

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.08.011

加权冠图的无符号拉普拉斯谱和正规拉普拉斯谱

魏 斌, 王维忠

兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070

摘要:刻画了 G_2 为正则图时, 加权冠积图 $G_1 \circ G_2$ 的无符号拉普拉斯谱, 以及 G_1 和 G_2 都为正则图时, $G_1 \circ G_2$ 的正规拉普拉斯谱. 借助数学归纳法, 将所得关于 $G_1 \circ G_2$ 的结果加以推广, 得到了一般加权冠图 $G^{(m)}$ 的相应结论.

关键词: 无符号拉普拉斯谱; 正规拉普拉斯谱; 加权冠积图

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2021)08-0077-07

本文仅考虑简单的无向图. 设图 G 的顶点集为 $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$, 边集为 $E(G)$. 图 G 的邻接矩阵为 $A(G) = (a_{ij})$, 其中当 $ij \in E(G)$ 时, $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 连接顶点 i 和 j 的边的权数用 ω_{ij} 表示, $W(G) = (\omega_{ij})$ 表示图 G 的广义邻接矩阵, 其中当 $ij \in E(G)$ 时, $\omega_{ij} = \omega_{ij}$, 否则 $\omega_{ij} = 0$. 设 $N_G(i)$ 表示顶点 i 所有邻点的集合, $d_i = |N_G(i)|$ 表示顶点 i 的度. 若 $d_i = 0$, 则称 i 为孤立点. 若一个图的每个顶点的度均为 d , 则称这个图为 d -正则图. 设 $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是图 G 的度对角矩阵. 顶点 i 的强度 $s_i = \sum_{j \in V(G)} \omega_{ij} (i = 1, 2, \dots, n)$. 设 $S(G) = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 是图 G 的对角强度矩阵. 设 $Q(G) = S(G) + W(G)$ 和 $L(G) = I - S^{-\frac{1}{2}}W(G)S^{-\frac{1}{2}} = (l_{ij})$ 分别表示加权冠积图 G 的无符号拉普拉斯矩阵和正规拉普拉斯矩阵, 这里

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ 且 } d_i \neq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{s_i s_j}} & ij \in E(G) \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

众所周知, 许多复杂系统, 如社会系统、生物系统等, 均可用复杂网络来描述, 而任何复杂网络都可用图来表示. 因此, 关于复杂网络的研究一直是图论领域中的热点问题. 相比较无权网络只考虑节点间相互作用的存在与否, 加权网络的权还能刻画该网络所描述实际系统中个体间相互作用的强度, 因此加权网络更能准确地描述实际网络^[1]. 例如, 机场网络^[1]中每年在两个机场之间旅行的乘客人数, 网络^[2]中路由器之间单位时间内的数据包流量, 以及生态系统^[3]中捕食者——被捕食者相互作用的强度等都可通过权来反映. 虽然目前关于冠图的成果很多^[4-8], 但关于加权冠图的研究十分鲜见. 文献[9]刻画了 G_2 为 d -正则图和完全二部图时加权冠图 $G_1 \circ G_2$ 的邻接特征值, 同时得到了当 G_2 是连通图时图 $G_1 \circ G_2$ 的拉普拉斯特征值. 文献[10]中给出了 G_2 为 d -正则图和完全二部图时加权边冠图 $G_1 \diamond G_2$ 的邻接特征值和(无符号)拉普拉斯特征值.

受上述研究的启发, 本文刻画了当 G_2 为正则图时, 加权冠积图 $G_1 \circ G_2$ 的无符号拉普拉斯谱, 以及 G_1

和 G_2 都为正则图时, $G_1 \circ G_2$ 的正规拉普拉斯谱. 借助数学归纳法, 把关于 $G_1 \circ G_2$ 的结果加以推广, 得到了加权冠图 $G^{(m)}$ 的无符号拉普拉斯谱和正规拉普拉斯谱. 下面, 首先给出加权冠图^[9]的定义.

定义 1 设 G_1 和 G_2 是阶数分别为 n 和 k 的简单连通图, 将 G_1 复制一次且每条边的权数为 1, G_2 对应于 G_1 的顶点复制 n 次且每条边的权数为 r ($0 < r \leq 1$), 所得图为加权冠图 $G_1 \circ G_2$.

例如, 设 G_1 为 4 个顶点的圈, G_2 为 3 个顶点的完全图, 则加权冠图 $G_1 \circ G_2$ 如图 1(c) 所示.

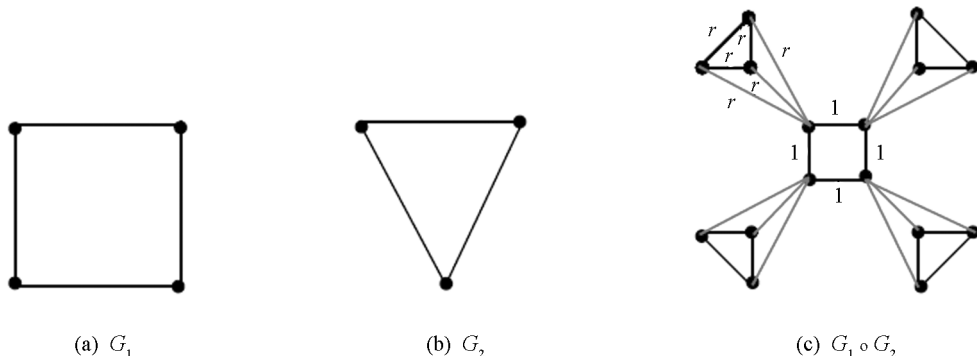


图 1 图 G_1, G_2 及其加权冠图 $G_1 \circ G_2$

1 $G_1 \circ G_2$ 的无符号拉普拉斯谱

设 $R \otimes S$ 表示矩阵 R 和 S 的克罗内克积, 由 $G_1 \circ G_2$ 的定义, 可得 $G_1 \circ G_2$ 的无符号拉普拉斯矩阵为

$$Q(G_1 \circ G_2) = \begin{pmatrix} Q(G_1) + rkI_n & rJ_k \otimes I_n \\ rJ_k^T \otimes I_n & r(Q(G_2) + I_k) \otimes I_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 $Q(G_1)$ 和 $Q(G_2)$ 分别为 G_1 和 G_2 的无符号拉普拉斯矩阵, $J_k = \overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^k$, I_n 是 n 阶单位矩阵. 设 $\sigma(G)$ 表示 G 的无符号拉普拉斯谱, 当 G_2 是正则图时, 首先刻画 $G_1 \circ G_2$ 的无符号拉普拉斯谱.

定理 1 设 G_1 是 n 阶的简单连通图, G_2 是 k 阶的 d -正则图. $\sigma(G_1) = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, $\sigma(G_2) = \{\nu_i \mid \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_k = 2d\}$. 则 $Q(G_1 \circ G_2)$ 的特征值为:

$$(i) \frac{(2d+1+k)r + \theta_i \pm \sqrt{[(2d+1)r - (kr + \theta_i)]^2 + 4kr^2}}{2} \in \sigma(G_1 \circ G_2), \text{ 且重数为 } 1, \text{ 其中 } i =$$

$1, 2, \dots, n$;

(ii) $r(\nu_j + 1) \in \sigma(G_1 \circ G_2)$, 且重数为 n , 其中 $j = 1, 2, \dots, k-1$.

证 设 $X = [X_1^T X_2^T \dots X_{k+1}^T]^T$ 为 $Q(G_1 \circ G_2)$ 的特征值 ξ 对应的特征向量, 其中 $X_i \in \mathbb{R}^n$. 则

$$Q(G_1 \circ G_2)X = \xi X \quad (2)$$

下面我们分两种情形进行讨论.

情形 1 X_1 为非零向量.

由(1)式和(2)式得

$$(Q(G_1) + rkI_n)X_1 + r(X_2 + X_3 + \dots + X_{k+1}) = \xi X_1 \quad (3)$$

和

$$\begin{cases} rX_1 + rE_1(Q(G_2) + I_k) \otimes I_n [X_2 X_3 \dots X_{k+1}]^T = \xi X_2 \\ rX_1 + rE_2(Q(G_2) + I_k) \otimes I_n [X_2 X_3 \dots X_{k+1}]^T = \xi X_3 \\ \vdots \\ rX_1 + rE_k(Q(G_2) + I_k) \otimes I_n [X_2 X_3 \dots X_{k+1}]^T = \xi X_{k+1} \end{cases} \quad (4)$$

其中 $E_i = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, I_n, \overbrace{0, \dots, 0}^{k-i})$.

因为 G_2 是 d -正则图, 则 $Q(G_2)$ 矩阵的每行元素之和为 $2d$. 将(4)式中的所有方程相加, 可得

$$krX_1 + r(2d+1)(X_2 + X_3 + \dots + X_{k+1}) = \xi(X_2 + X_3 + \dots + X_{k+1}) \quad (5)$$

移项得

$$kr\mathbf{X}_1 + ((2d+1)r - \xi)(\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 + \cdots + \mathbf{X}_{k+1}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

由于 $\mathbf{X}_1$ 是非零向量, 我们推出 $(2d+1)r - \xi \neq 0$. 由(3)式和(6)式, 得

$$(\mathbf{Q}(G_1) + rk\mathbf{I}_n)\mathbf{X}_1 + \frac{kr^2}{\xi - (2d+1)r}\mathbf{X}_1 = \xi\mathbf{X}_1 \quad (7)$$

即

$$\mathbf{Q}(G_1)\mathbf{X}_1 = \left(\xi - \frac{kr^2}{\xi - (2d+1)r} - rk \right) \mathbf{X}_1 \quad (8)$$

因此 $\xi - \frac{kr^2}{\xi - (2d+1)r} - rk$ 是 $\mathbf{Q}(G_1)$ 的特征值. 因为 $\sigma(G_1) = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, 故可以得到

$$\xi^2 - ((2d+1)r + kr + \theta_i)\xi - kr^2 + (2d+1)kr^2 + (2d+1)r\theta_i = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

解二次方程(9), 得

$$\xi = \frac{(2d+1+k)r + \theta_i \pm \sqrt{[(2d+1)r - (kr + \theta_i)]^2 + 4kr^2}}{2} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

情形2 $\mathbf{X}_1$ 为零向量.

由(1)式和(2)式得

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (11)$$

和

$$r(\mathbf{Q}(G_2) + \mathbf{I}_k) \otimes \mathbf{I}_n [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3 \cdots \mathbf{X}_{k+1}]^T = \xi [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3 \cdots \mathbf{X}_{k+1}]^T \quad (12)$$

故 $r(2d+1)$ 不是 $\mathbf{Q}(G_1 \circ G_2)$ 的特征值. 如若不然, 假定 $r(2d+1)$ 是 $\mathbf{Q}(G_1 \circ G_2)$ 的特征值, 则 $r(2d+1)$ 对应的特征向量 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_{k+1}]^T$ 满足 $\mathbf{X} = \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{J}_{k+1}$. 因此

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_{k+1} = (k+1)\mathbf{J}_n \quad (13)$$

这与(11)式相矛盾. 所以

$$\xi = r(\nu_j + 1) \quad j=1, 2, \dots, k-1 \quad (14)$$

从(12)式可以看出 $\xi = r(\nu_j + 1)$ 的重数为 n .

2 $G_1 \circ G_2$ 的正规拉普拉斯谱

正规拉普拉斯矩阵和图 G 上的简单随机途径与谱的几何结构密切相关. 给定一个图 G , 令 $\mathbf{P}(G) = \mathbf{D}(G)^{-1}\mathbf{A}(G)$ 表示 G 上的简单随机游动的概率转移矩阵, 则

$$\mathbf{L}(G) = \mathbf{D}(G)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I} - \mathbf{D}(G)^{-1}\mathbf{A}(G))\mathbf{D}(G)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{D}(G)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I} - \mathbf{P}(G))\mathbf{D}(G)^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

设 $\mathbf{L}(G)$ 和 $\mathbf{P}(G)$ 的谱分别为 $\lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_n(G)$ 和 $\mu_1(G), \mu_2(G), \dots, \mu_n(G)$. 其中 $0 = \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G) \leq 2$, $1 = \mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G) \geq -1$. 则

$$\lambda_i(G) = 1 - \mu_i(G) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

有关正规拉普拉斯谱的详细信息可参见文献[11].

设 G_1 和 G_2 分别为 n_1 阶和 n_2 阶正则连通图, 且正则度分别为 r_1 和 r_2 , 则

$$\mathbf{W}(G_1 \circ G_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(G_1) & r\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2} \\ r(\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2})^T & r\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}(G_2) \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{S}(G_1 \circ G_2) = \begin{pmatrix} (r_1 + n_2 r)\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (r_2 + 1)r\mathbf{I}_{n_1 n_2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

由于 G_1 和 G_2 都是正则图, 故

$$\mathbf{P}(G_1) = \frac{1}{r_1}\mathbf{A}(G_1) \quad \mathbf{P}(G_2) = \frac{1}{r_2}\mathbf{A}(G_2)$$

从而

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(G_1 \circ G_2) &= \mathbf{S}(G_1 \circ G_2)^{-1} \mathbf{W}(G_1 \circ G_2) = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 + n_2 r} \mathbf{A}(G_1) & \frac{r}{r_1 + n_2 r} \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2} \\ \frac{1}{r_2 + 1} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2})^T & \frac{1}{r_2 + 1} \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}(G_2) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1 + n_2 r} \mathbf{P}(G_1) & \frac{r}{r_1 + n_2 r} \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2} \\ \frac{1}{r_2 + 1} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2})^T & \frac{r_1}{r_2 + 1} \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{P}(G_2) \end{pmatrix} \quad (19)
 \end{aligned}$$

由(15)式知,在刻画 $G_1 \circ G_2$ 的正规拉普拉斯谱时,首先给出概率转移矩阵 $\mathbf{P}(G_1 \circ G_2)$ 的谱.

定理 2 设 G_1 和 G_2 分别是阶数为 n_1 和 n_2 的正则连通图,正则度分别为 r_1 和 r_2 , $\mathbf{P}(G_1)$ 的谱为 $\mu_1 (= 1), \mu_2, \dots, \mu_{n_1}$, $\mathbf{P}(G_2)$ 的谱为 $\eta_1 (= 1), \eta_2, \dots, \eta_{n_2}$. 则 $\mathbf{P}(G_1 \circ G_2)$ 的谱为:

$$\begin{aligned}
 & \text{(i) } \frac{r_2 \eta_j}{r_2 + 1}, \text{ 且重数为 } n_1, j = 2, \dots, n_2; \\
 & \text{(ii) } \frac{r_2(r_1 + n_2 r) + r_1 \mu_i(r_2 + 1) \pm \alpha_i}{2(r_1 + n_2 r)(r_2 + 1)}, \text{ 且重数为 } 1, i = 1, 2, \dots, n_1, \text{ 其中} \\
 & \alpha_i = \sqrt{[r_2(r_1 + n_2 r) - r_1 \mu_i(r_2 + 1)]^2 + 4r n_2(r_1 + n_2 r)(r_2 + 1)}
 \end{aligned}$$

特别地,当 $\mu_1 = 1$ 时, $\mathbf{P}(G_1 \circ G_2)$ 的两个特征值分别为 1 和 $\frac{r_1 r_2 - n_2 r}{(r_1 + n_2 r)(r_2 + 1)}$.

证 设 $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_{n_2}$ 分别为 $\mathbf{P}(G_2)$ 的属于特征值 $\eta_1 (= 1), \eta_2, \dots, \eta_{n_2}$ 的正交特征向量. 当 $j = 2, 3, \dots, n_2$ 时, $\mathbf{Z}_j \perp \mathbf{J}_{n_2}^T$. 则

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(G_1 \circ G_2) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Z}_j \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1 + n_2 r} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2}) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Z}_j) \\ \frac{r_2}{r_2 + 1} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{P}(G_2)) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Z}_j) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{r_2 \eta_j}{r_2 + 1} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Z}_j) \end{pmatrix} = \frac{r_2 \eta_j}{r_2 + 1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Z}_j \end{pmatrix} \quad (20)
 \end{aligned}$$

设 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{n_1}$ 分别为 $\mathbf{P}(G_1)$ 的属于特征值 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_1}$ 的正交特征向量, 即 $\mathbf{P}(G_1) \mathbf{X}_i = \mu_i \mathbf{X}_i$. 又因 $\mathbf{P}(G_2) \mathbf{J}_{n_2}^T = \mathbf{J}_{n_2}^T$, 故对 $i = 1, 2, \dots, n_1$, 我们有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(G_1 \circ G_2) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_i \\ a \mathbf{X}_i \otimes \mathbf{J}_{n_2}^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1 + n_2 r} \mathbf{P}(G_1) \mathbf{X}_i + \frac{r a n_2}{r_1 + n_2 r} \mathbf{X}_i \\ \frac{1}{r_2 + 1} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{J}_{n_2})^T \mathbf{X}_i + \frac{a r_2}{r_2 + 1} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{P}(G_2)) (\mathbf{X}_i \otimes \mathbf{J}_{n_2}^T) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{r_1 \mu_i}{r_1 + n_2 r} + \frac{r a n_2}{r_1 + n_2 r} \right) \mathbf{X}_i \\ \left(\frac{1}{r_2 + 1} + \frac{a r_2}{r_2 + 1} \right) (\mathbf{X}_i \otimes \mathbf{J}_{n_2}^T) \end{pmatrix} \quad (21)
 \end{aligned}$$

因此,若两个实数 p_i 和 a 满足

$$\frac{r_1 \mu_i}{r_1 + n_2 r} + \frac{r a n_2}{r_1 + n_2 r} = p_i \quad (22)$$

$$\frac{1}{r_2 + 1} + \frac{a r_2}{r_2 + 1} = a p_i \quad (23)$$

则 $\mathbf{P}(G_1 \circ G_2)$ 的属于特征值 p_i 的特征向量为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_i \\ a\mathbf{X}_i \otimes \mathbf{J}_{n_2}^T \end{pmatrix}$$

由(23) 式得

$$a = \frac{1}{p_i(r_2 + 1) - r_2} \quad (24)$$

由(22) 式和(24) 式得

$$p_i = \frac{r_2(r_1 + n_2r) + r_1\mu_i(r_2 + 1) \pm \alpha_i}{2(r_1 + n_2r)(r_2 + 1)} \quad (25)$$

其中

$$\alpha_i = \sqrt{[r_2(r_1 + n_2r) - r_1\mu_i(r_2 + 1)]^2 + 4rn_2(r_1 + n_2r)(r_2 + 1)}$$

若 $p_i(r_2 + 1) - r_2 = 0$, 则 $n_2 = 0$, 那么 $p_i \neq \frac{r_2}{r_2 + 1}$. 因此得到 $\mathbf{P}(G)$ 的 $2n_1$ 个特征值和对应的特征向量.

显然 μ_1 所对应的两个特征值分别为 1 和 $\frac{r_1r_2 - n_2r}{(r_1 + n_2r)(r_2 + 1)}$.

根据定理 2 和(16) 式, 即得出 $G_1 \circ G_2$ 的正规拉普拉斯谱:

定理 3 设 G_1 和 G_2 分别是阶数为 n_1 和 n_2 的正则连通图, 正则度分别为 r_1 和 r_2 , $\mathbf{L}(G_1)$ 的谱为 $\lambda_1 (= 0), \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}$, $\mathbf{L}(G_2)$ 的谱为 $\delta_1 (= 0), \delta_2, \dots, \delta_{n_2}$. 则 $\mathbf{L}(G_1 \circ G_2)$ 的谱为:

- (i) $\frac{r_2\delta_j + 1}{r_2 + 1}$, 且重数为 n_1 , $j = 2, \dots, n_2$;
- (ii) $\frac{(r_2 + 2)n_2r + r_1 + (r_2 + 1)r_1\lambda_i \pm \beta_i}{2(r_1 + n_2r)(r_2 + 1)}$, 且重数为 1, $i = 1, 2, \dots, n_1$, 其中

$$\beta_i = \sqrt{[r_2n_2r - r_1 + r_1\lambda_i(r_2 + 1)]^2 + 4rn_2(r_1 + n_2r)(r_2 + 1)}$$

特别地, 当 $\lambda_1 = 0$ 时, $\mathbf{L}(G_1 \circ G_2)$ 的两个特征值分别为 0 和 $\frac{r_2n_2r + r_1 + 2n_2r}{(r_1 + n_2r)(r_2 + 1)}$.

3 $G^{(m)}$ 的无符号拉普拉斯谱和正规拉普拉斯谱

本节中, 我们将推广加权冠积图得到加权冠图的无符号拉普拉斯谱和正规拉普拉斯谱. 首先, 定义加权冠图^[9] 如下:

定义 2 设 G 是 n 阶的简单连通图, 且每条边的权都为 1, G' 为 G 的复制图. 加权冠图 $G^{(m)}$ 定义为 $G^{(m)} = G^{(m-1)} \circ G'$, 新生成的边的权为 r^m (其中 $m \geq 1$ 是自然数).

例如, 设 $G = K_3$ (3 个顶点的完全图) (图 2(a)), 则加权冠图 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$ 分别如图 2(b) 和 2(c) 所示.

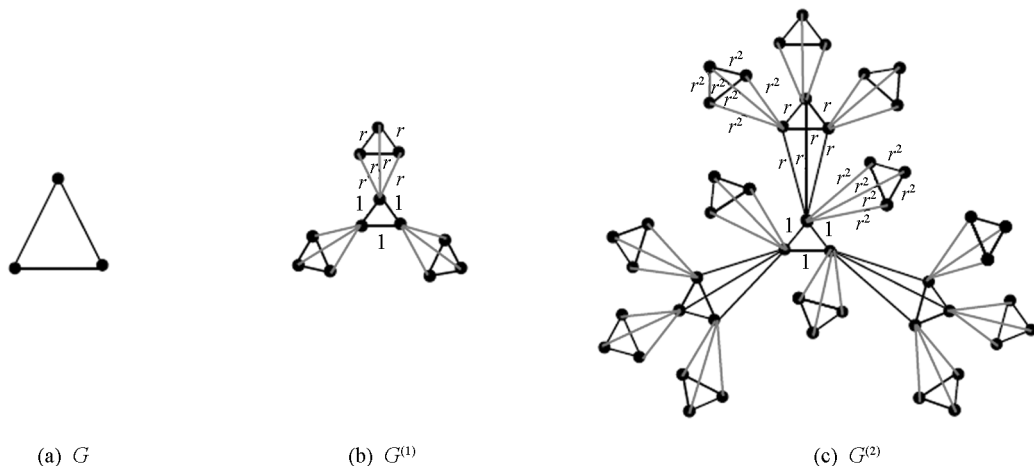


图 2 图 G 及其加权冠图 $G^{(1)}$ 和 $G^{(2)}$

由定理 1, 可以定义函数 $f_j(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f_j(x) = \frac{(2d+1+k)r^j + f_{j-1}(x) \pm \sqrt{((2d+1)r^j - (kr^j + f_{j-1}(x)))^2 + 4kr^{2j}}}{2}$$

其中 $j=1, 2, \dots$, 且 $f_0(x) = x + 1$.

接下来给出当 G 为 d -正则图时, 加权冠图 $G^{(m)}$ 的无符号拉普拉斯谱.

定理 4 设 G 是 n 阶 d -正则图, $\sigma(G) = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, 则

$$\sigma(G^{(m)}) = \{r^{m-j}f_j(\theta_i) \mid 0 \leq j \leq m-1, i=1, 2, \dots, n-1; j=m, i=1, 2, \dots, n\}$$

其中:

$$f_j(x) = \frac{(2d+1+n)r^j + f_{j-1}(x) \pm \sqrt{((2d+1)r^j - (nr^j + f_{j-1}(x)))^2 + 4nr^{2j}}}{2}$$

$j=1, 2, \dots$; $f_0(x) = x + 1$; $r^{m-j}f_j(\theta_i) \in \sigma(G^{(m)})$ 的重数为 $n(n+1)^{m-j-1}$, $0 \leq j \leq m-1$; $f_m(\theta_i) \in \sigma(G^{(m)})$ 的重数为 1.

证 用数学归纳法进行证明.

(i) 当 $m=1$ 时, 设 $G=G_1=G_2$, 由定理 1 立即得结论成立.

(ii) 当 $m=k-1$ 时, 假设结论成立, 即: $f_{k-1}(\theta_i) \in \sigma(G^{(k-1)})$ ($1 \leq i \leq n$) 且重数为 1; $r^{k-j-1}f_j(\theta_i) \in \sigma(G^{(k-1)})$ ($1 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq k-2$) 且重数为 $n(n+1)^{k-j-2}$.

(iii) 当 $m=k$ 时, 由 $G^{(k)} = G^{(k-1)} \circ G$ 及定理 1 可得: $f_k(\theta_i) \in \sigma(G^{(k)})$ ($1 \leq i \leq n$) 且重数为 1; $r^{k-j-1}f_j(\theta_i) \in \sigma(G^{(k)})$ ($1 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq k-1$) 且重数为 $n(n+1)^{k-j-1}$; $r^k(\theta_i + 1) \in \sigma(G^{(k)})$ ($1 \leq i \leq n-1$) 且重数为 $n(n+1)^{k-1}$. 即: $f_k(\theta_i) \in \sigma(G^{(k)})$ ($1 \leq i \leq n$) 且重数为 1; $r^{k-j}f_j(\theta_i) \in \sigma(G^{(k)})$ ($1 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq k$) 且重数为 $n(n+1)^{k-j-1}$.

又由定理 3, 可定义函数 $g_j(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$g_j(x) = \frac{(r_2+2)n_2r^j + r_1 + (r_2+1)r_1g_{j-1}(x) \pm \gamma_i}{2(r_1+n_2r^j)(r_2+1)} \quad j=1, 2, \dots; g_0(x) = \frac{r_2x+1}{r_2+1}$$

其中

$$\gamma_i = \sqrt{[r_2n_2r^j - r_1 + r_1(r_2+1)g_{j-1}(x)]^2 + 4n_2r^j(r_1+n_2r^j)(r_2+1)}$$

最后, 刻画了 G 为 d -正则图时, $G^{(m)}$ 的正规拉普拉斯谱:

定理 5 设 G 是 n 阶 d -正则图, $L(G)$ 的谱为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $L(G^{(m)})$ 的谱为

$$\{r^{m-j}g_j(\lambda_i) \mid 0 \leq j \leq m-1, i=1, 2, \dots, n-1; j=m, i=1, 2, \dots, n\}$$

其中

$$g_j(x) = \frac{(d+2)nr^j + d + (d^2+d)g_{j-1}(x) \pm \sqrt{[dnr^j - d + (d^2+d)g_{j-1}(x)]^2 + 4nr^j(d+nr^j)(d+1)}}{2(d+nr^j)(d+1)}$$

$j=1, 2, \dots$; $g_0(x) = \frac{dx+1}{d+1}$; $r^{m-j}g_j(\lambda_i) \in \sigma(G^{(m)})$ 的重数为 $n(n+1)^{m-j-1}$ ($0 \leq j \leq m-1$); $g_m(\lambda_i) \in \sigma(G^{(m)})$ 的重数为 1.

证 同定理 4.

4 结 语

本文主要研究了加权冠图的无符号拉普拉斯谱和正规拉普拉斯谱. 具体来讲, 刻画了当 G_2 为正则图时, 加权冠积图 $G_1 \circ G_2$ 的无符号拉普拉斯谱, 以及 G_1 和 G_2 都为正则图时, $G_1 \circ G_2$ 的正规拉普拉斯谱. 并借助数学归纳法将关于 $G_1 \circ G_2$ 的结果加以推广, 给出了加权冠图 $G^{(m)}$ 的无符号拉普拉斯谱和正规拉普拉斯谱. 所得结论进一步丰富了图谱理论和加权网络研究方面的成果.

参考文献:

- [1] BARRAT A, BARTHELEMY M, PASTOR-SATORRAS R, et al. The Architecture of Complex Weighted Networks [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2004, 101(11): 3747-3752.
- [2] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [3] KRAUSE A E, FRANK K A, MASON D M, et al. Compartments Revealed in Food-Web Structure [J]. Nature, 2003, 426: 282-285.
- [4] ALBERT R, BARABÁSI A L. Statistical Mechanics of Complex Networks [J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74(1): 47-97.
- [5] BARIK S, PATI S, SARMA B K. The Spectrum of the Corona of Two Graphs [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2007, 21(1): 47-56.
- [6] CHEN H Y, LIAO L W. The Normalized Laplacian Spectra of the Corona and Edge Corona of Two Graphs [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2017, 65(3): 582-592.
- [7] FRUCHT R, HARARY F. On the Corona of Two Graphs [J]. Aequationes Mathematicae, 1970, 4(1-2): 322-325.
- [8] SHARMA R, ADHIKARI B, MISHRA A. Structural and Spectral Properties of Corona Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 427(4): 715-717.
- [9] DAI M F, SHEN J J, DAI L F, et al. Generalized Adjacency and Laplacian Spectra of the Weighted Corona Graphs [J]. Physica A (Statistical Mechanics and Its Applications), 2019, 528: 121285.
- [10] LIU J B, ZHAO J, CAI Z Q. On the Generalized Adjacency, Laplacian and Signless Laplacian Spectra of the Weighted Edge Corona Networks [J]. Physica A (Statistical Mechanics and Its Applications), 2020, 540: 123073.
- [11] CHUNG F R K. Spectral Graph Theory [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996.

Signless Laplacian Spectrum and Normalized Laplacian Spectrum of the Weighted Corona Graphs

WEI Bin, WANG Wei-zhong

School of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: This paper describes the signless Laplacian spectrum of the weighted corona product graph $G_1 \circ G_2$ when G_2 is a regular graph, and the normalized Laplacian spectrum of $G_1 \circ G_2$ when G_1 and G_2 are regular graphs. By means of mathematical induction, the conclusion of the weighted corona product graph $G_1 \circ G_2$ is generalized to the corresponding conclusion of the general weighted corona graphs $G^{(m)}$.

Key words: signless Laplacian spectrum; normalized Laplacian spectrum; weighted corona product graph

责任编辑 廖 坤