第 43 卷第 8 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2021 年 8 月
Vol. 43　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.08.010

广义限制的 P-限制半群

晏　潘，　王守峰

云南师范大学 数学学院，昆明 650500

摘要：利用左正规带与限制半群的拟直积给出了广义限制的 P-限制半群的一个结构定理，并据此刻画了广义限制的 P-限制半群这一半群类的自由对象.

关　键　词：广义限制的 P-限制半群；拟直积；自由对象

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2021)08－0070－07

众所周知，逆半群是半群代数理论研究中最受重视的半群类，其研究成果极为丰富(可参见文献[1-2])．自 20 世纪 70 年代起，逆半群的一些推广形式得到半群研究者的重视．作为逆半群在正则半群中的一种推广，文献[3]提出了正则 $*$-半群．随后，正则 $*$-半群成为 20 世纪 70 年代到 90 年代的研究热点之一，许多著名的半群学者对此类半群进行了研究(参见文献[4-7])．

特别地，文献[6]研究了一类特殊的正则 $*$-半群(即广义逆 $*$-半群)的代数结构和自由对象．与此同时，作为逆半群在非正则半群中的推广，限制半群也得到了充分研究，取得了较丰富的成果(参见文献[8-9])．为了给出正则 $*$-半群和限制半群的共同推广形式，文献[10]引入了 P-限制半群．当前，P-限制半群类及其子类受到了半群工作者的充分关注(见文献[11-16])．

本文的目的是对一类 P-限制半群(即广义限制的 P-限制半群)展开研究．这类半群是广义逆 $*$-半群在 P-限制半群中的某种对应，形成 P-限制半群簇的一个子簇．本文利用左正规带与限制半群的拟直积给出了广义限制的 P-限制半群的一个结构定理，并据此刻画了广义限制的 P-限制半群这一半群类的自由对象．本文的结果改进和推广了文献[6]中关于广义逆 $*$-半群的相关结果．

1　预备知识

设$(S,\cdot)$是半群，$+$ 和 $*$ 是 S 上的两个一元运算．据文献[10]，若对任意 $x,y\in S$，下列等式成立：

(i) $x^+x=x$；　(i)′ $xx^*=x$；

(ii) $(xy)^+=(xy^+)^+$；　(ii)′ $(xy)^*=(x^*y)^*$；

(iii) $(x^+y^+)^+=x^+y^+x^+$；　(iii)′ $(x^*y^*)^*=y^*x^*y^*$；

(iv) $x^+x^+=x^+$；　(iv)′ $x^*x^*=x^*$；

(v) $x^{+*}=x^+$；　(v)′ $x^{*+}=x^*$；

(vi) $(xy)^+x=xy^+x^*$．　(vi)′ $x(yx)^*=x^+y^*x$．

则称$(S,\cdot,{}^+,{}^*)$为 P-限制半群，此时，称 $P_S=\{a^+\mid a\in S\}=\{a^*\mid a\in S\}$ 为 S 的投射元集．P-限制半群有如下一些基本性质：

引理 1[10]　设$(S,\cdot,{}^+,{}^*)$是 P-限制半群，$x,y\in S$，$e,f\in P_S$．则：

(1°) $(x^+y)^+=x^+y^+x^+$，$(xy^*)^*=y^*x^*y^*$；

收稿日期：2020－05－28

基金项目：国家自然科学基金项目(11661082)．

作者简介：晏　潘，硕士研究生，主要从事半群理论的研究．

通信作者：王守峰，教授，博士．

(2°) $x^+(xy)^+x^+=(xy)^+$，$y^*(xy)^*y^*=(xy)^*$；

(3°) $e^+=e$，$e^*=e$，$ef\mathscr{R}efe=(ef)^+=(fe)^*\in P_S$；

(4°) 若 $e\mathscr{L}f$ 或 $e\mathscr{R}f$，则 $e=f$.

据文献[10]，若 P_S 是 S 的子半格，则称 P-限制半群(S，·，$^+$，*)为限制半群，类似于广义逆 $*$-半群，若对任意 $e,f,g,h\in P_S$，有

$$efgh=egfh \tag{1}$$

则称 P-限制半群(S，·，$^+$，*)为广义限制的 P-限制半群. 显然，限制半群一定是广义限制的 P-限制半群. 但反之不然(见文献[15]中的例 2.9).

据文献[11]，若 P-限制半群(S，·，$^+$，*)的投射元集 P_S 生成的子半群 $C_S=\langle P_S\rangle$ 是 S 的子带，即 S 的任意有限个投射元的乘积均为幂等元，则称其为纯正 P-限制半群.

引理 2[11]　设(S，·，$^+$，*)是纯正 P-限制半群. 则 $C_S=P_S^2$.

设 S 是纯正 P-限制半群. 在 S 上定义关系 γ 如下：

$$\gamma=\{(x,y)\in S\times S \mid x^+\mathscr{D}_{C_S}y^+,\ x^*\mathscr{D}_{C_S}y^*,\ y^+x=yx^*\}$$

其中 $\mathscr{D}_{C_S}$ 是 C_S 上的格林关系. 则有以下结果：

引理 3[11]　设(S，·，$^+$，*)是纯正 P-限制半群，$a,b\in S$，

(1°) $a\gamma b$ 当且仅当 $a=a^+ba^*$，$b=b^+ab^*$. 特别地，当 $e,f\in P_S$ 时，$e\gamma f$ 当且仅当 $e=efe$，$f=fef$；

(2°) γ 是最小的(2，1，1)-限制半群同余，且 S/γ 的投射元半格为

$$P_{S/\gamma}=\{(a\gamma)^+ \mid a\in S\}=\{a^+\gamma \mid a\in S\}=\{(a\gamma)^* \mid a\in S\}=\{a^*\gamma \mid a\in S\}=\{e\gamma \mid e\in P_S\}$$

引理 4[1]　设 B 为正规带，则：

(1°) B 上的格林关系 $\mathscr{R}$ 是同余且商半群 $B/\mathscr{R}$ 为左正规带；

(2°) B 是左正规带当且仅当它是左零带的强半格.

具体来说，若 B 是左正规带，则 B 上 $\mathscr{L}$ 关系是同余，且商半群 $Y=B/\mathscr{L}$ 是半格. 设 B 的全体 $\mathscr{L}$-类为 $\{L_\alpha \mid \alpha\in Y\}$. 当 $\alpha,\beta\in Y$ 且 $\alpha\geqslant\beta$ 时，定义

$$\psi_{\alpha,\beta}: L_\alpha \longrightarrow L_\beta$$
$$x \longmapsto xu$$

其中 u 是 L_β 中任意元素. 则 $B=(Y,L_\alpha,\psi_{\alpha,\beta})$.

由等式(1)，容易验证以下结果：

引理 5　设(S，·，$^+$，*)是广义限制的 P-限制半群. 则 C_S 是正规带.

2　结构定理

本节的目的是利用左正规带与限制半群的拟直积给出广义限制的 P-限制半群的一个结构定理. 先介绍左正规带与限制半群的拟直积.

命题 1　设(S，·，$^+$，*)是限制半群，$L=(P_S,L_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$是左正规带. 对 $\forall(a,x,b),(c,y,d)\in Q$，在

$$Q=[L:S]=\{(a,x,b)\in L\times S\times L \mid a\in L_{x^+},\ b\in L_{x^*}\}$$

上定义

$$(a,x,b)(c,y,d)=(a\phi_{x^+,(xy)^+},\ xy,\ d\phi_{y^*,(xy)^*})$$
$$(a,x,b)^+=(a,x^+,a)\qquad (a,x,b)^*=(b,x^*,b)$$

则(Q，·，$^+$，*)是广义限制的 P-限制半群，称其为左正规带 L 与限制半群 S 的拟直积.

证　设$(a,x,b),(c,y,d)\in Q$. 则 $a\in L_{x^+}$，$b\in L_{x^*}$，$c\in L_{y^+}$，$d\in L_{y^*}$. 由引理 1(2°)知 $(xy)^+\leqslant x^+$，$(xy)^*\leqslant y^*$，故 Q 上定义的二元运算是合理的. 此外，注意到 $x^{+*}=x^+$，$x^{*+}=x^*$，$x^{++}=x^+$，$x^{**}=x^*$，Q 上的两个一元运算也是合理的.

现设$(a,x,b),(c,y,d),(m,z,n)\in Q$. 则

$$((a,x,b)(c,y,d))(m,z,n)=(a\phi_{x^+,(xy)^+},\ xy,\ d\phi_{y^*,(xy)^*})(m,z,n)=$$
$$(a\phi_{x^+,(xy)^+}\phi_{(xy)^+,(xyz)^+},\ xyz,\ n\phi_{z^*,(xyz)^*})=$$

$$(a\phi_{x^+,(xyz)^+}, xyz, n\phi_{z^*,(xyz)^*})$$

由上述事实及其对偶知$(Q, \cdot)$是半群.

下证$(Q, \cdot, ^+, ^*)$是P-限制半群. 设$(a, x, b),(c, y, d) \in Q$，由对称性，分以下几步证明：

步骤1 对S利用等式(i)及引理1(3°)知$x^+x = x$及$x^{++} = x^+$. 故

$$\begin{aligned}(a, x, b)^+(a, x, b) &= (a, x^+, a)(a, x, b) = \\ &(a\phi_{x^{++},(x^+x)^+}, x^+x, b\phi_{x^*,(x^+x)^*}) = \\ &(a\phi_{x^+,x^+}, x, b\phi_{x^*,x^*}) = (a, x, b)\end{aligned}$$

步骤2 对S利用等式(ii)知$(xy^+)^+ = (xy)^+$. 故

$$\begin{aligned}((a, x, b)(c, y, d))^+ &= (a\phi_{x^+,(xy)^+}, xy, d\phi_{y^*,(xy)^*})^+ = \\ &(a\phi_{x^+,(xy)^+}, (xy)^+, a\phi_{x^+,(xy)^+}) = \\ &(a\phi_{x^+,(xy^+)^+}, (xy^+)^+, a\phi_{x^+,(xy^+)^+}) = \\ &(a\phi_{x^+,(xy^+)^+}, xy^+, c\phi_{y^{+*},(xy^+)^*})^+ = \\ &((a, x, b)(c, y^+, c))^+ = ((a, x, b)(c, y, d)^+)^+\end{aligned}$$

步骤3 对S利用引理1及等式(iii),(v)知$x^{++} = x^+ = x^{+*}$，$(x^+y^+x^+)^+ = x^+y^+x^+ = (x^+y^+x^+)^* = (x^+y^+)^+$. 故

$$\begin{aligned}(a, x, b)^+(c, y, d)^+(a, x, b)^+ &= (a, x^+, a)(c, y^+, c)(a, x^+, a) = \\ &(a\phi_{x^{++},(x^+y^+x^+)^+}, x^+y^+x^+, a\phi_{x^{+*},(x^+y^+x^+)^*}) = \\ &(a\phi_{x^{++},(x^+y^+)^+}, (x^+y^+)^+, a\phi_{x^{++},(x^+y^+)^+}) = \\ &(a\phi_{x^{++},(x^+y^+)^+}, x^+y^+, c\phi_{y^{+*},(x^+y^+)^*})^+ = \\ &((a, x^+, a)(c, y^+, c))^+ = ((a, x, b)^+(c, y, d)^+)^+\end{aligned}$$

步骤4 对S利用引理1(3°)及等式(iv)和(v)知$x^{++} = x^+ = x^+x^+ = x^{+*}$. 故

$$(a, x, b)^+(a, x, b)^+ = (a, x^+, a)(a, x^+, a) = (a\phi_{x^{++},(x^+x^+)^+}, x^+x^+, a\phi_{x^{+*},(x^+x^+)^*}) =$$
$$(a\phi_{x^+,x^+}, x^+, a\phi_{x^+,x^+}) = (a, x^+, a) = (a, x, b)^+$$

步骤5 对S利用引理1(3°)知$x^{+*} = x^+$. 故

$$(a, x, b)^{+*} = (a, x^+, a)^* = (a, x^{+*}, a) = (a, x^+, a) = (a, x, b)^+$$

步骤6 对S利用引理1(3°)知$(xy)^{++} = (xy)^+$和$x^{**} = x^*$，而对S利用等式(vi)知$(xy)^+x = xy^+x^*$. 故

$$\begin{aligned}((a, x, b)(c, y, d))^+(a, x, b) &= (a\phi_{x^+,(xy)^+}, xy, d\phi_{y^*,(xy)^*})^+(a, x, b) = \\ &(a\phi_{x^+,(xy)^+}, (xy)^+, a\phi_{x^+,(xy)^+})(a, x, b) = \\ &(a\phi_{x^+,(xy)^+}\phi_{(xy)^{++},((xy)^+x)^+}, (xy)^+x, b\phi_{x^*,((xy)^+x)^*}) = \\ &(a\phi_{x^+,((xy)^+x)^+}, (xy)^+x, b\phi_{x^*,((xy)^+x)^*}) = \\ &(a\phi_{x^+,(xy^+x^*)^+}, xy^+x^*, b\phi_{x^{**},(xy^+x^*)^*}) = \\ &(a, x, b)(c, y^+, c)(b, x^*, b) = (a, x, b)(c, y, d)^+(a, x, b)^*\end{aligned}$$

综上所述，$(Q, \cdot, ^+, ^*)$是P-限制半群，且其投射元集为

$$P_Q = \{(a, x, b)^+ \mid (a, x, b) \in Q\} = \{(a, x, b)^* \mid (a, x, b) \in Q\} =$$
$$\{(a, x^+, a) \mid a \in L_{x^+}\} = \{(b, x^*, b) \mid b \in L_{x^*}\}$$

设$(a, x^+, a),(b, y^+, b),(c, z^+, c),(d, w^+, d) \in P_Q$. 则由$S$是限制半群知$y^+z^+ = z^+y^+$，故

$$\begin{aligned}&(a, x^+, a)(b, y^+, b)(c, z^+, c)(d, w^+, d) = \\ &(a\phi_{x^{++},(x^+y^+z^+w^+)^+}, x^+y^+z^+w^+, d\phi_{w^{+*},(x^+y^+z^+w^+)^*}) = \\ &(a\phi_{x^{++},(x^+z^+y^+w^+)^+}, x^+z^+y^+w^+, d\phi_{w^{+*},(x^+z^+y^+w^+)^*}) = \\ &(a, x^+, a)(c, z^+, c)(b, y^+, b)(d, w^+, d)\end{aligned}$$

这就说明$(Q,\cdot,{}^+,{}^*)$是广义限制的 P-限制半群.

命题 2　任意广义限制的 P-限制半群均(2，1，1)-同构于某个左正规带与某个限制半群的拟直积.

证　设$(S,\cdot,{}^+,{}^*)$是广义限制的 P-限制半群. 据引理 2、引理 4、引理 5 知 $C_S=P_S^2$ 是正规带且 $C_S/\mathscr{R}=\{R_x\mid x\in C_S\}$ 是左正规带. 对任意 $x\in C_S$，由 $C_S=P_S^2$ 知，存在 $e,f\in P_S$，使得 $x=ef$. 据引理 1(3°)知 $x^+=(ef)^+=efe\mathscr{R}ef=x$. 故 $R_x=R_{x^+}$. 于是

$$C_S/\mathscr{R}=\{R_x\mid x\in C_S\}=\{R_{x^+}\mid x\in C_S\}=\{R_e\mid e\in P_S\}$$

记 $L=C_S/\mathscr{R}$ 并取 $R_e,R_f\in L$，其中 $e,f\in P_S$. 则据引理 3(1°)知：$R_e\mathscr{L}R_f$ 当且仅当 $R_eR_f=R_e$；$R_fR_e=R_f$ 当且仅当 $R_{ef}=R_e$；$R_{fe}=R_f$ 当且仅当 $efe=e$；$fef=f$ 当且仅当 $e\,\gamma f$. 由引理 3(2°)，$(S/\gamma,\cdot,{}^+,{}^*)$是限制半群，其投射元半格为 $Y=P_{S/\gamma}=\{p\gamma\mid p\in P_S\}$. 对任意 $\alpha\in Y$，记 $L_\alpha=\{R_e\in L\mid e\gamma=\alpha,\ e\in P_S\}$. 设 $R_e,R_f\in L_\alpha$，$e,f\in P_S$. 则 $e\gamma=\alpha=f\gamma$. 因此 $R_e\mathscr{L}R_f$.

设 $R_e\in L_\alpha$，$R_g\in L$，$R_e\mathscr{L}R_g$，$e,g\in P_S$. 则 $e\gamma g$，因此 $g\gamma=e\gamma=\alpha$. 故 $R_g\in L_\alpha$. 由此可知 L_α 是 L 的 $\mathscr{L}$-类. 显然，对任意 $R_e\in L$，$e\in P_S$，总有 $R_e\in L_{e\gamma}$，$e\gamma\in Y$. 故$\{L_\alpha\mid\alpha\in Y\}$是 L 的全体 $\mathscr{L}$-类. 据引理 4，$L=(Y,L_\alpha,\psi_{\alpha,\beta})$，其中，当 $\alpha,\beta\in Y$ 且 $\alpha\geqslant\beta$ 时，有 $\psi_{\alpha,\beta}:L_\alpha\longrightarrow L_\beta$，$R_e\longmapsto R_{ef}$，这里 $R_f\in L_\beta$，$f\in P_S$. 考虑拟直积

$$[L:S/\gamma]=\{(R_e,x\gamma,R_f)\in L\times S/\gamma\times L\mid e,f\in P_S,\ R_e\in L_{(x\gamma)^+}=L_{x^+\gamma},\ R_f\in L_{(x\gamma)^*}=L_{x^*\gamma}\}=$$
$$\{(R_e,x\gamma,R_f)\in L\times S/\gamma\times L\mid e,f\in P_S,\ e\gamma x^+,\ f\gamma x^*\}$$

下证映射

$$\varphi:S\longrightarrow[L:S/\gamma]$$
$$x\longmapsto(R_{x^+},x\gamma,R_{x^*})$$

是 S 到$[L:S/\gamma]$的(2，1，1)-同构.

设 $x,y\in S$. 若$(R_{x^+},x\gamma,R_{x^*})=x\varphi=y\varphi=(R_{y^+},y\gamma,R_{y^*})$，则 $R_{x^+}=R_{y^+}$，$x\gamma=y\gamma$，$R_{x^*}=R_{y^*}$. 据引理 1(4)，有 $x^+=y^+$，$x^*=y^*$ 和 $x\gamma y$，而利用引理 3(1°)可得 $x=x^+yx^*=y^+yy^*=y$. 故 φ 是单射.

对任意$(R_e,x\gamma,R_f)\in[L:S/\gamma]$，有 $e\gamma=x^+\gamma$ 和 $f\gamma=x^*\gamma$. 故

$$(exf)\gamma=(e\gamma)(x\gamma)(f\gamma)=(x^+\gamma)(x\gamma)(x^*\gamma)=x\gamma$$

由于

$$(xf)\gamma=(x\gamma)(f\gamma)=(x\gamma)(x^*\gamma)=x\gamma$$

据引理 3(2)°，有$(xf)^+\gamma x^+$，进而由引理 3(1°)知 $x^+(xf)^+x^+=x^+$. 由 $e\gamma=x^+\gamma$ 及引理 3(1°)知 $ex^+e=e$. 故由等式(ii)及引理 1(3°)，(2°)知

$$(exf)^+=(e(xf)^+)^+=e(xf)^+e=ex^+(xf)^+x^+e=ex^+e=e$$

类似地，$(exf)^*=f$. 因此$(exf)\varphi=(R_e,x\gamma,R_f)$. 故 φ 是满射.

设 $x,y\in S$. 注意到

$$R_{(xy)^+}\in L_{((xy)\gamma)^+}=L_{(xy)^+\gamma}\qquad R_{(xy)^*}\in L_{((xy)\gamma)^*}=L_{(xy)^*\gamma}$$

由 $\psi_{(x\gamma)^+,((xy)\gamma)^+}$ 和 $\psi_{(y\gamma)^*,((xy)\gamma)^*}$ 的定义及引理 1，有

$$(x\varphi)(y\varphi)=(R_{x^+},x\gamma,R_{x^*})(R_{y^+},y\gamma,R_{y^*})=$$
$$(R_{x^+}\psi_{(x\gamma)^+,((xy)\gamma)^+},x\gamma y\gamma,R_{y^*}\psi_{(y\gamma)^*,((xy)\gamma)^*})=$$
$$(R_{x^+(xy)^+},(xy)\gamma,R_{y^*(xy)^*})=(R_{(xy)^+},(xy)\gamma,R_{(xy)^*})=(xy)\varphi$$

此外，据引理 1(3°)，有 $x^{++}=x^+=x^{+*}$. 故

$$(x\varphi)^+=(R_{x^+},x\gamma,R_{x^*})^+=(R_{x^+},(x\gamma)^+,R_{x^+})=$$
$$(R_{x^+},x^+\gamma,R_{x^+})=(R_{x^{++}},x^+\gamma,R_{x^{+*}})=x^+\varphi$$

类似地，$(x\varphi)^*=x^*\varphi$.

结合命题 1 和 2，得到本节的主要结果：

定理 1　同构意义下，广义限制的 P-限制半群是且仅是左正规带和限制半群的拟直积.

3 自由对象

本节的目的是刻画广义限制的P-限制半群这一半群类的自由对象. 为此,需要自由限制半群的相关概念和结论.

设X是非空集合,$X^{-1}=\{x^{-1}\mid x\in X\}$是与$X$之间存在双射的集合且$X\cap X^{-1}=\varnothing$. 记$Y=X\cup X^{-1}$,并用$Y^*$表示$Y$上的自由幺半群. 对任意$x\in X$及$w=y_1y_2\cdots y_n\in Y^*$,$y_i\in Y$,$i=1,2,\cdots,n$,规定$1^{-1}=1$,$(x^{-1})^{-1}=x$,$w^{-1}=y_n^{-1}\cdots y_2^{-1}y_1^{-1}$,$w^{\downarrow}=\{1,y_1,y_1y_2,\cdots,y_1y_2\cdots y_n\}$. 用$G$表示$Y$上的全部约化字构成的集合,并记

$$E=\{A\subseteq G\mid A\text{ 有限非空,且对任意 }w\in A\text{,都有 }w^{\downarrow}\subseteq A\}$$

对任意$g,h\in G$,用gh表示g与h先连接再约简得到的约化字. 由文献[1],$FIM(X)=\{(A,g)\in E\times G\mid g\in A\}$关于下列二元运算和一元运算:

$$(A,g)(B,h)=(A\cup gB,gh)\qquad (A,g)^{-1}=(g^{-1}A,g^{-1})$$

构成以$(\{1\},1)$为单位元的逆半群,其中$gB=\{gw\mid w\in B\}$. 易见$FR(X)=\{(A,g)\in FIM(X)\mid g\in X^*\}\setminus\{(\{1\},1)\}$是$FIM(X)$的子半群. 据文献[8],若考虑$FR(X)$上的一元运算$+$和$*$:

$$(A,g)^+=(A,1)\qquad (A,g)^*=(g^{-1}A,1)$$

及映射$\varepsilon: X\longrightarrow FR(X)$,$x\longmapsto(\{1,x\},x)$,则$(FR(X),\varepsilon)$为$X$上的自由限制半群. 特别地,$X\varepsilon$生成$FR(X)$. 不难看出,$FR(X)$的投射元半格为$P_{FR(X)}=\{(A,1)\mid A\in E\setminus\{\{1\}\}\}$且

$$(A,1)\leqslant(B,1)\Leftrightarrow A\supseteq B\qquad \forall(A,1),(B,1)\in P_{FR(X)}\tag{2}$$

在$L=\{(x,A)\in Y\times E\mid x\in A\}$上定义二元运算如下:对任意$(x,A),(y,B)\in L$,$(x,A)(y,B)=(x,A\cup B)$. 则由文献[6]知$L$是左正规带. 易知,对任意$(x,A),(y,B)\in L$,$(x,A)\mathscr{L}(y,B)$当且仅当$A=B$. 记$L_{(A,1)}=\{(x,A)\in L\mid x\in A\}$. 则$\{L_{(A,1)}\mid(A,1)\in P_{FR(X)}\}$就是$L$的全部$\mathscr{L}$-类. 当$(A,1),(B,1)\in P_{FR(X)}$,$(A,1)\geqslant(B,1)$时,定义

$$\psi_{(A,1),(B,1)}: L_{(A,1)}\longrightarrow L_{(B,1)}$$
$$(x,A)\longmapsto(x,A)(y,B)=(x,A\cup B)=(x,B)\tag{3}$$

其中(y,B)是$L_{(B,1)}$中某元素. 据引理4,有$L=(P_{FR(X)},L_{(A,1)},\psi_{(A,1),(B,1)})$. 考虑拟直积

$$\begin{aligned}[L:FR(X)]=&\{((x,A),(B,g),(y,C))\in L\times FR(X)\times L\mid(x,A)\in L_{(B,g)^+},(y,C)\in L_{(B,g)^*}\}=\\&\{((x,A),(B,g),(y,C))\in L\times FR(X)\times L\mid(x,A)\in L_{(B,1)},(y,C)\in L_{(g^{-1}B,1)}\}=\\&\{((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))\mid(A,g)\in FR(X),x\in A,y\in g^{-1}A,x,y\in Y\}=\\&\{((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))\mid A\in E,g\in A\cap X^*,x\in A\cap Y,y\in g^{-1}A\cap Y\}\end{aligned}$$

据命题1,$([L:FR(X)],\cdot,{}^+,{}^*)$是广义限制的$P$-限制半群. 设$((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A)),((u,B),(B,h),(v,h^{-1}B))\in[L:FR(X)]$,注意到

$$((A,g)(B,h))^+=(A\cup gB,gh)^+=(A\cup gB,1)$$
$$((A,g)(B,h))^*=(A\cup gB,gh)^*=((gh)^{-1}(A\cup gB),1)$$

及(3)式,有

$$\begin{aligned}&((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))((u,B),(B,h),(v,h^{-1}B))=\\&((x,A)\psi_{(A,1),(A\cup gB,1)},(A,g)(B,h),(v,h^{-1}B)\psi_{(h^{-1}B,1),((gh)^{-1}(A\cup gB),1)})=\\&((x,A\cup gB),(A\cup gB,gh),(v,(gh)^{-1}(A\cup gB)))\end{aligned}\tag{4}$$

$$((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))^+=((x,A),(A,g)^+,(x,A))=((x,A),(A,1),(x,A))\tag{5}$$
$$((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))^*=((y,g^{-1}A),(g^{-1}A,1),(y,g^{-1}A))$$

下面的定理给出了非空集合X上的自由广义限制的P-限制半群的刻画.

定理2 定义映射

$$i: X\longrightarrow[L:FR(X)]$$
$$x\longmapsto((x,\{1,x\}),x\varepsilon,(x^{-1},\{1,x^{-1}\}))$$

则$([L:FR(X)],i)$是X上的自由广义限制的P-限制半群.

证 设T为任意广义限制的P-限制半群,$\eta: X\longrightarrow T$是映射. 则由命题2,存在左正规带M及限制

半群$(S, \cdot, ^+, ^*)$，使得 $T=[M:S]$，$M=(P_S, M_e, \tau_{e,f})$．定义映射$\alpha, \beta: X \longrightarrow M$ 及$\pi: X \longrightarrow S$，使得对任意 $x \in X$，有 $x\eta=(x\alpha, x\pi, x\beta)$．将 α 扩展成 Y 到 M 的映射：$x^{-1}\alpha=x\beta$，$x \in X$．因为 π 是 X 到限制半群 S 的映射，而$(FR(X), \varepsilon)$是 X 上的自由限制半群，因此存在$(2, 1, 1)$-同态 $\phi: FR(X) \longrightarrow S$，使得 $\varepsilon\phi=\pi$，其中 $\varepsilon: X \longrightarrow FR(X)$，$x \longmapsto (\{1, x\}, x)$．

设 $x \in X$．则 $x\eta=(x\alpha, x\pi, x\beta) \in T=[M:S]$．于是

$$x\alpha \in M_{(x\pi)^+}=M_{(x(\varepsilon\phi))^+}=M_{((\{1,x\},x)\phi)^+}=M_{(\{1,x\},x)^+\phi}=M_{(\{1,x\},1)\phi}$$

对偶地，可知 $x\beta \in M_{(\{1,x^{-1}\},1)\phi}$．故对任意 $y \in Y$，都有 $y\alpha \in M_{(\{1,y\},1)\phi}$．设$((x, A), (A, g), (y, g^{-1}A)) \in [L:FR(X)]$．则 $1, x \in A$．据(2)式知$(\{1, x\}, 1) \geqslant (A, 1)$．由$(\{1, x\}, 1), (A, 1) \in P_{FR(X)}$ 及 ϕ 是$(2, 1, 1)$-同态可知

$$(\{1,x\},1)\phi \geqslant (A,1)\phi=(A,g)^+\phi=((A,g)\phi)^+ \qquad (\{1,x\},1)\phi, (A,1)\phi \in P_S \tag{6}$$

$$(\{1,y\},1)\phi \geqslant (g^{-1}A,1)\phi=(A,g)^*\phi=((A,g)\phi)^* \qquad (\{1,y\},1)\phi, (g^{-1}A,1)\phi \in P_S \tag{7}$$

故可定义映射 $\sigma: [L:FR(X)] \longrightarrow [M:S]$，

$$((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A)) \longmapsto ((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi}, (A,g)\phi, (y\alpha)\tau_{(\{1,y\},1)\phi,(g^{-1}A,1)\phi})$$

下证 σ 是$(2, 1, 1)$-同态且 $i\sigma=\eta$．设$((x, A), (A, g), (y, g^{-1}A)), ((u, B), (B, h), (v, h^{-1}B)) \in [L:FR(X)]$．据(4)，(6)式和(7)式知

$$\begin{aligned}
&(((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))((u,B),(B,h),(v,h^{-1}B)))\sigma=\\
&((x,A\cup gB),(A\cup gB,gh),(v,(gh)^{-1}(A\cup gB)))\sigma=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A\cup gB,1)\phi},(A\cup gB,gh)\phi,(v\alpha)\tau_{(\{1,v\},1)\phi,((gh)^{-1}(A\cup gB),1)\phi})=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi}\tau_{(A,1)\phi,(A\cup gB,1)\phi},((A,g)(B,h))\phi,(v\alpha)\tau_{(\{1,v\},1)\phi,(h^{-1}B,1)\phi}\tau_{(h^{-1}B,1)\phi,((gh)^{-1}(A\cup gB),1)\phi})=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi},(A,g)\phi,(y\alpha)\tau_{(\{1,y\},1)\phi,(g^{-1}A,1)\phi})((u\alpha)\tau_{(\{1,u\},1)\phi,(B,1)\phi},(B,h)\phi,(v\alpha)\tau_{(\{1,v\},1)\phi,(h^{-1}B,1)\phi})=\\
&((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))\sigma((u,B),(B,h),(v,h^{-1}B))\sigma
\end{aligned}$$

另外，注意到$((A, g)\phi)^+=(A, g)^+\phi=(A, 1)\phi$ 及(5)式，有

$$\begin{aligned}
&(((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))\sigma)^+=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi},(A,g)\phi,(y\alpha)\tau_{(\{1,y\},1)\phi,(g^{-1}A,1)\phi})^+=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi},((A,g)\phi)^+,(x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi})=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi},(A,1)\phi,(x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(A,1)\phi})=\\
&((x,A),(A,1),(x,A))\sigma=((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))^+\sigma
\end{aligned}$$

类似地，$(((x, A), (A, g), (y, g^{-1}A))\sigma)^*=((x, A), (A, g), (y, g^{-1}A))^*\sigma$．故 σ 是$(2, 1, 1)$-同态．设 $x \in X$．由 $x^{-1}\{1, x\}=\{1, x^{-1}\}$ 及 $\varepsilon\phi=\pi$ 知

$$\begin{aligned}
x(i\sigma)&=((x,\{1,x\}),(\{1,x\},x),(x^{-1},\{1,x^{-1}\}))\sigma=\\
&((x\alpha)\tau_{(\{1,x\},1)\phi,(\{1,x\},1)\phi},(\{1,x\},x)\phi,(x^{-1}\alpha)\tau_{(\{1,x^{-1}\},1)\phi,(x^{-1}\{1,x\},1)\phi})=\\
&(x\alpha,(x\varepsilon)\phi,x^{-1}\alpha)=(x\alpha,x(\varepsilon\phi),x^{-1}\alpha)=(x\alpha,x\pi,x\beta)=x\eta
\end{aligned}$$

故 $i\sigma=\eta$．最后证 Xi 能生成$[L:FR(X)]$．任取 $z \in X$．则

$$zi=((z,\{1,z\}),(\{1,z\},z),(z^{-1},\{1,z^{-1}\}))$$

从而

$$(zi)^+=((z,\{1,z\}),(\{1,z\},z)^+,(z,\{1,z\}))=((z,\{1,z\}),(\{1,z\},1),(z,\{1,z\}))$$

对偶可知

$$(zi)^*=((z^{-1},\{1,z^{-1}\}),(\{1,z^{-1}\},1),(z^{-1},\{1,z^{-1}\}))$$

设$((x, A), (A, g), (y, g^{-1}A)) \in [L:FR(X)]$．则$(A, g) \in FR(X)$．由 $FR(X)$ 是自由限制半群知 $X\varepsilon$ 生成 $FR(X)$．因此存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，使得 $x_1\varepsilon, x_2\varepsilon, \cdots, x_n\varepsilon$ 在 $FR(X)$ 的运算 $\cdot, ^+, ^*$ 下生成(A, g)．根据$[L:FR(X)]$中的运算，必存在 $a, b \in Y$，使得 $x_1i, x_2i, \cdots, x_ni$ 可按照 $x_1\varepsilon, x_2\varepsilon, \cdots, x_n\varepsilon$ 生成(A, g)的方式生成元素$((a, A), (A, g), (b, g^{-1}A))$(参考(4)式)．若 $x, y \in X$，则利用(4)式，$1, x \in A$ 及 $1, y \in g^{-1}A$，可得

$$(xi)^+((a,A),(A,g),(b,g^{-1}A))(yi)^+=$$

$$((x,\{1,x\}),(\{1,x\},1),(x,\{1,x\}))$$

$$((a,A),(A,g),(b,g^{-1}A))((y,\{1,y\}),(\{1,y\},1),(y,\{1,y\}))=$$
$$((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))$$

类似可证其他情况. 由以上讨论知 Xi 能生成 $((x,A),(A,g),(y,g^{-1}A))$. 于是 Xi 能生成 $[L:FR(X)]$. 这表明满足 $i\sigma=\eta$ 的 σ 是唯一的. 故 $([L:FR(X)],i)$ 是 X 上的自由广义限制的 P-限制半群.

参考文献:

[1] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford: Clarendon Press, 1995: 144-211.

[2] 罗天红, 罗永乐, 王正攀. 一类图逆半群的同余格的性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(4): 73-78.

[3] NORDAHL T E, SCHEIBLICH H E. Regular *-Semigroups [J]. Semigroup Forum, 1978, 16(3): 369-377.

[4] HALL T E, IMAOKA T. Representations and Amalgamation of Generalized Inverse *-Semigroups [J]. Semigroup Forum, 1999, 58(1): 126-141.

[5] IMAOKA T. Representations of Generalized Inverse *-Semigroups [J]. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 1995, 61(1-4): 171-180.

[6] SCHEIBLICH H E. Generalized Inverse Semigroups with Involution [J]. Rocky Moutain Journal of Mathematics, 1982, 12(2): 205-211.

[7] SZENDREI M B. Free *-Orthodox Semigroups [J]. Simon Stevin, 1985, 59(2): 175-201.

[8] FOUNTAIN J, GOMES G M S, GOULD V. The Free Ample Monoid [J]. International Journal of Algebra and Computation, 2009, 19(4): 527-554.

[9] GOULD V. Restriction and Ehresmann Semigroups [C]// Proceedings of the International Conference on Algebra 2010. Gadjah Mada University, Indonesia: World Scientific, 2011.

[10] JONES P R. A Common Framework for Restriction Semigroups and Regular *-Semigroups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2012, 216(3): 618-632.

[11] JONES P R. Varieties of P-Restriction Semigroups [J]. Communications in Algebra, 2014, 42(4): 1811-1834.

[12] WANG S F. On Algebras of P-Ehresmann Semigroups and Their Associate Partial Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2017, 95(3): 569-588.

[13] WANG S F. An Ehresmann-Schein-Nambooripad-Type Theorem for a Class of P-Restriction Semigroups [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2019, 42(2): 535-568.

[14] WANG S F. An Ehresmann-Schein-Nambooripad Theorem for Locally Ehresmann P-Ehresmann Semigroups [J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2020, 80(1): 108-137.

[15] YAN P, WANG S F. Completions of Generalized Restriction P-Restriction Semigroups [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43(5): 3651-3673.

[16] 张前滔, 赵 平, 罗永贵. 半群 $TOP_n(k)$ 的格林(星)关系及富足性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 9-15.

Generalized Restriction *P*-Restriction Semigroups

YAN Pan, WANG Shou-feng

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China

Abstract: A structure theorem of generalized restriction P-restriction semigroups is given by using the quasi-direct products of left normal bands and restriction semigroups. By using this theorem, the free objects of the class of generalized restriction P-restriction semigroups are described.

Key words: generalized restriction P-restriction semigroup; quasi-direct product; free object

责任编辑 廖 坤