DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.08.012

迭代运算使不连续映射变为光滑映射

刘晓华[1]，　罗天琦[2]

1. 乐山师范学院 数理学院，四川 乐山 614000；2. 乐山师范学院 教师教育学院，四川 乐山 614000

摘要：很容易找到一些不连续自映射，它们的迭代是光滑的，表明迭代运算可以使不连续映射变为光滑映射. 为了研究这种变化和避免复杂计算，本文研究在区间(0，1)上只有一个可去间断点的分段 C^1 自映射的二次迭代的 C^1 光滑性，给出了它们的二次迭代是 C^1 光滑映射的充要条件.

关 键 词：迭代；可去间断点；C^1 光滑；分段光滑

中图分类号：O174　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673－9868(2021)08－0084－09

设 E 是非空集，对于固定的整数 $n>0$ 和所有的 $x\in E$，映射 $f: E\longrightarrow E$ 的 n 次迭代被定义为 $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ 和 $f^0(x)=x$.

迭代运算是数学中的重要运算之一，它在许多复杂的问题，如分岔、混沌和分形[1-3] 问题、多项式[4-8]、拟多项式[9-10]、线性分式[11] 和有理函数[12] 等问题中有广泛的应用. 在一维的情况下，高次迭代的计算也是一项复杂的工作. 随着 C^0 映射迭代理论的发展[13-14]，人们也逐渐开始研究不连续映射或者集值映射等“坏映射”的迭代和它们的迭代根[15-18].

通常，人们认为一个“坏映射”可能会通过迭代运算变得更加复杂，但文献[19] 表明不连续的自映射通过迭代运算可能变为连续的自映射，并给出了在紧区间上只有一个间断点的分段 C^0 自映射的二次迭代连续性的充要条件. 文献[20] 进一步研究了在紧区间上只有一个非光滑点的连续自映射二次迭代的光滑性，并给出了它们的二次迭代是 C^1 光滑映射的充要条件. 文献[20] 的工作不是对文献[19] 的工作的重复，因为文献[20] 所考虑的映射的导数可能不是自映射. 综合文献[19-20]，我们可以判断在紧区间上只有一个间断点的分段 C^1 自映射四次迭代的 C^1 光滑性. 但是我们还不能判断：在紧区间上什么不连续的自映射的二次迭代不仅连续而且 C^1 光滑？ 例如，自映射

$$f(x)=\begin{cases}-\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{16} & 0<x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{8} & x=\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

收稿日期：2021－03－17
基金项目：四川省教育厅重点科研基金项目(18ZA0242)；乐山师范学院重点项目(LZD014).
作者简介：刘晓华，教授，主要从事映射迭代与迭代根的研究.
通信作者：罗天琦，副教授.

它有一个可去间断点 $x_0=\dfrac{1}{2}$(图 1)，但它的二次迭代

$$f^2(x)=\begin{cases}-\left[\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{3}{16}\right]^2+\dfrac{7}{16} & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{27}{64} & x=\dfrac{1}{2}\\ -\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{8}\right)^2+\dfrac{7}{16} & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

在(0，1) 上是 C^1 光滑的(图 2).

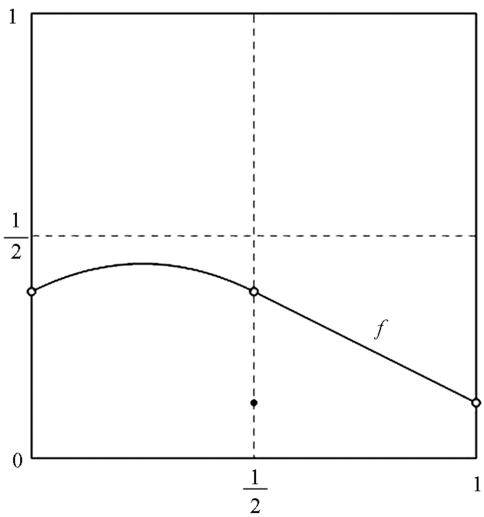

图 1　f 有一个可去间断点 $x_0=\dfrac{1}{2}$

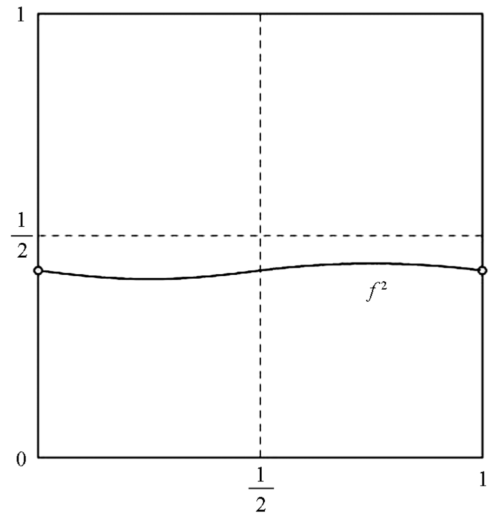

图 2　f^2 在(0，1) 上是 C^1 光滑的

本文研究在区间 $I=(0,1)$ 上只有一个可去间断点的所有分段 C^1 自映射 $V_r(I,I)$. 每个 $f\in V_r(I,I)$ 能被表示为

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\in I_1=(0,x_0)\\ c & x=x_0\\ f_2(x) & x\in I_2=(x_0,1)\end{cases}\tag{1}$$

其中，$x_0\in(0,1)$ 是 f 唯一的可去间断点，f_1 和 f_2 分别在 I_1 和 I_2 上是 C^1 光滑的，$c\in(0,1)$ 是一个常数. 为了研究在 $V_r(I,I)$ 中映射的二次迭代的光滑性，我们需要将 $V_r(I,I)$ 分成一些子类，即 $V_r(I,I)=V_{rr}(I,I)\cup V_{rj}(I,I)\cup V_{ro}(I,I)\cup V_{r\infty}(I,I)$，其中：

$f\in V_{rr}(I,I)$ 表示 $f\in V_r(I,I)$，且导数 f' 有一个可去间断点 x_0，也就是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)$ 存在并相等；

$f\in V_{rj}(I,I)$ 表示 $f\in V_r(I,I)$，且导数 f' 有一个跳跃间断点 x_0，也就是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)$ 存在但是不相等；

$f\in V_{ro}(I,I)$ 表示 $f\in V_r(I,I)$，且导数 f' 有一个振荡间断点 x_0，也就是 f_1' 和 f_2' 两者都有界，但是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)$ 中至少有一个不存在；

$f\in V_{r\infty}(I,I)$ 表示 $f\in V_r(I,I)$，且导数 f' 有一个无穷间断点 x_0，也就是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)=\infty$，或者 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2'(x)=\infty$.

本文讨论 $V_r(I,I)$ 中映射的二次迭代的 C^1 光滑性. 首先给出了在 $V_{r\tau}(I,I)$ 中映射的二次迭代是 C^1 光滑映射的充要条件, 其中 $\tau\in\{r,j,o\}$, 获得了在 $V_{r\infty}(I,I)$ 中映射的二次迭代是 C^1 光滑映射的必要条件. 其次说明了找 $V_{r\infty}(I,I)$ 中映射的二次迭代是 C^1 光滑映射的充分条件的困难. 最后用例子展示了在 $V_r(I,I)$ 中映射的二次迭代是 C^1 光滑映射的条件.

下面讨论由(1)式定义的 $f\in V_r(I,I)$ 的二次迭代的光滑性. 记

$$y_0=\lim_{x\to x_0^-}f_1(x)=\lim_{x\to x_0^+}f_2(x)\neq f(x_0)=c \tag{2}$$

为了方便, 记

$$\Gamma(c)=\begin{cases}f_1(c) & c\in I_1\\ f_2(c) & c\in I_2\end{cases}$$

$$C_{rr}(I,I)=\{f\in V_{rr}(I,I)\mid f(y_0)=\Gamma(c)\}$$

$$C_{r\tau}(I,I)=\{f\in V_{r\tau}(I,I)\mid f(y_0)=\Gamma(c)\text{ 和 }f'(y_0)=0\}\qquad \tau\in\{j,o,\infty\}$$

我们用 D_+f 和 D_-f 分别表示 f 的右导数和 f 的左导数.

定理1 假定 $f\in V_{r\tau}(I,I)$ 由(1)式定义, 其中 $\tau\in\{r,j,o\}$, 且 f 有唯一的间断点 $x_0\in(0,1)$. 令 y_0 由(2)式定义. 那么, f^2 在 I 上是 C^1 光滑的当且仅当 $y_0\in I_i$, $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_i$ 成立($i=1,2$)和 $f\in C_{r\tau}(I,I)$.

证 首先证明必要性. 假定 f^2 在 I 上是 C^1 光滑的, 那么 f^2 在 I 上是连续的. 由文献[19]的定理1知, $y_0\in I_i$, $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_i$ 和

$$f(y_0)=f_i(y_0)=\Gamma(c) \tag{3}$$

其中 $i=1,2$. 在下文中, 我们只讨论 $y_0\in I_1$ 和 $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_1$ 的情况, 因为 $y_0\in I_2$ 和 $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_2$ 情况的讨论与 $y_0\in I_1$ 和 $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_1$ 情况的讨论是完全类似的. 下证在 $y_0\in I_1$ 和 $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_1$ 的情况下, 有

$$f^2(x)=\begin{cases}f_1(f_1(x)) & x\in I_1\\ f_1(f_2(x)) & x\in I_2\end{cases} \tag{4}$$

假设 $f\in V_{r\tau}(I,I)$, 其中 $\tau\in\{r,j,o\}$.

情形1 $f\in V_{rr}(I,I)$. 由(3)式和 $C_{rr}(I,I)$ 的定义, 我们知道 $f\in C_{rr}(I,I)$.

情形2 $f\in V_{rj}(I,I)$. 由 $V_{rj}(I,I)$ 的定义, 我们有

$$\lim_{x\to x_0^-}f_1(x)=\lim_{x\to x_0^+}f_2(x)=y_0$$

$$\overline{y}_1=\lim_{x\to x_0^-}f_1'(x)\neq\overline{y}_2=\lim_{x\to x_0^+}f_2'(x)$$

由(4)式得到 f^2 在 x_0 的左导数和右导数分别为

$$D_-f^2(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f_1'(f_1(x))f_1'(x)=f_1'(y_0)\overline{y}_1 \tag{5}$$

$$D_+f^2(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f_1'(f_2(x))f_2'(x)=f_1'(y_0)\overline{y}_2 \tag{6}$$

因为 f^2 在 I 上是 C^1 光滑的, 所以 $D_-f^2(x_0)=D_+f^2(x_0)$. 注意到 $\overline{y}_1\neq\overline{y}_2$. 由(5)式和(6)式得到 $f_1'(y_0)=0$. 再由 $y_0\in I_1$, 有

$$f'(y_0)=f_1'(y_0)=0 \tag{7}$$

由(3),(7)式和 $C_{rj}(I,I)$ 的定义, 我们知道 $f\in C_{rj}(I,I)$.

情形3 $f\in V_{ro}(I,I)$. 由 $V_{ro}(I,I)$ 的定义, 有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f_2(x)=y_0$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1'(x)$ 和

$\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$ 中至少有一个不存在．由(4) 式得到 f^2 在 x_0 的左导数和右导数分别为

$$D_- f^2(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f_1'(f_1(x))f_1'(x) \tag{8}$$

$$D_+ f^2(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f_1'(f_2(x))f_2'(x) \tag{9}$$

注意到

$$\lim_{x\to x_0^-} f_1'(f_1(x))=\lim_{x\to x_0^+} f_1'(f_2(x))=f_1'(y_0)$$

因为 f^2 在 I 上是 C^1 光滑的，所以 f^2 在 x_0 的左导数 $D_- f^2(x_0)$ 和右导数 $D_+ f^2(x_0)$ 都存在．因此(7) 式成立．反证法，假设(7) 式不成立，我们有 $f'(y_0)=f_1'(y_0)\neq 0$，由(8) 式和(9) 式得到 $\lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$ 都存在．因为

$$\lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f_1'(f_1(x))f_1'(x)}{f_1'(f_1(x))}=\frac{D_- f^2(x_0)}{f_1'(y_0)}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f_1'(f_2(x))f_2'(x)}{f_1'(f_2(x))}=\frac{D_+ f^2(x_0)}{f_1'(y_0)}$$

这与 $\lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$ 中至少有一个不存在相矛盾．因此(7) 式成立．由(3),(7) 式和 $C_{ro}(I,I)$ 的定义，我们知道 $f\in C_{ro}(I,I)$．于是，必要性得证．

其次证明充分性．我们仅证明 $y_0\in I_1$，$f(I_1\cup I_2)\subseteq I_1$ 的情况．

如果 $f(I_1\cup I_2)\subseteq I_1$，则(4) 式成立．因为 f_1 和 f_2 分别在 I_1 和 I_2 上是 C^1 光滑的，所以 f^2 在 $I_1\cup I_2$ 上是 C^1 光滑的．因为 $y_0\in I_1$，所以 $f(y_0)=f_1(y_0)$，$f'(y_0)=f_1'(y_0)$．由于 $f\in C_{r\tau}(I,I)$，其中 $\tau\in\{r,j,o\}$，所以分 3 种情况讨论：

当 $f\in C_{rr}(I,I)$ 时，由 $C_{rr}(I,I)$ 的定义有 $f(y_0)=f_1(y_0)=\Gamma(c)$ 和 $f\in V_{rr}(I,I)$．由文献[19]的定理 1 知 f^2 在 I 上是连续的．因为 $f\in V_{rr}(I,I)$，则

$$\overline{y}_1=\lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)=\overline{y}_2=\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$$

由(4) 式能获得(5) 式和(6) 式，则 $D_- f^2(x_0)=D_+ f^2(x_0)$．因此，$f^2$ 在 I 上是 C^1 光滑的．

当 $f\in C_{rj}(I,I)$ 时，由 $C_{rj}(I,I)$ 的定义，我们有 $f(y_0)=f_1(y_0)=\Gamma(c)$，$f\in V_{rj}(I,I)$ 和 $f'(y_0)=f_1'(y_0)=0$．类似地，我们知道 f^2 在 I 上是连续的．因为 $f\in V_{rj}(I,I)$，则 $\lim_{x\to x_0^-} f_1(x)=\lim_{x\to x_0^+} f_2(x)=y_0$，$\overline{y}_1=\lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)\neq\overline{y}_2=\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$．由(4) 式能获得(5) 式和(6) 式，假设 $f_1'(y_0)=0$，得到 $D_- f^2(x_0)=D_+ f^2(x_0)=0$．因此，$f^2$ 在 I 上是 C^1 光滑的．

当 $f\in C_{ro}(I,I)$ 时，由 $C_{ro}(I,I)$ 的定义有 $f(y_0)=f_1(y_0)=\Gamma(c)$，$f\in V_{ro}(I,I)$ 和 $f'(y_0)=f_1'(y_0)=0$．类似地得到 f^2 在 I 上是连续的．因为 $f\in V_{ro}(I,I)$，则 $\lim_{x\to x_0^-} f_1(x)=\lim_{x\to x_0^+} f_2(x)=y_0$，且 $\lim_{x\to x_0^-} f_1'(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^+} f_2'(x)$ 中至少有一个不存在，但是 f_1' 和 f_2' 都有界．由(4) 式能得到(8) 式和(9) 式，由假设 $f_1'(y_0)=0$，有

$$\lim_{x\to x_0^-} f_1'(f_1(x))=\lim_{x\to x_0^+} f_1'(f_2(x))=f_1'(y_0)=0$$

因为 f_1' 和 f_2' 都有界，结合(8),(9) 式和无穷小量的性质，得到 $D_- f^2(x_0)=D_+ f^2(x_0)=0$．

综上所述，f^2 在 I 上是 C^1 光滑的．

定理 2 假定 $f \in V_{r\infty}(I, I)$ 由(1)式定义，$x_0 \in (0, 1)$ 是 f 的唯一间断点. 令 y_0 由(2)式定义. 假设 f^2 在 I 上是 C^1 光滑的，则 $y_0 \in I_i$，$f(I_1 \cup I_2) \subseteq I_i (i=1,2)$，且 $f \in C_{r\infty}(I, I)$.

证 证明方法与定理 1 中 $f \in V_{r0}(I, I)$ 的必要性的证明完全类似.

注 1 定理 2 没有给出 f^2 在 I 上是 C^1 光滑映射的充分条件，因为我们不能确定 f^2 在 x_0 的左导数 $D_- f^2(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f_i'(f_1(x)) f_1'(x)$ 或者右导数 $D_+ f^2(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f_i'(f_2(x)) f_2'(x)$ 的存在性，其中 $i = 1,2$. 事实上，如果 $y_0 \in I_1$，$f(I_1 \cup I_2) \subseteq I_1$ 和 $f \in C_{r\infty}(I, I)$，与定理 1 类似的讨论可得到(8)式和(9)式. 又因为 $f \in C_{r\infty}(I, I)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f_1'(f_1(x)) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f_1'(f_2(x)) = f_1'(y_0) = f'(y_0) = 0$，且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f_1'(x) = \infty$ 或者 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f_2'(x) = \infty$. 由(8)式和(9)式，我们无法确定 $D_- f^2(x_0)$ 或者 $D_+ f^2(x_0)$ 的存在性. 类似地，对另一种情形，我们也无法确定 $D_- f^2(x_0)$ 或者 $D_+ f^2(x_0)$ 的存在性.

例 1 考虑映射 $f: (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} -\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{16} & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{8} & x = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

有唯一的可去间断点 $x_0 = \dfrac{1}{2}$(图 1)，因为

$$y_0 = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \frac{3}{8} \neq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\bar{y}_1 = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f_1'(x) = \bar{y}_2 = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f_2'(x) = -\frac{1}{2}$$

其中

$$f_1(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \qquad f_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$$

则 $f \in V_{rr}(I, I)$. 注意到 $I_1 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，$I_2 = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. 容易验证 $c = \dfrac{1}{8} \in I_1$，$y_0 \in I_1$，$f(I_1 \cup I_2) \subseteq I_1$，而且 $f(y_0) = f_1(y_0) = f_1(c)$，即 $f \in C_{rr}(I, I)$. 这说明定理 1 的假设条件满足. 另外，我们能算出 f 的二次迭代 f^2 在(0, 1)上是 C^1 光滑的(图 2).

例 2 考虑映射 $F_1: (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} -x + 1 & 0 < x < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{12} & x = \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{9}{4}\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{11}{12} & \dfrac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

它有唯一的可去间断点 $x_0 = \dfrac{1}{3}$(图 3)，因为

$$y_0 = \lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} F_1(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} F_1(x) = \frac{2}{3} \neq F_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\bar{y}_1=\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-}f'_1(x)=-1\neq\bar{y}_2=\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}f'_2(x)=\frac{3}{2}$$

其中

$$f_1(x)=-x+1\qquad f_2(x)=-\frac{9}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{12}$$

则 $F_1\in V_{rj}(I,I)$. 注意到 $I_1=\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$I_2=\left(\frac{1}{3},1\right)$. 容易验证 $c=\frac{1}{12}\in I_1$，$y_0\in I_2$，$F_1(I_1\cup I_2)\subseteq I_2$，而且 $F_1(y_0)=f_2(y_0)=f_1(c)$ 和 $F'_1(y_0)=f'_2(y_0)=0$，即 $F_1\in C_{rj}(I,I)$. 这说明定理 1 的假设条件满足. 另外，我们能算出 F_1 的二次迭代为

$$F_1^2(x)=\begin{cases}-\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{12} & 0<x<\frac{1}{3}\\ \frac{11}{12} & x=\frac{1}{3}\\ -\frac{9}{64}\left[9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-1\right]^2+\frac{11}{12} & \frac{1}{3}<x<1\end{cases}$$

它在(0，1) 上是 C^1 光滑的(图 4).

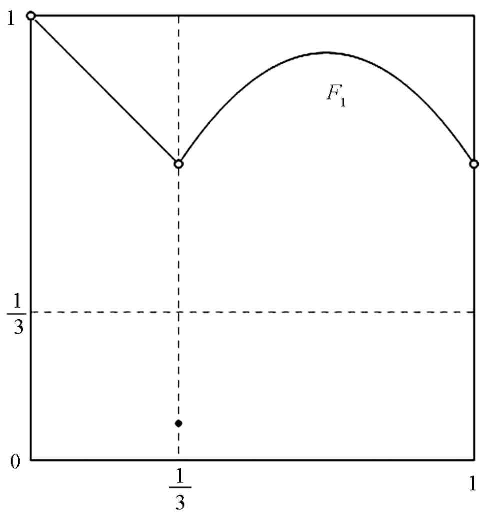

图 3　F_1 有唯一可去间断点 $x_0=\frac{1}{3}$

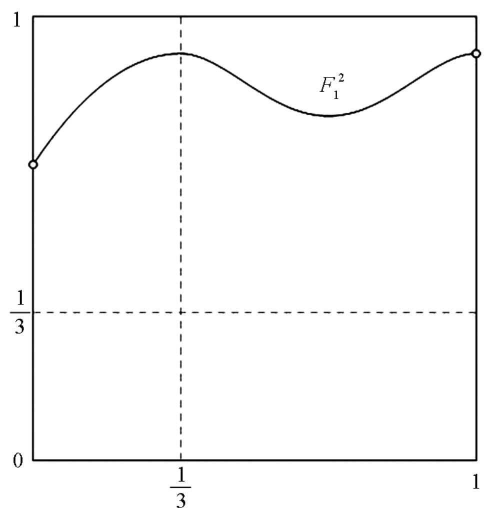

图 4　F_1^2 在(0，1) 上是 C^1 光滑的

例 3　考虑映射 F_2：(0，1) ⟶ (0，1)：

$$F_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 0<x\leqslant\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\sin^2\frac{\pi}{6\left(\frac{1}{2}-x\right)} & \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & x=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cos^2\frac{1}{x-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

它有唯一的可去间断点 $x_0=\dfrac{1}{2}$(图 5)，因为

$$y_0=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}F_2(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}F_2(x)=\frac{1}{3}\neq F_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

而且

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}f_1'(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\left[-2\left(\frac{1}{2}-x\right)\sin^2\frac{\pi}{6\left(\frac{1}{2}-x\right)}+\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3\left(\frac{1}{2}-x\right)}\right]$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f_2'(x)=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\cos^2\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\sin\frac{2}{x-\frac{1}{2}}\right]$$

都不存在，但是 f_1' 和 f_2' 都有界，其中

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0<x\leqslant\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2\sin^2\dfrac{\pi}{6\left(\frac{1}{2}-x\right)} & \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cos^2\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

则 $F_2\in V_{ro}(I, I)$. 注意到

$$I_1=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\qquad I_2=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$$

容易验证 $c=\dfrac{1}{4}\in I_1$，$y_0\in I_1$，$F_2(I_1\cup I_2)\subseteq I_1$，而且 $F_2(y_0)=f_1(y_0)=f_1(c)$ 和 $F_2'(y_0)=f_1'(y_0)=0$，即 $F_2\in C_{ro}(I, I)$. 这说明定理 1 的假设条件满足. 另外，我们能算出 F_2 的二次迭代为

$$F_2^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0<x\leqslant\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{1}{3}+\left[\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2\sin^2\dfrac{\pi}{6\left(\frac{1}{2}-x\right)}\right]^2\sin^2\dfrac{\pi}{6\left[\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\sin^2\frac{\pi}{6\left(\frac{1}{2}-x\right)}\right]} & \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{3} & x=\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{36}\left[1-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\cos^2\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}\right]^2\sin^2\dfrac{\pi}{\left[1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cos^2\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right]}, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

它在 $(0, 1)$ 上是 C^1 光滑的(图 6).

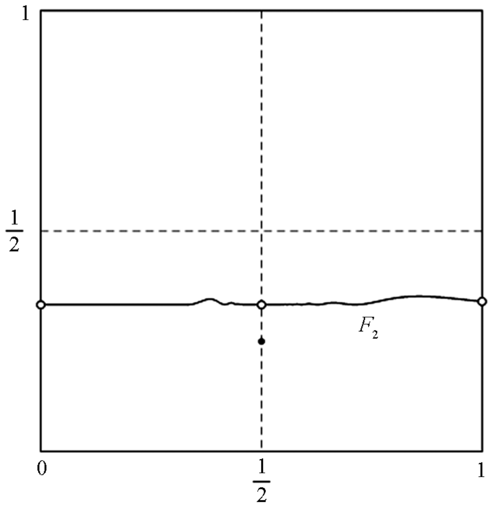

图 5　F_2 有唯一的可去间断点 $x_0=\frac{1}{2}$

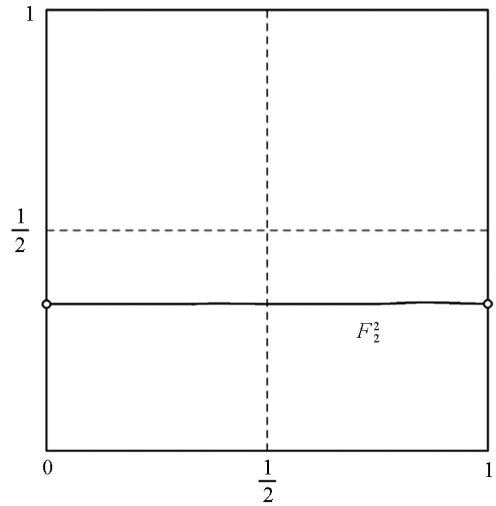

图 6　F_2^2 在 $(0,1)$ 上是 C^1 光滑的

注 2　如果 $\overline{I}=[0,1]$ 是一个闭区间，我们研究

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(0) & x\in(-1,0] \\ f(x) & x\in[0,1] \\ f(1) & x\in[1,2) \end{cases}$$

其中 $f'_+(0)=f'_-(1)=0$. 显然，$\hat{f}\in V_r(I,I)$ 但 $f\in V_r(\overline{I},\overline{I})$.

在这篇文章中，我们仅考虑了(1)式定义的映射唯一的间断点是可去间断点的情形，对(1)式定义的映射唯一间断点是跳跃或者振荡间断点的情形，我们将在后续文章中加以研究.

参考文献：

[1] LESMOIR-GORDON N，ROOD W，EDNEY R. Introducing Fractal Geometry [M]. Cambridge：Icon Books，2006.

[2] LESMOIR-GORDON N. The Colours of Infinity：the Beauty and Power of Fractals [M]. New York：Springer，2010.

[3] MANDELBROT B B. Fractals and Chaos：the Mandelbrot Set and Beyond [M]. New York：Springer，2004.

[4] BAKER I N. The Iteration of Polynomials and Transcendental Entire Functions [J]. J Austral Math Soc，1981，30(4)：483-495.

[5] BHATTACHARYYA P，ARUMARAJ Y E. On the Iteration of Polynomials of Degree 4 with Real Coefficients [J]. Ann Acad Sci Fenn Math，1981，6(2)：197-203.

[6] BRANNER B，HUBBARD J H. The Iteration of Cubic Polynomials I [J]. Acta Math，1988，160：143-206.

[7] BRANNER B，HUBBARD J H. The Iteration of Cubic Polynomials II [J]. Acta Math，1992，169：229-325.

[8] YU Z H，YANG L，ZHANG W N. Discussion on Polynomials Having Polynomial Iterative Roots [J]. J Symbolic Comput，2012，47(10)：1154-1162.

[9] 孙道椿. 拟二次多项式的迭代 [J]. 数学杂志，2004，24(3)：237-240.

[10] 吴昭君，孙道椿. 拟多项式的迭代 [J]. 数学物理学报，2006，26(4)：493-497.

[11] 许　璐，许绍元. 关于线性分式函数的 n 次迭代及其应用 [J]. 数学的实践与认识，2006，36(6)：225-228.

[12] LIU X H，YU Z H，ZHANG W N. Conjugation of Rational Functions to Power Functions and Applications to Iteration [J]. Results Math，2018，73(1)：1-21.

[13] KUCZMA M，CHOCZEWSKI B，GER R. Iterative Functional Equations [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1990.

[14] TARGONSKI G. Topics in Iteration Theory [M]. Götingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1981.

[15] JARCZYK W, POWIERZA T. On the Smallest Set-Valued Iterative Roots of Bijections [J]. Int J Bifur Chaos, 2003, 13(7): 1889-1893.

[16] JARCZYK W, ZHANG W N. Also Set-Valued Functions Do Not Like Iterative Roots [J]. Elemente Math, 2007, 62(2): 73-80.

[17] POWIERZA T. Set-Valued Iterative Square Roots of Bijections [J]. Bull Pol Acad, 1999, 47: 377-383.

[18] POWIERZA T. On Functions with Weak Iterative Roots [J]. Aequationes Math, 2002, 63(1-2): 103-109.

[19] LIU X H, LIU L, ZHANG W N. Discontinuous Function with Continuous Second Iterate [J]. Aequat Math, 2014, 88(3): 243-266.

[20] LIU X H, LIU L, ZHANG W N. Smoothness Repaired by Iteration [J]. Aequat Math, 2015, 89(3): 829-848.

Iteration Changes Discontinuous Mappings Into Smooth Mappings

LIU Xiao-hua[1], LUO Tian-qi[2]

1. School of Mathematics and Physics, Leshan Normal University, Leshan Sichuan 614000, China;

2. School of Teacher Education, Leshan Normal University, Leshan Sichuan 614000, China

Abstract: It is easy to find some discontinuous self-mappings whose iterates are smooth mappings, suggesting that iteration can change discontinuous mappings into smooth mappings. In order to research this change and avoid complicated computation, in this paper we investigate C^1 smoothness of the second order iterates of piecewise C^1 self-mappings on the compact interval (0, 1), each of which has only one removable discontinuity. The necessary and sufficient conditions under which the second order iterates are C^1 smooth mappings are given.

Key words: iteration; removable discontinuity; C^1 smooth; piecewise smooth

责任编辑 廖 坤