DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.09.006

Banach 空间中线性斜积三参数半流的指数渐近行为

岳 田[1], 宋晓秋[2]

1. 湖北汽车工业学院 理学院,湖北 十堰 442002;2. 中国矿业大学 数学学院,江苏 徐州 221116

摘要: 主要研究 Banach 空间中线性斜积三参数半流一致指数稳定性与一致指数不稳定性的 Datko 型定理. 借助 Datko-Pazy 方法得到了若干新的刻画线性斜积三参数半流一致指数渐近行为的充要条件. 所得结果推广和完善了指数稳定性理论中一些已有结果.

关 键 词: 斜积三参数半流;指数稳定性;Datko 定理

中图分类号: O175.24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2021)09-0047-07

Exponential Asymptotic Behaviors of Linear Skew-Product Three-Parameter Semiflows in Banach Spaces

YUE Tian[1], SONG Xiaoqiu[2]

1. *School of Science, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan Hubei 442002, China;*
2. *School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221116, China*

Abstract: The aim of this paper is to study the Datko's theorems for the uniform exponential stability and the uniform exponential instability of linear skew-product three-parameter semiflows in Banach spaces. The necessary and sufficient conditions for the uniform exponential asymptotic behaviors are obtained via the Datko-Pazy method. The conclusions obtained are generalizations of the well-known results in exponential stability theory.

Key words: skew-product three-parameter semiflow; exponential stability; Datko theorem

近年来关于微分系统定性理论的研究取得了突破性的进展,尤其是在指数渐近行为(指数稳定、指数不稳定等)方面. 大量公开问题的解决,使得相关理论不断拓展和完善[1-14]. 在讨论无限维空间中由自治微分方程所生成的动力系统的不变流形的线性化问题时,将会经常使用斜积(半)流这个概念,如经典的

收稿日期:2019-10-31

基金项目:国家自然科学基金项目(11502075);教育部产学合作协同育人项目(202002177010,202101301022);湖北汽车工业学院博士科研启动基金(BK201805).

作者简介:岳 田,讲师,主要从事微分系统定性理论研究.

Navier-Stokes,Taylor-Couette,Bubnov-Galerkin 方程都可用半流上的斜积(半)流作为渐近化模型. 故作为单参数算子半群[1-2]、演化族(又称演化过程或演化算子)[3-5]、线性斜积(双参数)半流[7-10]的推广，由 Preda 等学者于 2011 年引入的线性斜积三参数半流[11-13]成为了刻画微分系统渐近行为的一类重要工具. 文献[11]基于一致的视角，借助“输入-输出”方法(又称 Perron 方法或测试函数方法)得到了线性斜积三参数半流一致指数稳定的 Perron 型结论；文献[12]借助 Datko-Pazy 方法，讨论了线性斜积三参数半流一致指数稳定的 Datko 型条件，所得结果将经典的双参数演化族一致指数稳定的 Datko 型定理推广到了线性斜积三参数半流情形，同时该文还给出了所得结论在一致指数不稳定下的变形；文献[13]基于 Perron 技术，借助离散时间方法，通过讨论线性斜积三参数半流关于序列空间对($l^p(X)$, $l^q(X)$)的容许性，得到了连续时间斜积三参数半流一致指数稳定的若干充要条件.

受到文献[12]的启发，本文将借助 Datko-Pazy 方法分别建立若干新的刻画 Banach 空间中线性斜积三参数半流一致指数稳定与一致指数不稳定的 Datko 型定理，所得结果将一些双参数演化族或斜积半流的指数稳定性结果推广到了线性斜积三参数半流[5-8,10].

1 预备知识

设(Θ, d)为一度量空间，X 是一个 Banach 空间，将空间 X 上的范数及作用其上面的有界线性算子全体 $\mathscr{B}(X)$ 上的范数记作 $\|\cdot\|$. 记 $\Delta=\{(t, t_0)\in\mathbb{R}^2: t\geqslant t_0\geqslant 0\}$，$I$ 为恒等算子.

定义 1[11-13] 称 $\sigma: \Theta\times\Delta\longrightarrow\Theta$ 为三参数(非)线性半流，如果满足如下 2 条性质：

(i) $\sigma(\theta, t, t)=\theta$, $\forall(t, \theta)\in\mathbb{R}_+\times\Theta$；

(ii) $\sigma(\sigma(\theta, s, t_0), t, s)=\sigma(\theta, t, t_0)$, $\forall(t, s),(s, t_0)\in\Delta$, $\forall\theta\in\Theta$.

此外，若 $(\theta, t, t_0)\longmapsto\sigma(\theta, t, t_0)$ 连续，则称 σ 为 Θ 上的连续三参数(非)线性半流.

定义 2[11-13] 称 $\pi=(\phi, \sigma)$ 为 X 上的线性斜积三参数半流，如果 $\phi: \Theta\times\Delta\longrightarrow\mathscr{B}(X)$ 满足如下 4 条性质：

(i) $\phi(\theta, t, t)=I$, $\forall(t, \theta)\in\mathbb{R}_+\times\Theta$；

(ii) $\phi(\sigma(\theta, s, t_0), t, s)\phi(\theta, s, t_0)=\phi(\theta, t, t_0)$, $\forall(t, s),(s, t_0)\in\Delta$, $\forall\theta\in\Theta$；

(iii) $t\longmapsto\phi(\theta, t, t_0)x: [t_0, \infty)\longrightarrow X$ 与 $\tau\longmapsto\phi(\theta, t, \tau)x: [0, t]\longrightarrow X$ 均连续；

(iv) 存在常数 $M, \omega\in\mathbb{R}$, $M\geqslant 1$，使得对 $\forall(\theta, t, t_0)\in\Theta\times\Delta$，有 $\|\phi(\theta, t, t_0)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega(t-t_0)}$.

定义 3[11-13] 称线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 为一致指数稳定的，如果存在常数 $N\geqslant 1$, $v>0$ 使得对 $\forall(t, t_0, \theta, x)\in\Delta\times\Theta\times X$，有

$$\|\phi(\theta, t, t_0)x\|\leqslant N\mathrm{e}^{-v(t-t_0)}\|x\| \tag{1}$$

定义 4[12] 称线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 为一致指数不稳定的，如果存在常数 $N\geqslant 1$, $v>0$ 使得对 $\forall(t, t_0, \theta, x)\in\Delta\times\Theta\times X$，有

$$\|\phi(\theta, t, t_0)x\|\geqslant N\mathrm{e}^{v(t-t_0)}\|x\| \tag{2}$$

引理 1[12] 线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在 $c\in(0, 1)$ 和 $h>0$，使得对每个 $t_0\geqslant 0$, $\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$ 存在 $u\in(0, h]$(u 依赖于 t_0, θ 和 x)，满足

$$\|\phi(\theta, t_0+u, t_0)x\|\leqslant c\|x\| \tag{3}$$

引理 2[12] 线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在 $c\geqslant 1$ 和 $h>0$，使得对每个 $t_0\geqslant 0$, $\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$ 存在 $u\in(0, h]$(u 依赖于 t_0, θ 和 x)，满足

$$\|\phi(\theta, t_0+u, t_0)x\|\geqslant c\|x\| \tag{4}$$

2 主要结论

定理 1 若 $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 是两个非减函数满足

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\lim_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$$

且对所有的 $\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$，有

$$\sup_{t>0}\sup_{t_0\geqslant 0}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(\psi(u)\,\|\phi(\theta,t_0+u,t_0)x\|)\mathrm{d}u<\infty \tag{5}$$

则线性斜积三参数半流 $\pi=(\Phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的.

证　采用反证法. 若线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 不是一致指数稳定的，则引理 1 中式(3) 不成立. 这意味着对任意 $c\in(0,1)$ 和 $h>0$，存在 $t_0\geqslant 0$，$\theta_0\in\Theta$ 以及 $x_0\in X$，$\|x_0\|=1$ 使得对所有的 $u\in(0,h]$ 有

$$\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|>c\,\|x_0\|=c$$

从而结合式(5) 可得，对所有的 $h>0$ 有

$$\begin{aligned}H=&\sup_{t>0}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(\psi(u)\,\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|)\mathrm{d}u\geqslant\\&\sup_{t\in(0,h]}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(c\psi(u))\mathrm{d}u\geqslant\\&\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(c\psi(u))\mathrm{d}u\end{aligned}$$

故由洛必达法则可得

$$H\geqslant\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(c\psi(u))\mathrm{d}u=\lim_{h\to\infty}\varphi(c\psi(h))=\infty$$

该矛盾说明式(3) 成立，从而借助引理 1 可得 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的.

推论 1　若非减函数 $\varphi:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$$

则线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在 $\alpha,\beta>0$，使得对所有 $\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$，有

$$\sup_{t>0}\sup_{t_0\geqslant 0}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(\mathrm{e}^{\alpha u}\,\|\phi(\theta,t_0+u,t_0)x\|)\mathrm{d}u\leqslant\varphi(\beta\,\|x\|) \tag{6}$$

证　由定理 1 可知充分性显然，下证必要性. 由于 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，故存在常数 $N\geqslant 1$，$v>0$ 使得

$$\|\phi(\theta,t_0+u,t_0)\|\leqslant N\mathrm{e}^{-vu}$$

对所有的 $t_0\geqslant 0$，$u\geqslant 0$，$\theta\in\Theta$ 成立. 现任意固定 $\alpha\in(0,v]$ 及 $\beta\geqslant N$，则对所有的 $t>0$，$t_0\geqslant 0$，$\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$ 有

$$\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(\mathrm{e}^{\alpha u}\,\|\phi(\theta,t_0+u,t_0)x\|)\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(\beta\,\|x\|)\mathrm{d}u=\varphi(\beta\,\|x\|)$$

推论 2　线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在常数 $\alpha,\beta>0$，使得对所有的 $\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$，有

$$\sup_{t>t_0\geqslant 0}\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\alpha(u-t_0)}\,\|\phi(\theta,u,t_0)x\|\,\mathrm{d}u\leqslant\beta\,\|x\| \tag{7}$$

定理 2　线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在常数 $K,p>0$，以及函数 $\varphi:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$$

使得对所有的 $\theta\in\Theta$ 和 $x\in X$，有

$$\sup_{t>0}\sup_{t_0\geqslant 0}\frac{\varphi(t)}{t}\int_0^t\|\phi(\theta,t_0+u,t_0)x\|^p\mathrm{d}u\leqslant K\|x\|^p \tag{8}$$

证　必要性　显然. 令 $\varphi(t)=t$ 即可.

充分性　若 $\pi=(\phi,\sigma)$ 不是一致指数稳定的，由引理 1 可知对任意 $c\in(0,1)$ 和 $h>0$，存在 $t_0\geqslant 0$，$\theta_0\in\Theta$ 以及 $x_0\in X$ 使得对所有的 $u\in(0,h]$ 有

$$\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|>c\|x_0\| \tag{9}$$

结合式(8)有

$$c^p\|x_0\|^p\varphi(h)<\frac{\varphi(h)}{h}\int_0^h\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|^p\mathrm{d}u\leqslant K\|x_0\|^p$$

这意味着 $c^p\varphi(h)<K$ 对 $\forall c\in(0,1)$ 和 $\forall h>0$ 成立. 现将 c 固定，并令 $h\to\infty$，则有 $\frac{K}{c^p}\geqslant\infty$，从而矛盾，故 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的.

定理 3　线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在常数 $K>0$ 以及非减函数 $\varphi(t)>0(t>0)$ 满足 $\varphi(ts)\leqslant\varphi(t)\varphi(s)$，$(t,s)\in\Delta$，使得对所有的 $t_0\geqslant 0$，$\theta\in\Theta$ 和 $x\in X$，有

$$\int_0^\infty\varphi(\|\phi(\theta,t_0+u,t_0)x\|)\mathrm{d}u\leqslant K\varphi(\|x\|) \tag{10}$$

证　必要性　令 $\varphi(t)=t$ 即可.

充分性　若 $\pi=(\phi,\sigma)$ 不是一致指数稳定的，由引理 1 可知对任意 $c\in(0,1)$ 和 $h>0$，存在 $t_0\geqslant 0$，$\theta_0\in\Theta$ 以及 $x_0\in X$ 使得对所有的 $u\in(0,h]$ 有式(9)成立. 特别地，取 $c=\frac{1}{2}$，$h=K\varphi(2)$，由函数 φ 的性质以及式(9)可得

$$\begin{aligned}\varphi(2)\int_0^\infty\varphi(\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|)\mathrm{d}u\geqslant\int_0^\infty\varphi(2\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|)\mathrm{d}u>\\ \int_0^h\varphi(\|x_0\|)\mathrm{d}u=K\varphi(2)\varphi(\|x_0\|)\end{aligned}$$

这与式(10)矛盾，故 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的.

定理 4　线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在常数 $K>0$ 以及非减函数 $\varphi(t)>0(t>0)$ 满足 $\varphi(ts)\geqslant\varphi(t)\varphi(s)$，$(t,s)\in\Delta$，使得对所有的 $t_0\geqslant 0$，$\theta\in\Theta$ 和 $x\in X$，有式(10)成立.

证　必要性　令 $\varphi(t)=t$ 即可.

充分性　类似定理 3，借助式(9)可得，对 $c\in(0,1)$ 与 $h=\frac{K}{\varphi(c)}$ 有

$$\int_0^\infty\varphi(\|\phi(\theta_0,t_0+u,t_0)x_0\|)\mathrm{d}u>\int_0^h\varphi(c\|x_0\|)\mathrm{d}u\geqslant h\varphi(c)\varphi(\|x_0\|)=K\varphi(\|x_0\|)$$

这与式(10)矛盾，故 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的.

推论 3　线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在常数 $K'>0$ 以及非减函数 $\varphi(t)$ 满足定理 3 或 4 的条件，使得对所有的 $t_0\geqslant 0$，$\theta\in\Theta$ 和 $x\in X$，有

$$\sum_{k=0}^\infty\varphi(\|\phi(\theta,t_0+k,t_0)x\|)\leqslant K'\varphi(\|x\|) \tag{11}$$

在定理 3 或 4 中，取 $\varphi(t)=t^p(p>0)$，可得推论 4.

推论 4[12]　线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi,\sigma)$ 是一致指数稳定的，当且仅当存在常数 K，$p>0$ 使得对所有的 $t_0\geqslant 0$，$\theta\in\Theta$ 以及 $x\in X$，有

$$\left(\int_{t_0}^\infty\|\phi(\theta,t,t_0)x\|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant K\|x\| \tag{12}$$

接下来按照前面关于线性斜积三参数半流一致指数稳定性的讨论方式，给出相关结论在一致指数不稳定情形下的若干变形.

定理 5　若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是两个非减函数满足

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to\infty}\psi(t) = \infty$$

且对所有的 $\theta \in \Theta$ 以及 $x \in X\setminus\{0\}$，有

$$\sup_{t>0}\sup_{t_0\geqslant 0}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi\left(\frac{\psi(u)}{\|\phi(\theta, t_0+u, t_0)x\|}\right)\mathrm{d}u < \infty \tag{13}$$

则线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的.

证　反证法. 若 $\pi=(\phi, \sigma)$ 不是一致指数不稳定的，由引理 2 可知对任意 $c>1$ 和 $h>0$，存在 $t_0 \geqslant 0$，$\theta_0 \in \Theta$ 以及 $x_0 \in X$，$\|x_0\|=1$，使得对所有的 $u \in (0, h]$，有

$$\|\phi(\theta_0, t_0+u, t_0)x_0\| < c\|x_0\| = c$$

从而结合式(13)可得，对所有的 $h>0$ 有

$$\begin{aligned} H = &\sup_{t>0}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi\left(\frac{\psi(u)}{\|\phi(\theta_0, t_0+u, t_0)x_0\|}\right)\mathrm{d}u \geqslant \\ &\sup_{t\in(0,h]}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi\left(\frac{\psi(u)}{c}\right)\mathrm{d}u \geqslant \\ &\frac{1}{h}\int_0^h \varphi\left(\frac{\psi(u)}{c}\right)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

故由洛必达法则可得

$$H \geqslant \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h \varphi\left(\frac{\psi(u)}{c}\right)\mathrm{d}u = \lim_{h\to\infty}\varphi\left(\frac{\psi(h)}{c}\right) = \infty$$

从而矛盾. 故 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的.

推论 5　若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 非减函数 $\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$$

则线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在 $\alpha, \beta>0$，使得对所有 $\theta \in \Theta$ 以及 $x \in X\setminus\{0\}$，有

$$\sup_{t>0}\sup_{t_0\geqslant 0}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha u}}{\|\phi(\theta, t_0+u, t_0)x\|}\right)\mathrm{d}u \leqslant \varphi\left(\frac{\beta}{\|x\|}\right) \tag{14}$$

推论 6　若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 则线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在常数 $\alpha, \beta>0$，使得对所有的 $\theta \in \Theta$ 以及 $x \in X\setminus\{0\}$，有

$$\sup_{t>t_0\geqslant 0}\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t \frac{\mathrm{e}^{\alpha(u-t_0)}}{\|\phi(\theta, u, t_0)x\|}\mathrm{d}u \leqslant \frac{\beta}{\|x\|} \tag{15}$$

定理 6　若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 则线性斜积三参数半流 $\pi=(\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在常数 $K, p>0$，以及函数 $\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$$

使得对所有的 $\theta \in \Theta$ 和 $x \in X\setminus\{0\}$，有

$$\sup_{t>0}\sup_{t_0\geqslant 0}\frac{\varphi(t)}{t}\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\|\phi(\theta, t_0+u, t_0)x\|^p} \leqslant \frac{K}{\|x\|^p} \tag{16}$$

证　*必要性*　显然，令 $\varphi(t)=t$ 即可.

充分性　若 $\pi=(\phi, \sigma)$ 不是一致指数不稳定的，由引理 2 可知对任意 $c>1$ 和 $h>0$，存在 $t_0 \geqslant 0$，$\theta_0 \in \Theta$ 以及 $x_0 \in X\setminus\{0\}$，使得对所有的 $u \in (0, h]$ 有

$$\| \phi(\theta_0, t_0+u, t_0)x_0 \| < c \| x_0 \| \tag{17}$$

结合式(16)，有

$$\frac{\varphi(h)}{c^p \| x_0 \|^p} < \frac{\varphi(h)}{h} \int_0^h \frac{\mathrm{d}u}{\| \phi(\theta, t_0+u, t_0)x_0 \|^p} \leqslant \frac{K}{\| x_0 \|^p}$$

这意味着 $\varphi(h) < Kc^p$ 对 $\forall c > 1$ 和 $\forall h > 0$ 成立. 现将 c 固定，并令 $h \to \infty$，则有 $Kc^p \geqslant \infty$，从而矛盾，故 $\pi = (\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的.

定理 7 若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 则线性斜积三参数半流 $\pi = (\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在常数 $K > 0$ 以及非减函数 $\varphi(t) > 0 (t > 0)$ 满足 $\varphi(ts) \leqslant \varphi(t)\varphi(s)$，$(t, s) \in \Delta$，使得对所有的 $t_0 \geqslant 0$，$\theta \in \Theta$ 和 $x \in X \backslash \{0\}$，有

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\| \phi(\theta, t_0+u, t_0)x \|}\right) \mathrm{d}u \leqslant K\varphi\left(\frac{1}{\| x \|}\right) \tag{18}$$

证 必要性 令 $\varphi(t) = t$，$K = \dfrac{1}{Nv}$ 即可，其中 N, v 详见定义 4.

充分性 若 $\pi = (\phi, \sigma)$ 不是一致指数不稳定的，由引理 2 可知对任意 $c > 1$ 和 $h > 0$，存在 $t_0 \geqslant 0$，$\theta_0 \in \Theta$ 以及 $x_0 \in X \backslash \{0\}$，使得对所有的 $u \in (0, h]$ 有式(17)成立. 特别地，取 $c = 2$，$h = K\varphi(2)$，由函数 φ 的性质以及式(17)可得

$$\varphi(2)\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{\| \phi(\theta_0, t_0+u, t_0)x_0 \|}\right) \mathrm{d}u \geqslant \int_0^\infty \varphi\left(\frac{2}{\| \phi(\theta_0, t_0+u, t_0)x_0 \|}\right) \mathrm{d}u >$$

$$\int_0^h \varphi\left(\frac{1}{\| x_0 \|}\right) \mathrm{d}u = K\varphi(2)\varphi\left(\frac{1}{\| x_0 \|}\right)$$

这与式(18)矛盾，故 $\pi = (\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的.

定理 8 若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 则线性斜积三参数半流 $\pi = (\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在常数 $K > 0$ 以及非减函数 $\varphi(t) > 0 (t > 0)$ 满足 $\varphi(ts) \geqslant \varphi(t)\varphi(s)$，$(t, s) \in \Delta$，使得对所有的 $t_0 \geqslant 0$，$\theta \in \Theta$ 和 $x \in X \backslash \{0\}$，有式(18)成立.

证 类似定理 7 的证明.

推论 7 若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 则线性斜积三参数半流 $\pi = (\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在常数 $K' > 0$ 以及非减函数 $\varphi(t)$ 满足定理 7 或 8 的条件，使得对所有的 $t_0 \geqslant 0$，$\theta \in \Theta$ 和 $x \in X \backslash \{0\}$，有

$$\sum_{k=0}^\infty \varphi\left(\frac{1}{\| \phi(\theta, t_0+k, t_0)x \|}\right) \leqslant K'\varphi\left(\frac{1}{\| x \|}\right) \tag{19}$$

在定理 7 或 8 中取 $\varphi(t) = t^p (p > 0)$，可得推论 8.

推论 8[12] 若对任一$(\theta, t, t_0) \in \Theta \times \Delta$，$\phi(\theta, t, t_0)$为一一映射. 则线性斜积三参数半流 $\pi = (\phi, \sigma)$ 是一致指数不稳定的，当且仅当存在常数 $K, p > 0$，使得对所有的 $t_0 \geqslant 0$，$\theta \in \Theta$ 和 $x \in X \backslash \{0\}$，有

$$\left(\int_{t_0}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\| \phi(\theta, t, t_0)x \|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{K}{\| x \|} \tag{20}$$

参考文献：

[1] DATKO R. Extending a Theorem of A. M. Liapunov to Hilbert Space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1970, 32(3): 610-616.

[2] PAZY A. On the Applicability of Lyapunov's Theorem in Hilbert Space [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1972, 3(2): 291-294.

[3] DATKO R. Uniform Asymptotic Stability of Evolutionary Processes in a Banach Space [J]. SIAM Journal on Mathe-

matical Analysis，1972，3(3)：428-445.

[4] VAN MINH N，RÄBIGER F，SCHNAUBELT R. Exponential Stability，Exponential Expansiveness，and Exponential Dichotomy of Evolution Equations on the Half-Line [J]. Integral Equations and Operator Theory，1998，32(3)：332-353.

[5] BUSE C，NICULESCU C P. An Ergodic Characterization of Uniformly Exponentially Stable Evolution Families [J]. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie，2011，52(1)：33-40.

[6] 岳　田，宋晓秋. Banach 空间中 $GC(0, e)$类广义发展算子的一致指数不稳定性 [J]. 中山大学学报(自然科学版)，2018，57(5)：150-154.

[7] 董夙慧，岳　田，吴媛媛，等. 线性斜积半流指数渐近行为的平均定理 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2018，41(6)：753-756.

[8] 岳　田，宋晓秋. 线性斜积半流的一致指数稳定性的若干刻画 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2018，45(5)：545-548.

[9] PREDA C，PREDA P，BĂTĂRAN F. An Extension of a Theorem of R. Datko to the Case of (Non) Uniform Exponential Stability of Linear Skew-Product Semiflows [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，425(2)：1148-1154.

[10] PREDA C，ONOFREI O R. Nonuniform Exponential Dichotomy for Linear Skew-Product Semiflows over Semiflows [J]. Semigroup Forum，2018，96(2)：241-252.

[11] PREDA C，PREDA P，PETRE A P. On the Uniform Exponential Stability of Linear Skew-Product Three-Parameter Semiflows [J]. Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie，2011，54(3)：269-279.

[12] PREDA C，PREDA P. Some Results on the Qualitative Theory of Semiflows [J]. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin，2011，18(1)：173-186.

[13] PREDA C，POPITIU A P. A Discrete-Time Approach in the Qualitative Theory of Skew-Product Three-Parameter Semiflows [J]. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin，2017，24(3)：367-379.

[14] 李兴贵，黄家琳. 不动点技巧在反应扩散模糊随机周期时滞系统稳定性分析中的应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(6)：64-72.

责任编辑　张　构