

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.07.015

自转离心力对月幔温度演化影响的二维有限元模拟

张 腾, 钟 振

贵州师范大学 物理与电子科学学院, 贵阳 550025

摘要: 为研究自转离心力对月幔温度演化的影响, 根据月球热演化的控制方程, 对其进行无量纲化处理, 推导了在二维直角坐标系中的有限元弱解形式. 利用地-月系角动量近似守恒, 求得了月球形成初期的自转角速度, 并在热演化控制方程中考虑了自转离心效应. 结果表明, 自转离心效应有助于垂直自转轴的方向产生高温对流柱, 而于两极区域产生大幅度的低温对流柱. 自转离心效应引起的对流模式, 相较于非自转离心效应, 能有效地降低月幔温度, 这一机制有必要在月球热演化中加以考虑.

关键词: 对流柱; 控制方程; 无量纲化; 自转离心力

中图分类号: P223

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2021)07-0111-07

通过月球影像研究, 人们发现其正面分布着大量暗黑色的玄武岩沉积物. 相关研究表明, 这些玄武岩主要由月球形成初期的古火山活动产生. 到前苏联月球 3 号首次拍摄月球背面时, 发现月球背面并不像正面那样, 除莫斯科海、南极艾得肯盆地及 Apollo 撞击坑外, 其他区域没有任何玄武岩^[1]. 进一步的研究表明, 月球背面玄武岩含量约占整个背面的 1%, 而正面玄武岩含量占正面区域的 1/3. 月球正面和背面玄武岩含量的不对称性, 间接地反映了早期热演化的不对称性. 关于月球形成初期的状况, 目前学界已确认了岩浆洋模型(lunar magma ocean, LMO)的合理性^[2]. 该模型认为, 月球自吸积后, 发生了全球性的熔融事件, 较轻的钙长石由于结晶, 浮于岩浆洋的顶层, 形成原始的斜长岩月亮, 而较重的镁铁质物质下沉, 结晶形成月幔. 在结晶过程中, 全球性对流模式可能导致背面月亮增厚, 而正面月亮变薄, 易产生古火山活动^[3]. Zhong 等人^[4]研究表明, 1 阶对流项会导致热演化的不对称性. Laneuville 等人^[5]研究表明, 由于正面风暴洋一带富集 KREEP 产热元素, 局部区域的高温, 会引起月幔热对流趋向于正面产生, 导致热演化的不对称性. Padovan 等人^[6]的研究也表明, 发生在月球背面的一次大碰撞使月幔熔融逆向, 导致热演化的不对称性. 月球激光测距(lunar laser ranging, LLR)数据表明地-月间距以每年 3.8 cm 的速度增加^[7], 由地-月系角动量近似守恒, 可知月球自转速度在不断地变慢, 早期古月球自转速度比现在大得多, 自转离心效应对热演化的影响不能被忽略. 有关自转离心效应对月球热演化的影响, 目前还没有类似的研究与分析. 为此, 本研究考虑热对流效应, 顾及自转离心力的影响, 利用有限元方法, 对月幔温度演化进行模拟, 以探究自转离心效应与月球热演化的关系, 以期为这方面的研究提供一定的参考.

1 无量纲化的控制方程和粘滞系数

考虑对流效应的月球热演化, 控制方程较为复杂, 为了便于边界条件的处理, 通常采用有限元方法来

收稿日期: 2020-05-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(41864001); 贵州省科技计划项目(黔科合平台人才[2018]5769).

作者简介: 张 腾, 硕士研究生, 主要从事有限元模拟与应用方面的研究.

通信作者: 钟 振, 教授, 硕士研究生导师.

进行仿真分析^[8]. 在对流模型中, 月幔通常被认为是一种不可压缩的高粘滞性流体, 即不考虑惯性力的影响, 与此相关的湍流效应忽略不计, 学界将此模型称为 Boussinesq 近似. 在该近似条件下, 仅在动量方程的浮力项中考虑密度的变化, 其他控制方程的密度假定为常数^[9-10]. 为了检验自转离心效应, 控制方程仅考虑热对流效应, 与此有关的化学物质分层效应忽略不计^[11]. 控制方程主要由质量方程、动量方程和能量方程构成^[9-12]. 这 3 个方程中相关物理量直接参与运算, 不便于有限元网格的构建, 为此, 通常将控制方程进行无量纲化处理. 假定无量纲化的速度矢量为 \mathbf{u}' , 二阶应力张量为 $\boldsymbol{\sigma}'$, 压强为 P' , 温度和热产能率分别为 T' 和 H' . 有量纲参考值及对应无量纲值, 以及相关计算参数见表 1. 此时, 质量方程、动量方程和能量方程的无量纲形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \nabla P' + R_a T' \hat{\mathbf{e}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla T' - \nabla^2 T' - H' = 0 \quad (3)$$

其中 R_a 表示瑞利数, 其大小为

$$R_a = \frac{\rho_0 g \beta \cdot \Delta T_0 \cdot R_0^3}{\mu_0 k_0} \quad (4)$$

其中: ρ_0 和 g 分别表示月幔参考密度和参考重力加速度, μ_0 和 k_0 分别表示参考黏度和热扩散系数, β 和 ΔT_0 分别表示热膨胀系数和核幔界面温度, R_0 表示月球平均半径 R 与内核半径 R_{core} 之差. 相关参数取值^[8,11]见表 1.

表 1 相关参数的有量纲参考值及无量纲值

相关参数	有量纲的参考值	无量纲值
平均半径 R	1 738 km	1.0
内核半径 R_{core}	450 km	0.258 9
参考重力加速度 g	1.731 m/s ²	1.0
月幔平均密度 ρ_m	340 0 kg/m ³	1.0
参考黏度 μ_0	1.0 × 10 ²² Pa · s	1.0
月幔热扩散系数 k_0	0.9 × 10 ⁻⁶ m ² /s	1.0
月幔热膨胀系数 β	4 × 10 ⁻⁵ K ⁻¹	1.0
月幔参考热容 C_{p0}	1.3 × 10 ³ J/(kg ·)	1.0
核-幔界面温度 ΔT_0	2 000 K	1.0
月表平均温度 T_s	253 K	0.126 5
热瑞利数 R_a	2.746 46 × 10 ⁵	2.746 46 × 10 ⁵
特征速度 u_s	5.178 4 × 10 ⁻¹³ m/s	1.0
特征时间 t_s	3.356 3 × 10 ¹⁸ s	1.0

对于无量纲化的二阶应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的求解, 通常由粘滞系数 μ 和二阶应变率张量 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ 求得, 根据文献^[10], 可得三者的关系^[10]为

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5)$$

月幔粘滞特征是影响热演化的重要因素, 它使得月幔在长周期时标内表现出流体特征, 而在短周期时标内表现出弹性特征. 月幔粘滞特征通常用粘滞系数 μ 来量化, 其大小通常与温度、压强和研究区域的大小有关^[13]. 为了简化运算, 将月幔物质的流体特征假定为牛顿流体^[3-5], 此时, 剪应力与应变速度成正比. 假设参考黏度为 μ_0 , 核幔边界温度与壳幔边界温度之差为 ΔT , 对于月幔中参考半径 d 处的某点, 假定该点的温度为 T , 可得月幔物质的黏度^[14]为

$$\mu = \mu_0 \exp\left(c - \frac{bT}{\Delta T} - \frac{cd}{R}\right) \quad (6)$$

其中, R 表示月球平均参考半径, b 和 c 为给定常数, 取 $b = \ln 2.5$, $c = \ln 2.0$ ^[14].

2 控制方程的弱解形式

进行有限元程序设计前, 首先需要推导微分方程的弱解形式. 为了便于公式推导, 将(1)–(4)式中的撇号去掉, 因此, 后文的所有参量均表示无量纲化. 数值模拟在直角坐标系中进行, 研究区域为月幔某一经线的剖面. 根据变分基本引理, 结合(4)式得到(2)式的弱解形式为

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{ij} : \mathbf{w}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} v_x + \frac{\partial P}{\partial y} v_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} (R_a T g_x v_x + R_a T g_y v_y) d\Omega - \int_{\Gamma} (T_x v_x + T_y v_y) d\Gamma = 0 \quad (7)$$

其中: v_x 和 v_y 分别表示试探函数 v 在 x 轴和 y 轴方向的分量, g_x 和 g_y 分别表示 x 轴和 y 轴方向的无量纲化有效加速度, \mathbf{w}_{ij} 为试探函数 v 对应的二阶应变率张量. 若不考虑边界作用时^[11], (7)式可以简化为

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{ij} : \mathbf{w}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} v_x + \frac{\partial P}{\partial y} v_y \right) d\Omega + \int_{\Omega} (R_a T g_x v_x + R_a T g_y v_y) d\Omega = 0 \quad (8)$$

其中二阶应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 与试探函数 v 的应变率张量 \mathbf{w}_{ij} 分别为

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{w}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0.5 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ 0.5 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

类似地, (3)式的弱解形式为

$$\int_{\Omega} \left(T^{k+1} \tau + \delta t \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \delta t \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \left(T^k - \delta t \frac{\partial T}{\partial x} u_x - \delta t \frac{\partial T}{\partial y} u_y \right) \tau d\Omega - \oint_{\Gamma} \left(\tau \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \tau \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0 \quad (11)$$

其中: T^{k+1} 表示当前时刻的待求温度, T^k 表示上一时刻的温度, τ 表示温度对应的试探函数, δt 表示相邻两时刻之间的步长.

3 月球的自转离心力

3.1 自转角速度

月球的潮汐效应能使地球自转速度不断的变慢, 该效应由 LLR 数据得到验证^[7]. 由于地球自转速度受自身惯量矩变化和太阳潮汐的作用, 两者的影响在量级上相同而方向相反, 并且其他行星的潮汐因距离很远导致影响很小, 比如木星的潮汐影响在量级上只有太阳的万分之一, 因此, 地球和月球可以看作是一个孤立系统且总角动量近似守恒. 总的角动量包括: 地球自转角动量、月球自转角动量、月球绕地球的公转角动量. 根据月球形成的巨型撞击理论, 文献[15]的研究表明, 月球形成时与地球的距离为 $3.77R_{\oplus}$ (R_{\oplus} 表示地球半径), 得到早期地-月系间距约为 2.4×10^7 m. 文献[16]的研究表明, 月球形成初期的地-月系总角动量, 比当前系统角动量多出 10% 到 20%. 本研究取多出的系统角动量为 14%, 结合表 2 数据估算出早期的地球自转周期为 5.05 h, 相应的月球自转角速度为 4.4×10^{-3} rad/s. 文献[17]的数值结果发现, 地-月系形成初期地球自转周期约为 5 h, 本研究的计算结果与其接近, 表明本研究求解的早期月球自转角速度具有一定的合理性.

表 2 计算离心力用到的相关参数

相关参数	参考值	相关参数	参考值
月球质量	7.39×10^{22} kg	现今地月之间距离	$3.844\ 03 \times 10^8$ m
地球质量	5.98×10^{24} kg	现今地球自转周期	24 h
地球半径	6.371×10^6 m	早期月球自转角速度	4.4×10^{-3} rad/s
万有引力常量	6.67×10^{-11} N·m ² /kg ²	现今月球自转和公转周期	655.68 h
早期地月之间距离	2.402×10^7 m		

3.2 自转离心力的计算

如图 1 所示, 以与黄道面平行的方向为 x 轴, 其法线方向为 y 轴, 月球中心为坐标原点, 建立二维直角坐标系, z 轴为自转轴. 由文献[18]可知, 月球自转轴与黄道面法线的夹角约为 1.6° (即为角 θ), 所以得到实际月球截面上某一点的转动半径为

$$R_1 = R \cdot r \cos(\theta + \varphi) \quad (12)$$

其中: r 表示图 1 圆形区域上某一点的半径, 且满足 $0 < r < 1$, 则 R 与 r 的乘积表示月球截面上对应的实际半径. 根据角度关系可知角 α 等于角 θ , 以坐标轴的正半轴方向为力的正方向, 则无量纲化的自转离心力 F 在 x 轴和 y 轴方向的分量大小为

$$F_x = \frac{R_1 \omega^2 \cos \alpha}{g} \quad (13)$$

$$F_y = \frac{-R_1 \omega^2 \sin \alpha}{g} \quad (14)$$

其中: ω 表示月球的自转角速度, 根据(13)和(14)式, 得到(7)式中无量纲化的有效加速度为

$$g_x = -r \cos \varphi + \frac{R_1 \omega^2 \cos \alpha}{g} \quad (15)$$

$$g_y = -\left(r \sin \varphi + \frac{R_1 \omega^2 \sin \alpha}{g}\right) \quad (16)$$

4 数值模拟

目前, 月球被公认起源于一次火星大小的天体与地球的碰撞, 自吸积结束后, 较重的金属元素下沉引起重力势力的释放, 以及短周期放射性元素²⁶Al的作用, 致使月球内部温度快速上升. 另外, 根据阿波罗任务采样的岩石样品研究结果, 发现月球早期拥有较高的温度, 在月球形成的初期, 月幔处于高温和完全熔融的状态^[2,8]. 基于此考虑, 本研究假定月球形成初期具有高温月幔, 同时假定月幔处于完全熔融状态^[8]. 参考文献[8], 取核幔边界温度为 2 000 K, 演化时间为 4.5 Ga(1 Ga=10 亿年).

月幔初始温度见图 2a, 从核-幔边界向外, 温度逐渐降低, 此时, 整个月幔的平均温度约为 1 667.76 K. 由于自转离心效应, 至图 2b 时

(演化时间约为 4 419 万年), 在垂直自转轴的方向形成对流柱, 将核-幔边界的热量输运至外表面, 同时, 在两极区域, 即将形成低温下沉的对流柱, 此时, 整个月幔的平均温度约为 1 608.93 K. 文献[11]的研究表明, 当不考虑自转离心效应时, 产生均匀的 4 个对流柱, 这说明自转离心效应有必要在月球热演化中加以考虑. 如图 2c 所示, 至 0.245 50 Ga 时, 月幔温度不断地下降, 由于内部热量的减

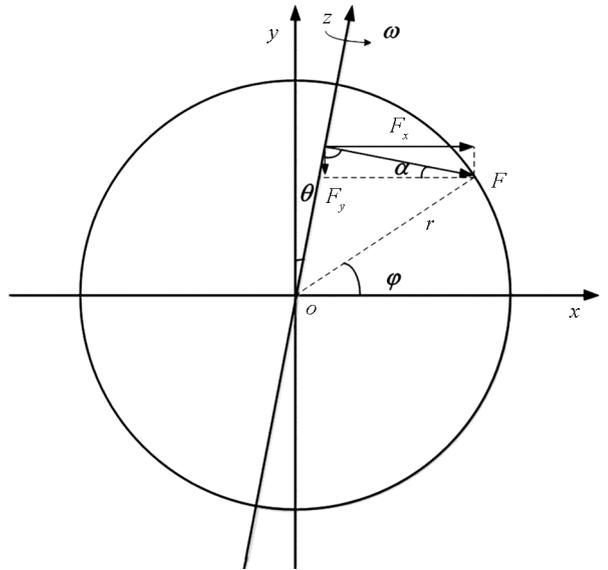
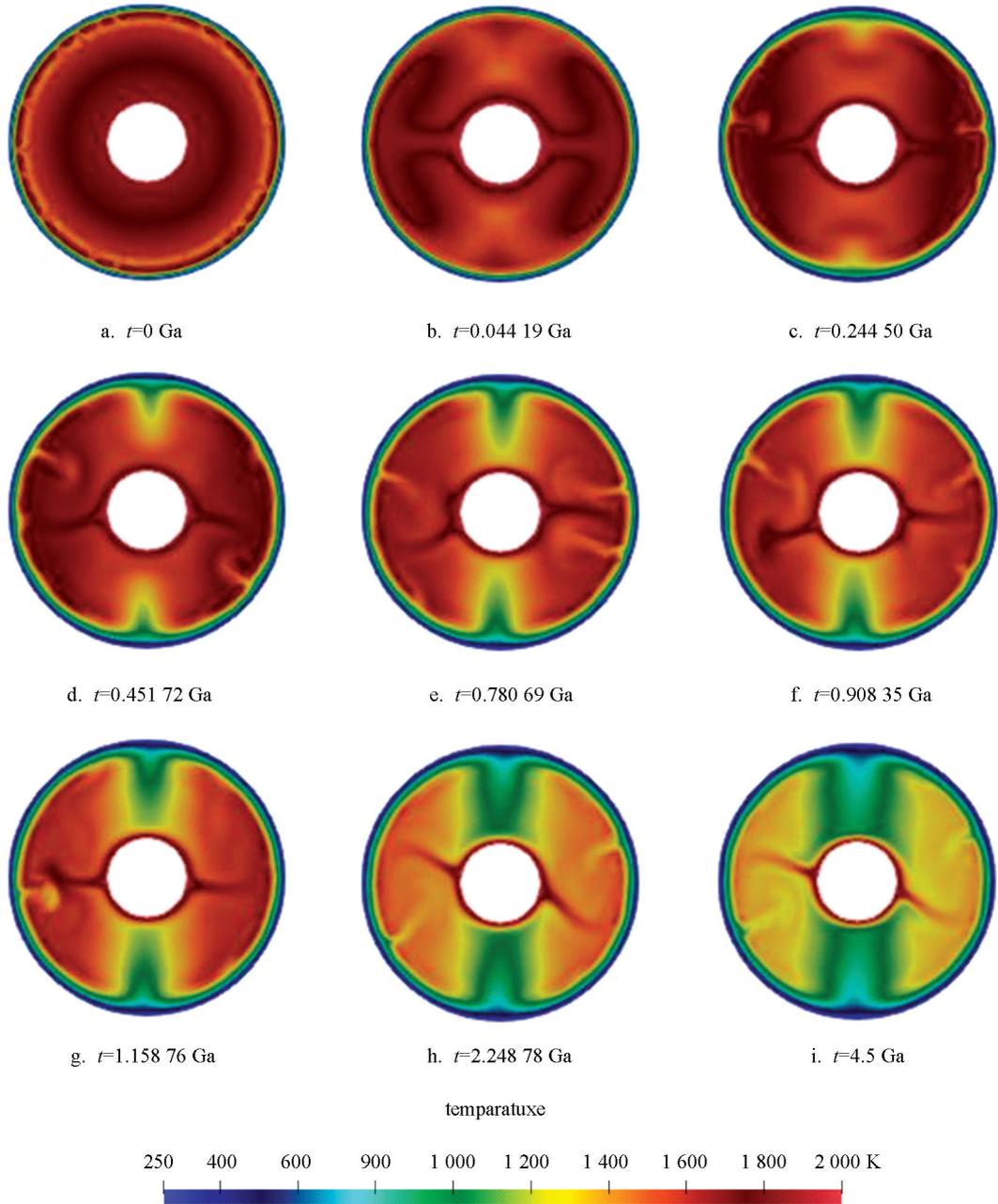


图 1 自转离心力示意图

小, 无法提供充足的能量, 致使对流柱变得不稳定, 而两极的低温对流柱已形成, 此时, 整个月幔的平均温度约为 1 559.67 K. 至 0.451 72 Ga 时(图 2d), 由于内部能量的降低, 同时, 两极大幅度的低温对流柱带来的低温, 致使核-幔边界的热对流柱发生切向移动, 外表面原高温区产生小幅度的低温对流柱, 此时, 整个月幔的平均温度约为 1 520.38 K. 如图 2e 和图 2f 所示, 从 0.780 69 Ga 至 0.908 35 Ga, 由于月幔温度的进一步降低, 两极大幅度低温对流柱, 以及外表面原高温区小幅度低温对流柱的共同作用, 使得核-幔边界有产生小幅度的热对流柱. 如图 2g-图 2i 所示, 从 1.158 76 Ga 至 4.5 Ga, 两极大幅度低温对流柱相对稳定, 其他小幅度低温对流柱, 以及核-幔边界的高温对流柱不稳定, 特别是核-幔边界的对流柱会产生明显的切向移动. 由图 2a-图 2i 可知, 自转离心效应有助于在垂直于自转轴的方向, 于核-幔边界产生热对流柱, 在两极区域产生明显的低温对流柱, 进而快速地输运月球内部的热量.



不同温度对应的颜色

图 2 月幔温度随时间的变化

另外,文献[11]在不考虑自转离心效应时,月幔初始(0 Ga)平均温度约为 1 735.10 K,至 4.5 Ga 时约为 1 278.20 K,下降 456.90 K.而本研究考虑自转离心效应后(表 3),月幔初始平均温度约为 1 667.76 K,至 4.5 Ga 时约为 1 163.28 K,下降 504.48 K.本研究模拟的最终月幔温度低于文献[11],且两者从初始到 0.245 50 Ga 时,分别下降 28.28 K 和 108.09 K,这说明自转离心效应引发的对流模式,降低了月幔的温度,并且在月球热演化的前 0.245 50 Ga 更为明显.由图 2 可知,在核-幔边界处,垂直于自转轴方向产生两个热对流柱,对流柱产生的方向恰好是月亮厚度二分性的方向,因此,自转离心现象可能与月亮二分性相联系,可为月球不对称热演化研究提供一定的参考.

表 3 不同演化时间点的月幔平均温度

时间/Ga	平均值/K	时间/Ga	平均值/K	时间/Ga	平均值/K
$t=0.000\ 00$	1 667.76	$t=0.044\ 19$	1 608.93	$t=0.245\ 50$	1 559.67
$t=0.451\ 72$	1 520.38	$t=0.780\ 69$	1 448.55	$t=0.908\ 35$	1 423.75
$t=1.158\ 76$	1 384.02	$t=2.248\ 78$	1 265.22	$t=4.500\ 00$	1 163.28

5 结 论

基于月球自转速度减慢的事实,以及利用地-月系角动量近似守恒的原理,估算了月球早期较大的自转角速度.在月球热演化的控制方程中考虑自转离心力后,①发现自转离心效应有助于在月球形成初期,在垂直于自转轴方向,于核-幔边界处产生热对流柱;②随着内部热量输运至月表,在两极区域产生大幅度、稳定的低温对流柱;③随着月幔温度的进一步降低,外表面原高温区产生小幅度的低温对流柱,核-幔边界的高温对流柱会产生切向移动;④由自转效应引起的对流模式,能有效降低月幔的温度,对月幔温度起到一定的调节作用.

参考文献:

- [1] TOKSÖZ M N, DAINTYA M, SOLOMON S C, et al. Structure of the Moon [J]. *Reviews of Geophysics*, 1974, 12(4): 539-567.
- [2] WARREN P H. The Magma Ocean Concept and Lunar Evolution [J]. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 1985, 13(1): 201-240.
- [3] LOPER D E, WERNER C L. On Lunar Asymmetries 1. Tilted Convection and Crustal Asymmetry [J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2002, 107(E6): 13-1-13-7.
- [4] ZHONG S J, PARMENTIER E M, ZUBER M T. A Dynamic Origin for the Global Asymmetry of Lunar Mare Basalts [J]. *Earth and Planetary Science Letters*, 2000, 177(3-4): 131-140.
- [5] LANEUVILLE M, WIECZOREK M A, BREUER D, et al. Asymmetric Thermal Evolution of the Moon [J]. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 2013, 118(7): 1435-1452.
- [6] PADOVAN S, BREUER D, MANSKE L, et al. The South-Pole Aitken Basin Formation and Its Effects on the Melting Activity in the Lunar Mantle [R]. *European Planetary Science Congress*, 2018, 12(755).
- [7] NA S H. Tidal Evolution of Lunar Orbit and Earth Rotation [J]. *Journal of the Korean Astronomical Society*, 2012, 45(2): 49-57.
- [8] SPOHN T, KONRAD W, BREUER D, et al. The Longevity of Lunar Volcanism: Implications of Thermal Evolution Calculations with 2D and 3D Mantle Convection Models [J]. *Icarus*, 2001, 149(1): 54-65.
- [9] 傅容珊,黄建华.地球动力学[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [10] 章梓雄,董曾南.黏性流体力学[M].北京:清华大学出版社,2011.
- [11] 刘家兴,钟 振,刘高福.月幔温度演化的二维有限元模拟[J].*陕西师范大学学报(自然科学版)*,2017,45(4): 46-49,58.
- [12] 张 凯,胡众欢,杨明金,等.太阳能干燥箱的自然对流数值模拟与实验研究[J].*西南师范大学学报(自然科学版)*,

2020, 45(12): 58-64.

- [13] BREUER D, MOORE W B. Dynamics and Thermal History of the Terrestrial Planets, the Moon, and Io [M]//Treatise on Geophysics. Amsterdam: Elsevier, 2007: 299-348.
- [14] BLANKENBACH B, BUSSE F, CHRISTENSEN U, et al. A Benchmark Comparison for Mantle Convection Codes [J]. Geophysical Journal International, 1989, 98(1): 23-38.
- [15] KOKUBO E, IDA S, MAKINO J. Evolution of a Circumterrestrial Disk and Formation of a Single Moon [J]. Icarus, 2000, 148(2): 419-436.
- [16] CANUP R M. Simulations of a Late Lunar-Forming Impact [J]. Icarus, 2004, 168(2): 433-456.
- [17] CANUP R M, ASPHAUG E. Origin of the Moon in a Giant Impact near the End of the Earth's Formation [J]. Nature, 2001, 412(6848): 708-712.
- [18] WILLIAMS J G, BOGGS D H, YODER C F, et al. Lunar Rotational Dissipation in Solid Body and Molten Core [J]. Journal of Geophysical Research: Planets, 2001, 106(E11): 27933-27968.

Two-Dimensional Finite Element Simulation of the Effect of Rotational Centrifugal Force on Lunar Mantle Temperature Evolution

ZHANG Teng, ZHONG Zhen

School of Physics and Electronics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: This paper mainly aims to study the effect of rotational centrifugal force on the lunar mantle temperature evolution. According to the governing equations of thermal evolution of the moon, we deduced their dimensionless version. Their weak forms of finite element method were also derived in the two-dimensional rectangular coordinate system. Considering the nearly conserved angular momentum of the Earth-Moon system, we estimated the lunar rotational angular velocity when the moon was initially formed. Then the rotational centrifugal force depending on the angular velocity was considered in the governing equations. The results indicated that the rotational centrifugal force promoted the formation of high temperature convection columns perpendicular to the rotation-axis, and produced low temperature convection columns along the rotation-axis. Compared with the case of no-rotational centrifugal force, the rotational centrifugal force was found to have an effect of cooling the lunar mantle. This mechanism needs to be considered in the lunar thermal evolution.

Key words: convection column; governing equation; dimensionless; rotational centrifugal force

责任编辑 潘春燕