第 43 卷第 9 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2021 年 9 月
Vol. 43　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.09.007

一类常微分方程和偏微分方程的级联系统的边界控制

雷　媛，　白艺昕，　谢成康

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：考虑一类常微分方程组和偏微分方程组的级联系统的稳定性. 通过 Backstepping 的方法，设计出系统的控制律，并证明了闭环系统的指数稳定性.

关　键　词：边界控制；级联系统；稳定性

中图分类号：O231.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2021)09－0054－05

Stabilization of an ODE-PDE Cascaded System by Boundary Control

LEI Yuan，　BAI Yixin，　XIE Chengkang

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the stability of a class of coupled ODE-PDEis considered. A control law of the cascaded systemis established by backstepping，and the exponential stability of the closed loops is achieved.

Key words：boundary control；cascaded system；stability

本文考虑如下控制系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_x(0,t) \\ \boldsymbol{U}_t(x,t)=\boldsymbol{U}_{xx}(x,t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}(x,t),\ 0<x<1 \\ \boldsymbol{U}(0,t)=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{U}_x(1,t)=\boldsymbol{C}(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{X}(t)\in\mathbb{R}^n$ 表示流体的温度、湿度、密度等物理参数，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 能稳，$\boldsymbol{U}(x,t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态变量，矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}(t)\in\mathbb{R}^n$ 是控制输入，$\boldsymbol{0}$ 表示零矩阵或零向量.

1　控制器设计

本文引入一个变换 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\longmapsto(\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})$：

收稿日期：2019－06－16
基金项目：国家自然科学基金项目(11671326,11571055,11401487)；重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2016jcyjA0239).
作者简介：雷　媛，硕士，主要从事偏级分方程的研究.
通信作者：谢成康，教授.

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t) \\ \boldsymbol{W}(x,t)=\boldsymbol{U}(x,t)-\int_0^x \boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{X}(t) \end{cases} \tag{2}$$

这里的核函数 $\boldsymbol{\Phi}(x,y)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和矩阵函数 $\boldsymbol{\Psi}(x)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 待定．该变换将系统(1)转换为一个指数稳定的目标系统，从而设计出控制律，那么闭环系统的稳定性就可以通过该变换及其逆变换建立起来．选定的目标系统如下

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{BW}_x(0,t) \\ \boldsymbol{W}_t(x,t)=\boldsymbol{W}_{xx}(x,t),\ 0<x<1 \\ \boldsymbol{W}(0,t)=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{W}_x(1,t)=\boldsymbol{0} \end{cases} \tag{3}$$

其中选定 $\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ 是 Hurwitz 矩阵，为了满足方程组(3)第 4 式，取控制律为

$$\boldsymbol{U}_x(1,t)=\boldsymbol{C}(t)=\int_0^1 \boldsymbol{\Phi}(1,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y-\boldsymbol{\Psi}(1)\boldsymbol{X}(t) \tag{4}$$

取核函数 $\boldsymbol{\Phi}(x,y)$ 和矩阵函数 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 满足如下方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{\Phi}_{yy}(x,y)-\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{0} \\ 2\boldsymbol{\Phi}'(x,x)+\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}(x,0)-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Psi}''(x)-\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \end{cases} \tag{5}$$

通过方程组(2)第 2 式以及方程组(3)第 3 式，可以得到矩阵函数 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的一个边界条件为

$$\boldsymbol{\Psi}(0)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

此外，状态 $\boldsymbol{X}(t)$ 满足方程组(1)第 1 式和方程组(3)第 1 式，

$$(\boldsymbol{KX}(t)+\boldsymbol{W}_x(0,t)-\boldsymbol{U}_x(0,t))=\boldsymbol{0} \tag{7}$$

可取如下条件成立

$$\boldsymbol{\Psi}'(0)=\boldsymbol{K} \tag{8}$$

首先，根据矩阵函数方程组(5)第 4 式及其边界条件(6)和(8)，本文得到矩阵方程的一个级数解为

$$\boldsymbol{\Psi}(x)=\boldsymbol{K}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\boldsymbol{A}^k \tag{9}$$

其次由方程组(5)及式(9)，可将核函数满足的边界条件转化为

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Phi}_{xx}(x,y)-\boldsymbol{\Phi}_{yy}(x,y)=\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{\Phi}(x,x)=-\frac{x}{2}\boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{\Phi}(x,0)=\boldsymbol{K}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B} \end{gathered} \tag{10}$$

可将核函数化为积分方程，再利用逐次逼近法求得近似解，其求解过程可参考文献[15]．最后得到核函数解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(x,y)=&-\frac{y}{2}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{K}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-y)^{2k+1}}{(2k+1)!}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}+ \\ &\boldsymbol{K}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{a_{ij}(2y)^{i-j}(x-y)^{2k+1+i+j}}{(i-j)!\,(2k+1+i+j)!\,4^i}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^i- \\ &2y\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x^2-y^2)^i}{i!\,(i+1)!\,4^{i+1}}\boldsymbol{\Lambda}^{i+1} \end{aligned} \tag{11}$$

2　稳定性

首先证明目标系统(3)的稳定性．

引理 1 对于目标系统(3)，存在 $\alpha>0$，$\beta>0$，使得

$$\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2 \leqslant \alpha(\|\boldsymbol{X}(0)\|^2+\|\boldsymbol{W}(0)\|_{H^1}^2)\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{12}$$

即目标系统在 H_1 范数意义下指数稳定，其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数，$\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}$ 表示 $\boldsymbol{W}(t)$ 的 H_1 范数，即

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}=\left(\int_0^1\boldsymbol{W}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1\boldsymbol{W}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(x,t)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

证 选取李雅普诺夫函数

$$\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)+\frac{a}{2}\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2 \tag{13}$$

这里的矩阵 $\boldsymbol{P}>0$ 是 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{I} \tag{14}$$

的解，其中 $\boldsymbol{I}$ 表示 n 阶单位阵，$a>0$ 是需要被确定的参数. 对 Lyapunov 函数(13) 两边关于 t 求导，由于 $\boldsymbol{W}$ 满足方程组(3)，所以有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t)=&\dot{\boldsymbol{X}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{X}}(t)+\\&\frac{a}{2}\int_0^1(\boldsymbol{W}_t(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(x,t)+\boldsymbol{W}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_t(x,t))\mathrm{d}x+\\&\frac{a}{2}\int_0^1(\boldsymbol{W}_{xt}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_x(x,t)+\boldsymbol{W}_x(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{xt}(x,t))\mathrm{d}x=\\&-\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)+2\boldsymbol{W}_x(0,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)+\\&a\int_0^1\boldsymbol{W}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)\mathrm{d}x+a\int_0^1\boldsymbol{W}_x(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{xt}(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

通过分部积分，由边界条件方程组(3) 第 3 式和第(4) 式，有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t)=&-\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(t)+2\boldsymbol{W}_x(0,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)-\\&a\int_0^1\boldsymbol{W}_x(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_x(x,t)\mathrm{d}x-a\int_0^1\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_t(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{W}$ 满足方程组(3) 第 1 式，所以 $\boldsymbol{V}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant&-\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+2\boldsymbol{W}_x(0,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)-\\&a\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_{L^2}^2-a\int_0^1\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{xx}(x,t)\mathrm{d}x=\\&-\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+2\boldsymbol{W}_x(0,t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)-\\&a(\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{W}_{xx}(t)\|_{L^2}^2)\end{aligned} \tag{15}$$

由 Agmon 不等式、Cauchy-Schwartz 不等式和 Young 不等式

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2-(a-2\|\boldsymbol{B}\|^2\|\boldsymbol{P}\|^2)(\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{W}_{xx}(t)\|_{L^2}^2)$$

取

$$a=2\|\boldsymbol{B}\|^2\|\boldsymbol{P}\|^2+2$$

再由 Poincare 不等式及

$$\boldsymbol{W}_x(1,t)=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{W}(0,t)=\boldsymbol{0}$$

得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant&-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2-\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{W}(t)\|_{L^2}^2+\|\boldsymbol{W}_x(t)\|_{L^2}^2)=\\&-\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2)\end{aligned} \tag{16}$$

又因为

$$\boldsymbol{\lambda}_{\min}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{X}(t)\|^2\leqslant\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}(t)\leqslant\boldsymbol{\lambda}_{\max}(\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{X}(t)\|^2$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_{\max}(\boldsymbol{P})$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的最大特征值，那么，由(13) 式可得

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2)\leqslant \boldsymbol{V}(t)\leqslant \alpha_2(\|\boldsymbol{X}(t)\|^2+\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2) \tag{17}$$

其中

$$\alpha_1=\min\left\{\boldsymbol{\lambda}_{\min}(\boldsymbol{P}),\ \frac{a}{2}\right\}$$

$$\alpha_2=\max\left\{\boldsymbol{\lambda}_{\max}(\boldsymbol{P}),\ \frac{a}{2}\right\}$$

就可以得到

$$\boldsymbol{V}(t)\leqslant \boldsymbol{V}(0)\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{18}$$

这里 $\beta=\dfrac{1}{2\alpha_2}$. 由式(17) 和式(18) 得到式(12) 成立，从而就证明了闭环系统是稳定的.

证明变换(2) 可逆，需找到它的逆变换，故假设逆变换具有如下形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t)\\ \boldsymbol{U}(x,t)=\boldsymbol{W}(x,t)+\displaystyle\int_0^x \boldsymbol{L}(x,y)\boldsymbol{W}(y,t)\mathrm{d}y+\boldsymbol{Q}(x)\boldsymbol{X}(t)\end{cases} \tag{19}$$

按照求解核函数 $\boldsymbol{\Phi}(x,y)$,$\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的思路和方法，能得到

$$\boldsymbol{Q}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\boldsymbol{\Lambda}^s\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{k-s} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(x,y)=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\frac{(x-y)^{2k+1}}{(2k+1)!}\boldsymbol{\Lambda}^s\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{k-s}\boldsymbol{B}+\\ &\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\boldsymbol{\Lambda}^s\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{k-s}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}^i\times\\ &\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(-1)^i a_{ij}(2y)^{i-j}(x-y)^{2k+1+i+j}}{(i-j)!\ (2k+1+i+j)!\ 4^i}+\\ &\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}(2y)(x^2-y^2)^i}{i!\ (i+1)!\ 4^{i+1}}\boldsymbol{\Lambda}^{i+1}\end{aligned} \tag{21}$$

引理 2　变换(2) 及其逆变换(19) 均为有界算子，即存在正整数 δ,$\bar{\delta}$,γ 和 $\bar{\gamma}$ 使得

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2\leqslant \delta\|\boldsymbol{U}(t)\|_{H^1}^2+\bar{\delta}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2 \tag{22}$$

$$\|\boldsymbol{U}(t)\|_{H^1}^2\leqslant \gamma\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}^2+\bar{\gamma}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2 \tag{23}$$

证　从变换(2) 第 2 式及范数的性质，可得

$$\|\boldsymbol{W}(t)\|_{H^1}\leqslant\|\boldsymbol{U}(t)\|_{H^1}+\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{H^1}+\|\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{X}(t)\|_{H^1} \tag{24}$$

接下来需要对第 2 项和第 3 项进行估计. 首先

$$\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{H^1}^2\leqslant\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}^2+$$

$$\left(\|\boldsymbol{\Phi}(x,x)\boldsymbol{U}(x,t)\|_{L^2}+\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}_x(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}\right)^2$$

根据 Holder 不等式

$$\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}^2\leqslant\delta_1\|\boldsymbol{U}(y,t)\|_{L^2}^2 \tag{25}$$

$$\left\|\int_0^x\boldsymbol{\Phi}_x(x,y)\boldsymbol{U}(y,t)\mathrm{d}y\right\|_{L^2}^2\leqslant\delta_2\|\boldsymbol{U}(y,t)\|_{L^2}^2 \tag{26}$$

其中

$$\delta_1=\int_0^1\int_0^1\|\boldsymbol{\Phi}(x,y)\|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$\delta_2=\int_0^1\int_0^1\|\boldsymbol{\Phi}_x(x,y)\|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

同理由逆变换可得

$$\|\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{X}(t)\|_{H^1}^2 \leqslant \bar{\delta}\|\boldsymbol{X}(t)\|^2 \tag{27}$$

其中

$$\bar{\delta}=\int_0^1\|\boldsymbol{\Psi}(x)\|^2\mathrm{d}x+\int_0^1\|\boldsymbol{\Psi}'(x)\|^2\mathrm{d}x$$

因此，由式(24),(25),(26)及(27)，当取

$$\delta=1+\delta_1+\delta_2$$

时式(22)成立. 同理可证式(23)成立.

根据引理1和引理2可以得到如下定理.

定理1 设 $\boldsymbol{\Phi}(1,y)$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(1)$ 是方程(11)及(9)的解. 考虑系统(1)，控制律为(4)，则存在常数 σ 使得

$$\|\boldsymbol{X}(x)\|^2+\|\boldsymbol{U}(t)\|_2^2 \leqslant \sigma(\|\boldsymbol{X}(0)\|^2+\|\boldsymbol{U}(0)\|_2^2)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \tag{28}$$

即闭环系统在上述范数下是指数稳定的.

参考文献:

[1] HE C H, XIE C K, ZHEN Z Y. Explicit Control Law of a Coupled Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(5): 2087-2101.

[2] ZHAO A L, XIE C K. Stabilization of Coupled Linear Plant and Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(2): 857-877.

[3] TANG S X, XIE C K. Stabilization for a Coupled PDE-ODE Control System [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(8): 2142-2155.

[4] TANG S X, XIE C K. Stabilization of a Coupled PDE-ODE System by Boundary Control [C] //49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). New York: IEEE Computer Society Press, , 2010: 4042-4047.

[5] ANTONIO SUSTOG, KRSTICM. Control of PDE-ODE Cascades with Neumann Interconnections [J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347(1): 284-314.

[6] ZHOU Z C, TANG S X. Boundary Stabilization of a Coupled Wave-ODE System with Internal Anti-Damping [J]. International Journal of Control, 2012, 85(11): 1683-1693.

[7] LASIECKA I. Mathematical Control Theory of Coupled PDEs [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied-Mathematics, 2002.

[8] SMYSHLYAEV A, KRSTIC M. Adaptive Control of Parabolic PDEs [M]. Princeton: Princeton University Press, 2010.

[9] KRSTICM, SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs. A Course on Backstepping Designs [M]. Philadelphia: SIAM, 2008: 1-63.

[10] KRSTICM. Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems [M]. Basel: Birkhauser, 2009: 1-83.

[11] TANG S X, XIE C K. State and Output Feedback Boundary Control for a Coupled PDE-ODE System [J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(8): 540-545.

[12] TANG S X, XIE C K. Stabilization for a Coupled PDE-ODE Control System [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(8): 2142-2155.

[13] ZHAO A L, XIE C K. Stabilization of Coupled Linear Plant and Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(2): 857-877.

[14] HE C H, XIE C K, ZHEN Z Y. Explicit Control Law of a Coupled Reaction-Diffusion Process [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(5): 2087-2101.

[15] LIU X, XIE C. Control Law in Analytic Expression of a System Coupled by Reaction-Diffusion Equation [J]. Systems & Control Letters, 2020, 137: 1-5.

[16] LI G P, XIE C K. Feedback Stabilization of Reaction-Diffusion Equation in a Two-Dimensional Region [C] //49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). New York: IEEE Computer Society Press, 2010: 2985-2989.

[17] 邓 静, 谢成康, 刘忠诚. 一类耦合反应扩散系统的边界控制 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(5): 126-131.

责任编辑 张 栒