2, 2, 1, 0.9899, 0.25\} \tag{30}$$

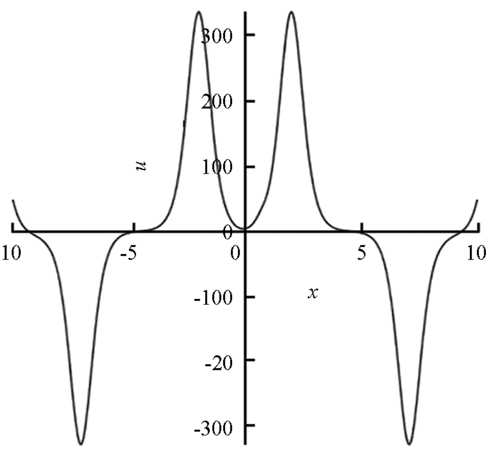
则 KB 方程的孤立波与椭圆周期波的相互作用如图 1 所示.



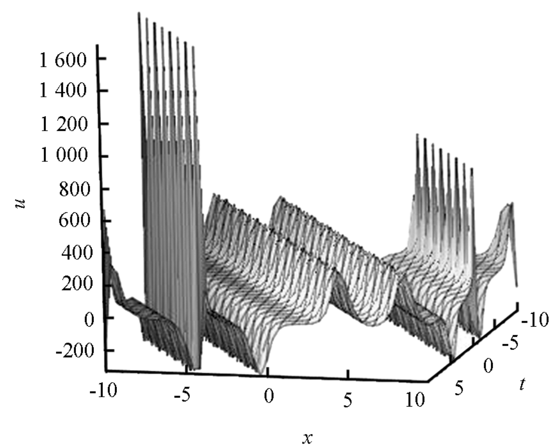
a. t=0, v的平面结构



b. v的结构图



c. t=0, u的平面结构



d. u的结构图

图 1　KB 方程的孤立波与椭圆周期波的相互作用示意图

3　结束语

本文以具有物理背景的 Kaup-Boussinesq 方程为研究对象，运用数学软件 Maple，通过 Painlevé 截断展开法得到了方程的留数对称，并且将留数对称局域化为扩展系统的 Lie 点对称. 留数对称的局域化过程，是求解非线性演化系统相互作用解的重要方法之一. 此外，在 Riccati 方程的帮助下，证明了 KB 方程是 CRE 可解的，并且给出了方程组(1)的孤立波与椭圆周期波相互作用解. 最后通过计算机模拟给出了孤立波与椭圆周期波相互作用解的图像. 由此可知，CRE 方法不仅可以构造可能存在的可积系统，而且对于构造不同类型的相互作用解是非常有效的.

参考文献：

[1]　XIN X P, CHEN Y. The Using of Conservation Laws in Symmetry-Preserving Difference Scheme [J]. Communications in Theoretical Physics, 2013, 59(5): 573-578.

[2] WEISS J, TABOR M, CARNEVALE G. The Painlevé Property for Partial Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Physics, 1983, 24(3): 522-526.

[3] CONTE R. Invariant Painlevé Analysis of Partial Differential Equations [J]. Physics Letters A, 1989, 140(7-8): 383-390.

[4] GUTHRIE G A. Recursion Operators and Non-Local Symmetries [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1994, 446(1926): 107-114.

[5] LOU S Y, HU X B. Non-Local Symmetries via Darboux Transformations [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(5): L95-L100.

[6] XIN X P, MIAO Q, CHEN Y. Nonlocal Symmetries and Exact Solutions for PIB Equation [J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 58(3): 331-337.

[7] LOU S Y, HU X R, CHEN Y. Nonlocal Symmetries Related to Bäcklund Transformation and Their Applications [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2012, 45(15): 155209.

[8] 楼森岳. 推广的 Painlevé 展开及 KdV 方程的非标准截断解 [J]. 物理学报, 1998, 47(12): 1937-1945.

[9] GAO X N, LOU S Y, TANG X Y. Bosonization, Singularity Analysis, Nonlocal Symmetry Reductions and Exact Solutions of Supersymmetric KdV Equation [J]. Journal of High Energy Physics, 2013, 2013(5): 29.

[10] LOU S Y. Consistent Riccati Expansion for Integrable Systems [J]. Studies in Applied Mathematics, 2015, 134(3): 372-402.

[11] BHRAWY A H, THARWAT MM, ABDELKAWY M A. Integrable System Modelling Shallow Water Waves: Kaup-Boussinesq Shallow Water System [J]. Indian Journal of Physics, 2013, 87(7): 665-671.

[12] CHEN C, JIANG Y L. Invariant Solutions and Conservation Laws of the GeneralizedKaup-Boussinesq Equation [J]. Waves in Random and Complex Media, 2019, 29(1): 138-152.

[13] 张 盈. Kaup-Boussinesq 方程组的守恒律 [J]. 高师理科学刊, 2011, 31(2): 33-35, 50.

Residual Symmetries and Interaction Solutions of the Kaup-Boussinesq Equations

HU Xing-ru

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: In this paper, the residual symmetry and interaction solution of the Kaup-Boussinesq equations are studied. First, the truncated Painlevé method is developed to obtain the residual symmetry of the Kaup-Boussinesq equations. Then, the Kaup-Boussinesq equations are proved to be consistent Riccati expansion (CRE) solvable. Finally, with the help of the Jacobian elliptic functions, the interaction solutions of solitary wave and elliptic periodic wave are obtained through solving the consistency equation.

Key words: Kaup-Boussinesq equation; residual symmetry; consistent Riccatiexpansion (CRE) solvability; interaction solution

责任编辑 张 枸