

一类递归型数据中心网络上容错单播算法的研究

伊雯雯¹, 张书奎², 王 喜^{1,2}, 李文俊¹

1. 苏州工业职业技术学院 软件与服务外包学院, 江苏 苏州 215004;

2. 苏州大学 计算机科学与技术学院, 江苏 苏州 215006

摘要: 提出了一类基于完全图的递归型数据中心网络(RDCN), 与传统树形数据中心网络相比, RDCN 具有更好的网络带宽和容错性能. 证明了当 $k \geq 1$, $n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$ 时, RDCN 基于限制故障顶点集的限制连通度为 $2k\sigma + n - 2$, 这一结果近于其连通度的 2 倍; 提出了基于该情形的一种改进的容错单播算法 XFRouting, 证明了该算法的时间复杂度为 $O(\lceil \log |F| \rceil k^3)$, 并证明了在最坏情况下构造出其最长路径长度的上界. 最后通过模拟仿真实验, 验证了该算法在执行效率上优于广度优先搜索算法和深度优先搜索算法.

关键词: 递归型数据中心网络; 连通度; 限制连通度; 容错单播路由算法

中图分类号: TP393

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2021)09-0181-12

A Fault-Tolerant Unicast Routing Algorithm for a Class of Recursive Data Center Networks

YI Wenwen¹, ZHANG Shukui², WANG Xi^{1,2}, LI Wenjun¹

1. College of Software and Service Outsourcing, Suzhou Vocational Institute of Industrial Technology, Suzhou Jiangsu 215004, China;

2. College of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou Jiangsu 215006, China

Abstract: The data center network is the main infrastructure supporting applications such as cloud services, supercomputing and social networks. The traditional tree-based data center network has some shortcomings, such as insufficient scalability and low fault tolerance. Based on completed graphs, this paper presents a kind of recursive data center network(RDCN). Compared with the traditional tree data center network, RDCN has better network bandwidth and fault-tolerant performance. It is proved that when $k \geq 1$, $n \geq 3$ and $\sigma \in \{1, n-1\}$, the restricted connectivity of RDCN is $2k\sigma + n - 2$, which is almost twice the RDCN's traditional connectivity. We present an improved fault-tolerant unicastroouting algorithm(XFRouting).

收稿日期: 2019-10-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(61702351); 江苏省自然科学基金青年项目(BK20180209); 苏州工业职业技术学院科研课题(2020kyjj04).

作者简介: 伊雯雯, 讲师, 硕士, 主要从事数据中心网络、并行与分布式系统研究.

通信作者: 王 喜, 副教授, 博士, 在职博士后.

ing) and prove that the time complexity of XFRouting is $O(\lceil \log |F| \rceil k^3)$, and furthermore prove the maximal length of the path constructed by the algorithm in the worst case. Finally, a simulation experiment based on our algorithm is carried out, and the results show that the algorithm is better than the breadth first search algorithm and the depth first search algorithm.

Key words: recursive data center network; connectivity; restricted connectivity; fault-tolerant unicast routing algorithm

近年来,随着云计算和大数据应用的飞速发展,数据中心网络(Data Center Network)作为其基础设施和下一代网络技术的创新平台,得到了学术界和工业界的广泛关注^[1-3].

数据中心网络的容错性是评估网络性能的重要因素. 连通度是度量数据中心网络容错性的一个重要参数,连通度越大,则数据中心网络的容错性能就相对越高. 数据中心网络连通度定义中,发生故障的服务器是任意的、没有限制条件的,然而实际情况往往并非如此. 仅使用连通度来评估数据中心网络的容错性,会严重低估数据中心网络的容错性能. 因此,涌现了大量在特定网络拓扑上的限制连通度问题的研究成果^[3-12].

传统的树型数据中心网络存在可扩展性不足和容错性较差等缺点,因此研究者们提出了 DCell, BCube 等多种递归型数据中心网络,与树型数据中心网络不同,这些结构采用递归方式构建网络拓扑,理论上可以支持百万台服务器的规模^[13-14],且它们避免了核心层交换机带来的性能瓶颈,并使服务器之间拥有多条可用的不相交路径,其在可扩展性、容错性等多方面都有较好表现. 本文提出了一类递归型数据中心网络——RDCN,与传统树形数据中心网络相比,该网络具有更好的网络带宽和网络容错性能;研究了递归型数据中心网络的限制连通度,该结果能够更加精确地度量该网络的容错性. 本文将讨论 RDCN 在限制故障顶点集情形下的限制连通度,并设计和分析了相应的容错单播算法.

1 预备知识

数据中心网络可以表示为一个简单图 $G = (V(G), E(G))$, 其中 $V(G)$ 表示顶点集, $E(G)$ 表示边集. 顶点和边分别表示数据中心网络中的服务器和连接服务器的链路,而交换机被认为是透明的网络设备^[13]. 给定图 G 中任意两个顶点 u 和 v , 若 $(u, v) \in E(G)$, 则 u 和 v 是邻居. 顶点 u 在图 G 的邻居集合可表示为 $N(G, u) = \{v \mid (u, v) \in E(G)\}$. 图 G 的连通度可表示为 $\kappa(G)$.

图 G 中两个顶点 u 和 v 之间的路径 P 可表示为一个顶点的序列 $P = (u_0 = u, u_1, \dots, u_k = v)$, P 中除了 u 和 v 以外的任意两个点都是不同的. 从 u_i 到 u_j 的子路径可用 $Path(P, u_i, u_j)$ 表示, 其中 $0 \leq i < j \leq k$. $P[-1] = u_k$, P^{-1} 可表示为路径 P 的反转. P 中所有顶点(边)的集合可表示为 $V(P)(E(P))$. 如果 $V' \subseteq V(G)$, 那么 $G[V']$ 表示由图 G 的顶点所导出的子图. 使用 $G - V$ 来表示 $G[V(G) - V]$. 对于任意的顶点 $v \in V(G)$, 如果 $(u, v) \in E(G)$, 则表示 u 是 v 的一个邻居. 定义 $N(G, V') = \{x \in V(G) \mid \text{存在顶点 } y \in V' \text{ 满足 } (x, y) \in E(G)\}$. 顶点 v 的邻居集合 $\Gamma(G, v) = \{u \in V(G) \mid (v, u) \in E(G)\}$ 表示 v 的所有相邻顶点.

进一步,对于顶点集合 $V' \subseteq V(G)$, 定义 V' 的邻居集合为 $\Gamma(G, V') = \bigcup_{x \in V'} \Gamma(G, x) / V'$. 明显地, $\Gamma(G, V') = N(G, V') / V'$.

定义 1 给定图 G , 令 $F \subset V(G)$ 表示 G 中一个故障顶点集合, 如果 $u \in F$, 那么 u 是 G 中一个故障顶点; 否则, u 是 G 中一个无故障顶点. 若 G 中每个顶点至少有一个无故障邻居, 则基于该条件下 G 的限制连通度可表示为 $\kappa'(G)$. 另外, 基于故障顶点无限制的 G 的连通度可表示为 $\kappa(G)$.

对于任意整数 $n \geq 3$ 和 $k \geq 1$, 部署于 n -口交换机上的 k -维递归完全图网络可以表示为一个图 $X_{k,n}$. $X_{k,n}$ 的基图是一个有 n 个顶点的完全图, $t_{k,n}$ 表示 $X_{k,n}$ 的顶点个数, $e(u, v)$ 表示顶点 u 到顶点 v 的边, σ

表示图中任意顶点与同维度其他子图相连接的边数, 其中 $\sigma \in \{1, n-1\}$, s 表示 $X_{k,n}$ 中子图的个数. $X_{k,n}$ 的顶点 u 表示为 $[u_k, u_{k-1}, \dots, u_i, \dots, u_0]$, 其中 $0 \leq u_0 \leq n-1, 0 \leq u_i \leq s_i$ 且 $i \geq 1$, 可用 $(u)_i$ 表示 u 中的第 i 个元素 u_i .

定义 2 当 $k \geq 0, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$ 时, $X_{k,n}$ 的递归定义如下:

- (1) 当 $k=0$ 时, $X_{k,n}$ 是一个具有 n 个顶点的完全图.
- (2) 当 $k \geq 1$ 时, $X_{k,n}$ 是由 s 个互不相交的子图 $X_{k-1,n}^1, X_{k-1,n}^2, \dots, X_{k-1,n}^s$ 相互连接而成的 $(n+k\sigma-1)$ -正则图, 其中当 $\sigma=1$ 时, $s=t_{k-1,n}+1$; 当 $\sigma=n-1$ 时, $s=n$.

(2.1) 当 $\sigma=1$ 时, $X_{k-1,n}^{u_k}$ 中顶点 $u=[u_k, u_{k-1}, \dots, u_0]$ 与 $X_{k-1,n}^{v_k}$ 中 $v=[v_k, v_{k-1}, \dots, v_0]$ 是相邻的当且仅当 $u_k=v_0+\sum_{j=1}^{k-1}(v_jt_{j-1,n})$ 且 $v_k=u_0+\sum_{j=1}^{k-1}(u_jt_{j-1,n})+1$.

(2.2) 当 $\sigma=n-1$ 时, $X_{k-1,n}^{u_k}$ 中顶点 $u=[u_k, u_{k-1}, \dots, u_0]$ 与 $X_{k-1,n}^{v_k}$ 中 $v=[v_k, v_{k-1}, \dots, v_0]$ 是相邻的当且仅当 $u_k \neq v_k$ 且 $u_i=v_i (i=0, \dots, k-1)$.

根据文献[13] 和文献[14], 可得出 $X_{k,n}$ 网络的基本性质如下.

定理 1 $X_{k,n}$ 是一个 $(n+k\sigma-1)$ -正则图.

定理 2 $\kappa(X_{k,n})=\lambda(X_{k,n})=n+k\sigma-1$.

定理 3
$$t_{k,n}=\begin{cases} t_{k-1,n}(t_{k-1,n}+1) \geq \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2^k}-\frac{1}{2} & \text{若 } \sigma=1, \\ nt_{k-1,n}=n^{k+1} & \text{若 } \sigma=n-1 \end{cases}.$$

本文将 RDCN 与几种典型的数据中心网络进行对比(如表 1 所示), 其中 N 表示服务器数量, n 表示交换机端口数量, 比较的指标包括: 顶点的度、连通度和网络直径. 其中数据中心网络中顶点的度越小则表示其顶点间网络连接越少, 从而构建网络的成本越低; 数据中心网络的连通度越高, 则表示其具有更好的容错性; 数据中心网络的直径越小则表示它的实时响应路由所花费的时间越少.

表 1 几种常见数据中心网络性质比较

网络结构	度	连通度	直径
Tree	1	—	$2\log_{n-1}^N$
Fat-tree	1	—	$2\log_2^N$
FiConn	$2-\frac{1}{2^k}$ *	$n-1$	$\leq 4\log_{\frac{n}{4}}^N-1$
RDCN($\sigma=1$)	$k+1$	$n+k\sigma-1=n+k-1$	$< 2\log_n^N-1$
RDCN($\sigma=n-1$)	$k+1$	$n+k\sigma-1=(k+1)(n-1)$	$k+1$

与 RDCN 相比, Tree 和 Fat-Tree 的扩展规模在理论上受限于核心交换机的端口数目, 不利于数据中心网络规模的快速扩张, 且它们的容错性受到核心交换设备影响较大, 对核心交换设备的故障非常敏感. 同时, Tree 和 Fat-Tree 的拓扑结构的特点决定了其不能很好支持一对多、广播和全交换等网络通信模式. 另外, 与 RDCN 相比, FiConn 网络的容错性较差, 网络直径较大. 因此与上述数据中心网络相比, RDCN 具有较高的网络带宽、较好的容错性. 特别的, $\sigma=n-1$ 时的 RDCN 比 $\sigma=1$ 时的 RDCN 具有更高的网络带宽和容错性能.

2 递归型数据中心网络的限制连通度

本文用 F 表示故障顶点集合, 令 $I_{0,n}=\{0, 1, \dots, n-1\}$ 且 $I_{j,n}=\{0, 1, \dots, s\} (1 \leq j \leq k)$. 若 $\sigma=1$ 时, $s=t_{k-1,n}+1$; 若 $\sigma=n-1$ 时, $s=n$. 对于任意整数 $i \in I_{k,n}$, 令 $F_i=F \cap V(X_{k-1,n}^i)$ 且 $f_i=|F_i|$.

令 $I = \{i \in I_{k,n} \mid f_i \geq n + k\sigma - 2\}$, $\bar{I} = I_{k,n} \setminus I$, $F_I = \bigcup_{i \in I} F_i$, $F_{\bar{I}} = \bigcup_{i \in \bar{I}} F_i$, $X_{k-1,n}^{\bar{I}} = X_{k,n}[\bigcup_{i \in \bar{I}} V(X_{k-1,n}^i)]$.

对于任意的整数 $1 \leq l \leq k$, 令 $V_{k,n}^l = \{[u_k, u_{k-1}, \dots, u_l] \mid u_i \in I_{i,n} \text{ 且 } l \leq i \leq k\}$. 对于任意的 $\alpha \in V_{k,n}^l$, 我们用 $X_{l-1,n}^\alpha$ 表示 $X_{l-1,n}$ 中每个顶点标号前添加 α 作为前缀后生成的图. 显然 $X_{l-1,n} \cong X_{l-1,n}^\alpha$.

根据定义 2, 可以证明下述引理成立.

引理 1 对于任意两个整数 $i, j \in I_{k,n}$ 且 $i \neq j$, $X_{k,n}$ 中的子图 $X_{k-1,n}^i$ 和 $X_{k-1,n}^j$ 存在 h 条不相交的连接路径, 表示为集合 $P(X_{k-1,n}^i, X_{k-1,n}^j)$, 其中当 $\sigma = 1$ 时 $h = t_{k-1,n}$, 当 $\sigma = n - 1$ 时 $h = (n - 1)t_{k-1,n}$.

证 对于任意的 $r \in I_{k,n} \setminus \{i, j\}$, 令 $e(X_{k-1,n}^i, X_{k-1,n}^j)$ 表示子图 $X_{k-1,n}^i$ 到子图 $X_{k-1,n}^j$ 的一条边, 令 $(u_r, x_r) = e(X_{k-1,n}^i, X_{k-1,n}^r)$ 且 $(y_r, v_r) = e(X_{k-1,n}^r, X_{k-1,n}^j)$. 因为 $X_{k-1,n}^r$ 是连通的, 所以 x_r 到 y_r 存在一条路径 Q_r . 令 $P_i = e(X_{k-1,n}^i, X_{k-1,n}^j)$, 当 $r \in I_{k,n}$ 且 $r \neq j$ 时, 可以验证 $P_0, P_1, \dots, P_r, \dots, P_s$ 是连接 $X_{k-1,n}^i$ 和 $X_{k-1,n}^j$ 的 h 条不交路径, 当 $\sigma = 1$ 时, $h = t_{k-1,n}$, 当 $\sigma = n - 1$ 时, $h = (n - 1)t_{k-1,n}$.

引理 2 令 F 表示 $X_{k,n}$ 上所有故障顶点的集合. 存在任意整数 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n - 1\}$, 若 $|F| \leq 2(k\sigma - 1) + n$, 则 $X_{k-1,n}^{\bar{I}} - F$ 是连通的.

证 首先证明 $|I| \leq 2$. 假设 $|I| \geq 3$, 根据前面给出的 I 的定义, 则有 $|F| \geq 3(n + k\sigma - 2) \geq 2(k\sigma - 1) + n + 1 > 2(k\sigma - 1) + n$, 矛盾. 此外, 对于任意整数 $i \in \bar{I}$, 由于 $\kappa(X_{k-1,n}^i) = n + k - 2$ 且 $f_i \leq n + k - 3$, 故 $X_{k-1,n}^i - F_i$ 是连通的.

接下来证明 $X_{k-1,n}^{\bar{I}} - F_{\bar{I}}$ 是连通的. 对于任意两个不同整数 $i, j \in \bar{I}$, 任意的整数 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n - 1\}$, 根据引理 1 和定理 3 可以得出

$$|P(X_{k-1,n}^i, X_{k-1,n}^j)| = \begin{cases} t_{k-1,n} \geq \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2^k} - \frac{1}{2} > 2(k\sigma - 1) + n \geq |F| & \text{若 } \sigma = 1 \\ (n - 1)t_{k-1,n} = (n - 1)n^{k+1} \geq 2(k\sigma - 1) + n \geq |F| & \text{若 } \sigma = n - 1 \end{cases}$$

因此, 对于任意两个不相等的整数 $i, j \in \bar{I}$, $X_{k-1,n}^{\bar{I}} - F_{\bar{I}}$ 上至少存在一条路径 Q 连接 $X_{k-1,n}^i$ 和 $X_{k-1,n}^j$, 其中 $Q \in P(X_{k-1,n}^i, X_{k-1,n}^j)$, 故 $X_{k-1,n}^{\bar{I}} - F_{\bar{I}}$ 是连通的.

引理 3^[15] 对于任意的整数 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n - 1\}$, $X_{k,n}$ 上存在长度为 3 的圈.

引理 4^[15] 对于任意的整数 $k \geq 1, n \geq 3, \sigma \in \{1, n - 1\}$, $X_{k,n}$ 中存在相邻的两个顶点 $u = u_k u_{k-1} \dots u_0$ 和 $v = v_k v_{k-1} \dots v_0$, 边 $(u, v) \in E(X_{k,n})$, 令 $\text{leftIdx}(u, v)$ 表示为 u 和 v 从左侧开始最先不同的下标, 则有

$$|(\Gamma(X_{k,n}, u) \setminus \{v\}) \cap (\Gamma(X_{k,n}, v) \setminus \{u\})| = \begin{cases} 0 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) \geq 1 \\ n - 2 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = 1 \\ 2(n - 2) & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = n - 1 \end{cases}$$

引理 5 对于任意的整数 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n - 1\}$, 网络中的故障顶点集合 $F \subset V(X_{k,n})$ 且 $|F| \leq 2k\sigma + n - 3$, 若 $X_{k,n}$ 中每个无故障顶点都至少存在一个无故障邻居, 则 $X_{k,n} - F$ 是连通的.

证 要证明上述情况成立需要证明下述断言成立.

断言. 对于任意两个不同的顶点 $u, v \in V(X_{k,n} - F)$, 在 $X_{k,n} - F$ 中存在一条连接 u 和 v 的路径.

当 $k = 1$ 时, 该断言显然成立.

令 $\alpha = (u)_k, \beta = (v)_k$, 当 $k > 1$ 时, 可以分两种情形讨论.

情形 1 $\alpha = \beta$. 令 $G_0 = X_{k-1,n}^\alpha - F_\alpha$ 且 $G_1 = X_{k,n} - V(X_{k-1,n}^\alpha) - (F/F_\alpha)$, 则:

1) 若 $f_\alpha \leq n + k\sigma - 3$, 则 G_0 是连通的, 因此 G_0 中存在 u 和 v 的路径连接;

2) 若 $f_\alpha \geq n + k\sigma - 2$, 且 u, v 在同一个连通分支, 则 G_0 中存在 u 和 v 的连接路径;

3) 若 $f_\alpha \geq n + k\sigma - 2$, 且 u, v 不在同一个连通分支, 假定 x 是 u 的一个无故障邻居顶点, y 是 v 的一个无故障邻居顶点. 令 $\gamma = (x)_k$ 且 $\delta = (y)_k$, 接下来可以分为以下 3 种子情形.

情形 1.1 $\alpha \neq \delta$ 且 $\alpha \neq \gamma$. 对于任意整数 $i \in I_{k,n} \setminus \{\alpha\}$, 有 $f_i \leq |F| - f_\alpha \leq (2k\sigma + n - 3) - (n + k\sigma -$

2) = $k\sigma - 1 \leq n + k\sigma - 3$. 根据引理 2, G_1 是连通的, G_1 中存在路径 Q 连接 x 和 y . 因此 $X_{k,n} - F$ 中存在路径 (u, x, Q, y, v) 连接 u 和 v .

情形 1.2 $\alpha \neq \delta$ 且 $\alpha = \gamma$. 令 $u_1, u_2, \dots, u_{n+k\sigma-4}, u_{n+k\sigma-3}$ 分别表示 u 在 $X_{k-1,n}^\alpha$ 中的除 x 外的 $n+k\sigma-3$ 个邻居, 令 $x_1, x_2, \dots, x_{n+k\sigma-4}, x_{n+k\sigma-3}$ 分别表示 x 在 $X_{k-1,n}^\alpha$ 中的除 u 外的 $n+k\sigma-3$ 个邻居, 令 $u'_1, u'_2, \dots, u'_{n+k\sigma-3}, u'_{n+k\sigma-2}$ 分别表示 $u_1, u_2, \dots, u_{n+k\sigma-4}, u_{n+k\sigma-3}, x$ 在 $X_{k,n} - V(X_{k-1,n}^\alpha)$ 中的 $n+k\sigma-2$ 个邻居, 令 $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+k\sigma-3}, x'_{n+k\sigma-2}$ 分别表示 $x_1, x_2, \dots, x_{n+k\sigma-4}, x_{n+k\sigma-3}, u$ 在 $X_{k,n} - V(X_{k-1,n}^\alpha)$ 中的 $n+k\sigma-2$ 个邻居, 其中 $\sigma \in \{1, n-1\}$. 根据引理 3 和引理 4 有

$$|\{u_1, u_2, \dots, u_{n+k\sigma-3}\} \cap \{x_1, x_2, \dots, x_{n+k\sigma-3}\}| = \begin{cases} 0 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) \geq 1 \\ n-2 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = 1 \\ 2(n-2) & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = n-1 \end{cases}$$

令

$$c = \begin{cases} 0 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) \geq 1 \\ n-2 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = 1 \\ 2(n-2) & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = n-1 \end{cases}$$

$$c' = \begin{cases} 2(n+k\sigma-2) & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) \geq 1 \\ n+2k\sigma-2 = n+2k-2 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = 1 \\ 2k\sigma = 2kn-2k & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = n-1 \end{cases}$$

对 c' 求导则有

$$\frac{dc'}{dk} = \begin{cases} 2\sigma & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) \geq 1 \\ 2 & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = 1 \\ 2\sigma & \text{若 } \text{leftIdx}(u, v) = 0 \text{ 且 } \sigma = n-1 \end{cases}$$

显然有 $\min(c') = n+2k\sigma-2$. 不失一般性, 假设 $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_c = u_c$, 则有 $\{u_{c+1}, u_{c+2}, \dots, u_{n+k\sigma-3}\} \cap \{x_{c+1}, x_{c+2}, \dots, x_{n+k\sigma-3}\} = \emptyset$.

根据定义 2 有 $\{u'_{c+1}, u'_{c+2}, \dots, u'_{n+k\sigma-3}\} \cap \{x'_{c+1}, x'_{c+2}, \dots, x'_{n+k\sigma-3}\} = \emptyset$.

因此, 从 $X_{k-1,n}^\alpha$ 到 $X_{k,n} - V(X_{k-1,n}^\alpha)$ 可得 c' 条不交路: $Q_1 = (u, u_1, u'_1), Q_2 = (u, u_2, u'_2), \dots = \dots, Q_{n+k\sigma-3} = (u, u_{n+k\sigma-3}, u'_{n+k\sigma-3}), Q_{n+k\sigma-2} = (u, x, u'_{n+k\sigma-2}), Q_{n+k\sigma-1} = (u, x, x_{c+1}, x'_{c+1}), Q_{n+k\sigma} = (u, x, x_{c+2}, x'_{c+2}), \dots, Q_{c'-1} = (u, x, x_{n+k\sigma-3}, x'_{n+k\sigma-3}), Q_{c'} = (u, x'_{n+k\sigma-2})$.

因为 $|F| \leq 2k\sigma + n - 3 < c'$, 所以 c' 条不相交的路径 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{c'}$ 中至少存在一条路径 Q_r 满足条件, 其中 $1 \leq r \leq c'$. 令 $c'' = n+k\sigma-2 - (c'-r) = n+k\sigma-2-c'+r$, 则有

$$Q = \begin{cases} (u, u_r, u'_r) & \text{若 } 1 \leq r \leq n+k\sigma-3 \\ (u, x, u'_r) & \text{若 } r = n+k\sigma-2 \\ (u, x, x_{c''}, x'_{c''}) & \text{若 } n+k\sigma-1 \leq r \leq c'-1 \\ (u, x'_{c''}) & \text{若 } r = m' \end{cases}$$

和

$$z = \begin{cases} u'_r & \text{若 } 1 \leq r \leq n+k\sigma-2 \\ x'_{c''} & \text{若 } n+k\sigma-1 \leq r \leq c' \end{cases}$$

根据情形 1.1 中讨论, G_1 中存在一条路径 P 连接 z 和 y . 因此, $X_{k,n} - F$ 中存在一条路径 (Q, P, v) 连接 u 和 v .

情形 1.3 $\alpha = \delta$. 证明与情形 1.2 类似, 不再赘述.

情形 2 $\alpha \neq \beta$. 不失一般性, 假设 $f_\alpha \leq f_\beta$, 则有 $f_\alpha \leq \frac{|F|}{2} \leq \frac{2k\sigma + n - 3}{2} \leq n + k\sigma - 2$.

若 $f_\alpha = n + k\sigma - 2$ 则 $f_\beta \leq |F| - f_\alpha \leq (2k\sigma + n - 3) - (k\sigma + n - 2) = k\sigma - 1 \leq n + k\sigma - 3$, 与 $f_\alpha \leq f_\beta$ 矛盾. 因此 $f_\alpha \leq n + k\sigma - 3$. 接下来, 分以下两种情形讨论.

情形 2.1 $f_\beta \leq n + k\sigma - 3$, $f_\alpha, f_\beta \in \bar{I}$. 根据引理 2, $X_{k-1,n}^{\bar{I}} - F$ 是连通的. 从而 $X_{k-1,n}^{\bar{I}} - F$ 中存在一条路径连接 u 和 v .

情形 2.2 $f_\beta \geq n + k\sigma - 2$. 令 $G_0 = X_{k-1,n}^\beta - F_\beta$, $G_1 = X_{k,n} - V(X_{k-1,n}^\beta) - (F \setminus F_\beta)$. 类似于情形 1.2 中的证明, $X_{k,n} - F$ 中存在一条路径 P 连接 v 和 x , 其中 $x \in V(G_1)$. 我们有 $f_i \leq |F| - f_\beta \leq (2k\sigma + n - 3) - (k\sigma + n - 2) \leq n + k\sigma - 3$. 其中 $i \in I_{k,n} \setminus \{\beta\}$.

根据引理 2, 可得 G_1 是连通的, 故 G_1 中存在一条路径 Q 连接 u 和 x . 从而路径 (Q, P^{-1}) 是 $X_{k,n} - F$ 中连接 u 和 v 的一条路径.

综上所述, 对于任意的 $u, v \in V(X_{k,n} - F)$ 且 $u \neq v$, $X_{k,n} - F$ 中存在一条连接 u 和 v 的路径, 因此 $X_{k,n} - F$ 是连通的, 证毕.

定理 4 对于任意整数 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$, $\kappa'(X_{k,n}) = 2\kappa(X_{k,n}) - n = 2k\sigma + n - 2\kappa'(X_{k,n}) = 2\kappa(X_{k,n}) - n = 2k\sigma + n - 2$.

证 通过引理 5 可得 $\kappa'(X_{k,n}) \geq 2k\sigma + n - 2\kappa'(X_{k,n}) \geq 2k\sigma + n - 2$. 下面将证明 $\kappa'(X_{k,n}) \leq 2k\sigma + n - 2$ 成立.

对于任意的整数 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$, 如果 $X_{k,n}$ 中每个顶点都至少有一个无故障邻居, 则存在一条边 $(u, v) \in E(X_{k,n})$, 使得 $|\Gamma(X_{k,n}, \{u, v\})| = 2k\sigma + n - 2$ 且 $X_{k,n} - \Gamma(X_{k,n}, \{u, v\})$ 有且仅有两个连通分支: 其中一个连通分支为 $X_{k,n}[\{u, v\}]$, 另外一个连通分支为 $X_{k,n} - N(X_{k,n}[\{u, v\}])$.

首先证明当 $n=3, k=1$ 时该结论成立. 当 $n=3, k=1$ 时, 分为两种情况: $\sigma=1$ 或 $\sigma=n-1$.

当 $n=3, k=1, \sigma=1$ 时, 选择一条边 $(00, 01)$, 令故障集合为 $\Gamma(X_{1,3}, \{00, 01\}) = \{02, 10, 20\}$. 明显的 $|\Gamma(X_{1,3}, \{00, 01\})| = 3 = 2 \times 1 \times 1 + 3 - 2$. 容易验证 $X_{1,3} - \Gamma(X_{1,3}, \{00, 01\})$ 有且仅有两个连通分支: 其中一个连通分支为 $X_{1,3}[\{00, 01\}]$, 另外一个连通分支为 $X_{1,3} - N(X_{1,3}, \{00, 01\})$.

当 $n=3, k=1, \sigma=n-1$ 时, 选择一条边 $(00, 01)$, 令故障集合为 $\Gamma(X_{1,3}, \{00, 01\}) = \{02, 10, 11, 20, 21\}$. 明显的 $|\Gamma(X_{1,3}, \{00, 01\})| = 5 = 2 \times 1 \times (3-1) + 3 - 2$. 容易验证 $X_{1,3} - \Gamma(X_{1,3}, \{00, 01\})$ 有且仅有两个连通分支: 其中一个连通分支为 $X_{1,3}[\{00, 01\}]$, 另外一个连通分支为 $X_{1,3} - N(X_{1,3}, \{00, 01\})$.

接下来, 我们将 n 视作一个常量, 假设该结论在 $k=\tau-1 (\tau \geq 2)$ 时成立. 当 $k=\tau$ 时, 通过归纳假设, 证明存在一条边 $(u, v) \in E(X_{\tau-1,n}^a)$, 使得在 $X_{\tau-1,n}^a$ 中, $|\Gamma(X_{\tau-1,n}^a, \{u, v\})| = 2(\tau-1)\sigma + n - 2$, 并且 $X_{\tau-1,n}^a - N(X_{\tau-1,n}^a, \{u, v\})$ 有且仅有两个连通分支: 其中一个连通分支为 $X_{\tau-1,n}^a[\{u, v\}]$, 另外一个连通分支为 $X_{\tau-1,n}^a - N(X_{\tau-1,n}^a, \{u, v\})$. 其中 $0 \leq a \leq s$, 根据定义 2, 当 $\sigma=1$ 时 $s=t_{k-1,n}+1$, 当 $\sigma=n-1$ 时, $s=n$.

令 $G_0 = X_{\tau-1,n}^a - N(X_{\tau-1,n}^a, \{u, v\}) - \{u, v\}$, $G_1 = X_{\tau,n} - X_{\tau-1,n}^a - N((X_{\tau,n} - X_{\tau-1,n}^a), \{u, v\})$.

令 $F_1 = N((X_{\tau,n} - X_{\tau-1,n}^a), \{u, v\})$ 表示 $\{u, v\}$ 在 $X_{\tau-1,n}^a$ 外的邻居, 根据定义 2 有 $|F_1| = 2\sigma$. 令 $f_\beta = \max\{f_i \mid 0 \leq i \leq m, i \neq \alpha\}$, 则有 $f_\beta < |F_1| = 2\sigma \leq 2(\tau-1)\sigma + n - 2$, 因此 G_1 是连通的. 根据定义 2 可知 G_0 中至少存在一个点连接到 G_1 . 则 $X_{\tau,n} - \Gamma(X_{\tau,n}, \{u, v\})$ 有且仅有两个连通分支: 其中一个连通分支为 $X_{\tau,n}[\{u, v\}]$, 另一个连通分支为 $X_{\tau,n} - N(X_{\tau,n}, \{u, v\})$.

通过上述过程知 $\kappa'(X_{\tau,n}) \leq 2\tau\sigma + n - 2$ 成立.

综上所述, 当 $n \geq 3, k \geq 1, \sigma \in \{1, n-1\}$ 时, $\kappa'(X_{k,n}) = 2k\sigma + n - 2$, 证毕.

3 递归型数据中心网络基于限制故障集的单播算法

定理 4 证明了递归型通用网络上限制连通度的精确值, 本节将提出网络上基于限制故障顶点集合的单播算法 XFRouting.

Algorithm: XFRouting

Input: A network $X_{k,n}$, a global variable $\sigma \in \{1, n-1\}$, a faulty node set $F \subset V(X_{k,n})$ with $|F| \leq 2k\sigma + n - 3$, and two nodes $u, v \in V(X_{k,n})$.

Output: A path from u to v in $X_{k,n} - F$.

Let σ to be a global variable;

print (XFR($X_{k,n}$, F , u , v));

function XFR($X_{k,n}$, F , u , v , k)

1. if $(u, v) \in E(X_{k,n})$ or $k=0$ then

2. return (u, v) ;

3. else if $|F| \geq 2k\sigma + n - 2$ then

4. return (BFS($X_{k,n} - F$, u , v));

5. else if $F = \emptyset$ then

6. if $\sigma=1$ then

7. return DCellRouting ($X_{k,n}$, u , v);

8. else if $\sigma=n-1$

9. then return BCubeRouting ($X_{k,n}$, u , v);

10. end if

11. end if

12. Let mF as the first index of the subsets with the minimal number of fault nodes

13. Let $\alpha \leftarrow (u)_k$, $\beta \leftarrow (v)_k$;

14. if $\alpha = \beta$ then

15. if $\alpha \in mF$ then return (XFR($X_{k-1,n}^\alpha$, F_α , u , v , $k-1$));

16. else if $\alpha \notin mF$ then

17. for i in mF then

18. $P \leftarrow \text{XMapping}(u, X_{k,n}, X_{k-1,n}^i, F, mF)$;

19. $Q \leftarrow \text{XMapping}(v, X_{k,n}, X_{k-1,n}^i, F, mF)$;

20. break;

21. end for

22. if $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$ then

23. $S \leftarrow \text{XFR}(X_{k-1,n}^i, F, P[-1], Q[-1], k-1)$;

24. end if

25. return (P, S, Q^{-1}) ;

26. Find the 1st common node x from P and Q ;

27. return (Path(P , u , x), Path(Q^{-1} , x , v));

28. end if

29. else if $\alpha \neq \beta$ then

30. if $\alpha \in mF$ then

31. $Q \leftarrow \text{XMapping}(v, X_{k,n}, X_{k-1,n}^\alpha, F, mF)$;

```

32. if  $u \in V(Q)$  then return  $(\text{Path}(Q, u, v))$ ;
33. end if
34. return  $(\text{XFR}(X_{k-1,n}^a, F, u, Q[-1], k-1), Q)$ ;
35. else if  $\beta \in mF$  then
36.  $P \leftarrow \text{XMapping}(u, X_{k,n}, X_{k-1,n}^\beta, F, mF)$ ;
37. if  $v \in V(P)$  then return  $(\text{Path}(P, u, v))$ ;
38. end if
39. return  $(P, \text{XFR}(X_{k-1,n}^\beta, F, P[-1], v, k-1))$ ;
40. else then
41. for  $i$  in  $mF$  then
42.  $P \leftarrow \text{XMapping}(u, X_{k,n}, X_{k-1,n}^i, F, mF)$ ;
43.  $Q \leftarrow \text{XMapping}(v, X_{k,n}, X_{k-1,n}^i, F, mF)$ ;
44. break;
45. end for
46. if  $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$  then
47.  $S \leftarrow \text{XFR}(X_{k-1,n}^i, F, P[-1], Q[-1], k-1)$ ;
48. end if
49. return  $(P, S, Q^{-1})$ ;
50. Find the 1st node  $x$  from  $P$  and  $Q$ ;
51. return  $(\text{Path}(P, u, x), \text{Path}(Q^{-1}, x, v))$ ;
52. end if
53. end function

function  $\text{XMapping}(u, G_0, G_1, F, mF)$ 
1. for  $v$  in  $N(G_0 - F, u)$  and  $v$  in  $mF$  then return  $(u, v)$ ;
2. end for
3. for  $v$  in  $N(G_0 - F, u)$  then
4. for  $x$  in  $N(G_1 - F, v)$  and  $v$  in  $mF$  then
5. return  $(u, v, x)$ ;
6. end for
7. end for
8. for  $v$  in  $N(G_0 - F, u)$  then
9. for  $x$  in  $N(G_0 - F, v)$  then
10. for  $y$  in  $N(G_1 - F, x)$  and  $y$  in  $mF$  then
11. return  $(u, v, x, y)$ ;
12. end for
13. end for
14. end for
18. end function

```

接下来, 定理 5 将给出 XFRouting 算法的设计思路和执行过程, 并分析其时间复杂度.

定理 5 当 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$ 时, 对于任意的顶点集合 $F \subset V(X_{k,n})$ 且 $|F| \leq 2k\sigma + n - 3$, 算法 XFRouting 可以构造出 $X_{k,n} - F$ 中任意两个不同顶点间的一条无故障路径, 时间复杂度为 $O(k) \leq O(\lceil \log_2 |F| \rceil k^3)$.

证 当 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$ 时, 故障集合 $F \subset V(X_{k,n})$ 且满足 $|F| \leq 2k\sigma + n - 3$, XFRouting 算法可以构造出 $X_{k,n} - F$ 中任意两个不同顶点 u 到 v 的一条无故障路径. XFRouting 算法中包括 4 个函数: XFR, XMapping, DCellRouting^[12] 和 BcubeRouting^[13]. 其中实现函数 XMapping 构造出从 G_0 中的顶点 u 到 $G_1 - F$ 的一条无故障路径, 函数 DCellRouting 构造出当 $\sigma=1$ 时 $X_{k,n}$ 中 u 到 v 的一条路径, 函数 BcubeRouting 构造出当 $\sigma=n-1$ 时 $X_{k,n}$ 中 u 到 v 的一条路径. 函数 XFR 将构造的路径以一个向量的形式保存, 向量中的顶点采用长度为 $k+1$ 的字符串表示.

函数 XFR 第 1-2 行, 如果 u 和 v 存在边, 则直接返回边 (u, v) . 函数 XFR 第 3-4 行, 如果条件满足 $|F| \geq 2k\sigma + n - 2$, 则采用广度优先算法(BFS)构造一条无故障路径, 在最坏情形下时间复杂度为 $O((t_{k,n})^2)$. 函数 XFR 第 5-11 行, 当无故障顶点且 $\sigma=1$ 时函数 DCellRouting 构造一条无故障路径, 时间复杂度为 $O(k)$, 当无故障顶点且 $\sigma=n-1$ 时调用函数 BcubeRouting 构造一条无故障路径, 时间复杂度为 $O(k)$. 函数 XFR 第 12 行, 计算最小故障子集, 时间复杂度为 $O(k)$.

接下来分 5 种情况讨论函数 XFR 的时间复杂度, 令 $R = n + k\sigma - 1$, mF 表示故障数最小的子图前缀, s 表示子集的个数, 其中当 $\sigma=1$ 时, $s = t_{k-1,n} + 1$, 当 $\sigma=n-1$ 时, $s = n$. 函数 XFR 第 14-15 行, 当 $\alpha = \beta$ 且 $\alpha \in mF$ 时, $T(k) \leq T(k-1) + O(R)$; 函数 XFR 第 16-28 行, 当 $\alpha = \beta$ 且 $\alpha \notin mF$ 时, 则有 $T(k) \leq T(k-1) + O(R^3)$; 函数 XFR 第 29-34 行, 当 $\alpha \neq \beta$ 且 $\alpha \in mF$ 时, 则有 $T(k) \leq T(k-1) + O(R^3)$; 函数 XFR 第 35-39 行, 当 $\alpha \neq \beta$ 且 $\beta \in mF$ 时, 则有 $T(k) \leq T(k-1) + O(R^3)$; 函数 XFR 第 40-52 行, 当 $\alpha \neq \beta, \alpha \notin mF$ 且 $\beta \notin mF$ 时则有 $T(k) \leq T(k-1) + O(R^3)$.

因此可得:

$$\begin{aligned} T(k) &\leq \max\{O(\lceil \log_s |F| \rceil R^3), O(R^3), O(R)\} \leq \\ &\max\left\{\sum_{i=1}^{\log_s |F|} O((R-i+1)^3) + O(R - \log_s |F|), O(R^3), O(R)\right\} \leq \\ &\max\{O(\log_s |F| R^3), O(R^3), O(R)\} \end{aligned}$$

即 $O(k) \leq O(\log_s |F| k^3)$, 证毕.

接下来, 定理 6 分析 XFRouting 算法构造的路径长度的最大值.

定理 6 当 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$ 时, 对于任意的顶点集合 $F \subset V(X_{k,n})$ 且 $|F| \leq 2k\sigma + n - 3$, XFRouting 算法可以构造出 $X_{k,n} - F$ 中任意两个不同顶点间的一条无故障路径, 其路径长度的上界为

$$L(k) \leq \begin{cases} 2^k + 5 & \text{若 } \sigma = 1 \\ 5\log_s |F| + k - 1 & \text{若 } \sigma = n - 1 \end{cases}$$

证 令 $L(k)$ 表示 XFRouting 算法构造得到的路径的长度. 当 $|F|=0$ 时, 令 $D(X_{k,n})$ 表示图 $X_{k,n}$ 的直径, 根据文献[12]和文献[13], 则有

$$D(X_{k,n}) = \begin{cases} 2^{k+1} - 1 & \text{若 } \sigma = 1 \\ k + 1 & \text{若 } \sigma = n - 1 \end{cases}$$

当 $0 < |F| \leq 2k\sigma + n - 3$ 时, 分为以下情形讨论:

函数 XFR 第 14-15 行, $L(k) = L(k-1)$; 函数 XFR 第 16-28 行, $L(k) \leq L(k-1) + 6$; 函数 XFR 第 29-34 行, $L(k) \leq L(k-1) + 3$; 函数 XFR 第 35-39 行, $L(k) \leq L(k-1) + 3$; 函数 XFR 第 40-52 行, $L(k) \leq L(k-1) + 6$.

令

$$d = \log_s |F|$$

则有

$$L(k) \leq \begin{cases} \max\{6d + 2^{k+1} - 1, 3d + 2^{k+1} - 1, 2^k - 1\} & \text{若 } \sigma = 1 \\ \max\{6d + k + 1 - d, 3d + k + 1 - ds, k\} & \text{若 } \sigma = n - 1 \end{cases}$$

当 $\sigma=1$ 时 $s=t_{k-1,n}+1\gg|F|$, 则 $d=\log_s|F|<1$. 因此有

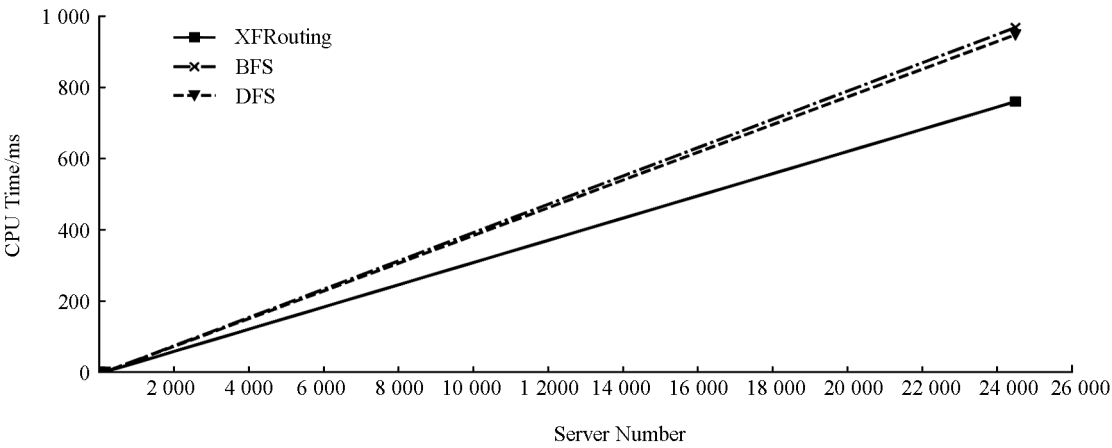
$$L(k)\leqslant\begin{cases}2^{k+1}+5&\text{若}\sigma=1\\5\log_s|F|+k-1&\text{若}\sigma=n-1\end{cases}$$

证毕.

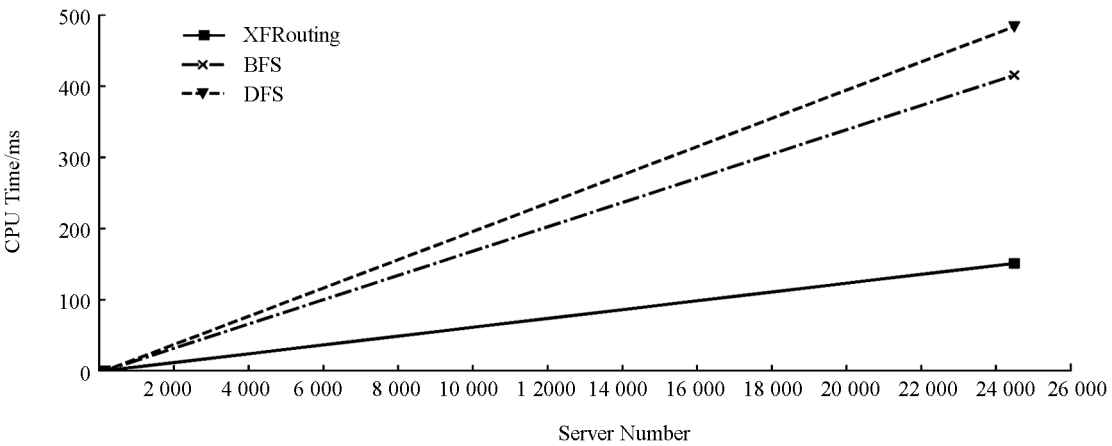
综上所述, 本文提出的时间复杂度为 $O(\log_s|F|k^3)$ 的算法 XFR 与采用时间复杂度为 $O((t_{k,n})^2)$ 的广度优先搜索算法相比, 具有明显的优越性.

4 模拟实验及结果分析

本文提出的 XFRouting 算法采用 Python 语言编程实现, 实验通过设备配置为 Intel(R) Core(TM) i5-4200U CPU 1.61GHz, 8 GB 内存的计算机来评估算法的性能并分析实验结果. 实验中顶点故障和测试点都是随机生成的. 给定随机生成的限制故障集合 $F\subset V(X_{k,n})$ 且 $|F|\leqslant 2k\sigma+n-3$, 给定 $\sigma=1, 1\leqslant k\leqslant 3, n=3$, 网络最大规模为 24 492 个顶点, 将使用 XFRouting 算法构造出 $X_{k,n}-F$ 上一条单播路径花费的 CPU 时间分别与广度优先 BFS 算法和深度优先 DFS 算法所得的结果进行比较. 将 XFRouting 算法和 BFS 算法、DFS 算法重复运行 1 000 次, 随机生成故障顶点集合, 构建任意两个顶点之间的无故障路径, 最坏情况如图 1(a)所示, 平均情况如图 1(b)所示.



a. 最坏情况下花费的CPU时间

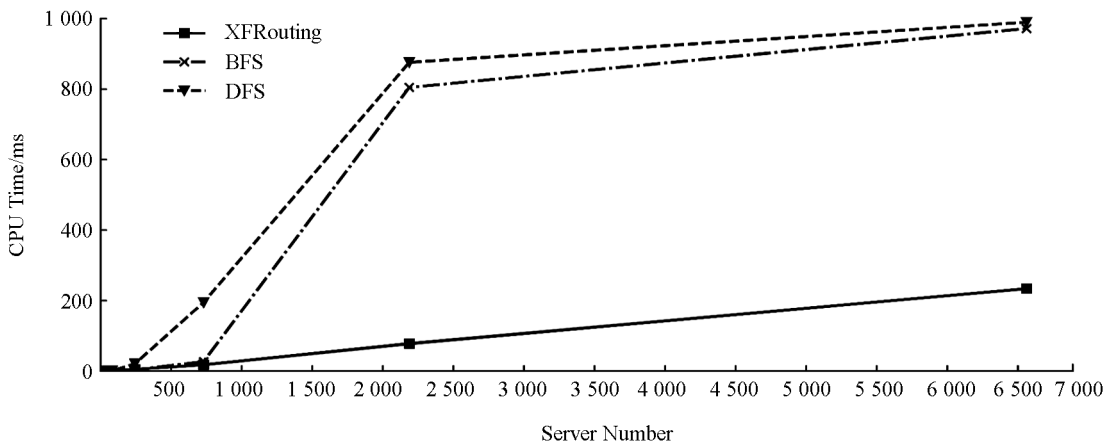


b. 平均情况下花费的CPU时间

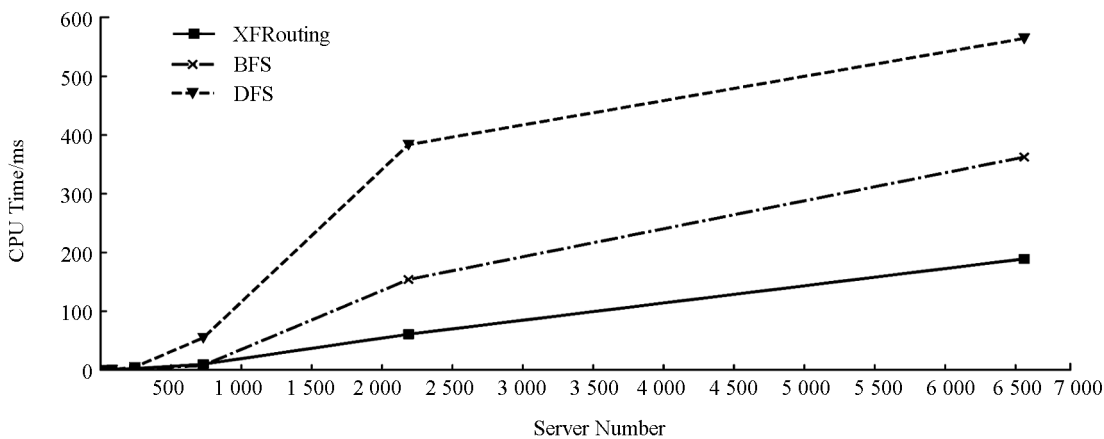
图 1 $\sigma=1$ 时 3 种算法花费的 CPU 时间

给定随机生成的限制故障集合 $F\subset V(X_{k,n})$ 且 $|F|\leqslant 2k\sigma+n-3$, 给定 $\sigma=n-1$ 时, $1\leqslant k\leqslant 7, n=3$, 网络最大规模为 6 561 个顶点. 将 XFRouting 算法构造出 $X_{k,n}-F$ 上一条单播路径花费的 CPU 时间分别与

BFS 算法、DFS 算法进行比较. 将 XFRouting 算法、BFS 算法和 DFS 算法重复运行 1 000 次, 随机生成故障顶点集合, 构建任意两个顶点之间的无故障路径, 最坏情况如图 2(a)所示, 平均情况如图 2(b)所示.



a. 最坏情况下花费时间CPU时间



b. 平均情况下花费的CPU时间

图 2 $\sigma=n-1$ 时 3 种算法花费的 CPU 时间

根据实验结果, 构造 $X_{k,n}-F$ 上两个顶点间的一条单播路径所花费的 CPU 时间随着维度 k 的增加逐步增多. 根据实验结果, 当 $\sigma=1, n=3$ 且 $k=3$ 时, XFRouting 算法、BFS 算法和 DFS 算法所花费的最坏 CPU 时间分别为 760 ms, 960 ms 和 948 ms, 平均 CPU 时间分别为 151 ms, 415 ms 和 483 ms; 当 $\sigma=n-1, n=3$ 且 $k=7$ 时, XFRouting 算法、BFS 算法和 DFS 算法所花费的最坏 CPU 时间分别为 234 ms, 972 ms 和 990 ms, 平均 CPU 时间分别为 189.2 ms, 362.6 ms 和 564.7 ms. 由实验数据可以得到, 本文所提出的 XFRouting 算法在执行效率上优于广度优先搜索算法 BFS 和深度优先搜索算法 DFS.

5 结 论

数据中心网络的容错性是评估其网络性能的重要因素, 如果用连通度来评估其容错性能, 会低估数据中心网络的容错性能. 基于每个顶点都至少有一个无故障邻居这一条件下的限制连通度, 能够更加精确地度量数据中心网络的容错性. 本文提出了一类递归型数据中心网络(RDCN), 与传统树形数据中心网络相比, 该网络具有更好的网络带宽和网络容错性能. 证明了当 $k \geq 1, n \geq 3$ 且 $\sigma \in \{1, n-1\}$ 时, 其限制连通度为 $2k\sigma+n-2$, 这一结果近于其连通度的 2 倍; 接着提出了该情形下时间复杂度为 $O(\lceil \log_e |F| \rceil k^3)$ 的容错单播路由算法, 证明了在最坏情况下构造出容错单播路由最长路径长度的上界. 仿真实验结果表明 XFRouting 算法在执行效率上优于广度优先搜索算法和深度优先搜索算法.

参考文献:

- [1] 李文信, 齐 恒, 徐仁海, 等. 数据中心网络流量调度的研究进展与趋势 [J]. 计算机学报, 2020, 43(4): 600-617.
- [2] 陆菲菲, 谢向辉, 郭得科, 等. 一种构建超大规模数据中心的模块化网络结构 [J]. 软件学报, 2017, 28(8): 2196-2213.
- [3] GU M M, HAO R X, ZHOU S M. Fault Diagnosability of Data Center Networks [J]. Theoretical Computer Science, 2019, 776: 138-147.
- [4] HARARY F. Conditional Connectivity [J]. Networks, 1983, 13(3): 347-357.
- [5] ESFAHANIAN A H. Generalized Measures of Fault Tolerance with Application to N-Cube Networks [J]. IEEE Transactions on Computers, 1989, 38(11): 1586-1591.
- [6] OH A D, CHOI H A. Generalized Measures of Fault Tolerance in N-Cube Networks [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1993, 4(6): 702-703.
- [7] WANG X, FAN J X, ZHOU J Y, et al. The Restricted H-Connectivity of the Data Center Network DCell [J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 203: 144-157.
- [8] 王 喜, 何福男, 张书奎. 交错立方体上限制容错单播算法的研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(9): 51-59.
- [9] WEI C C, HSIEH S Y. H-Restricted Connectivity of Locally Twisted Cubes [J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 217: 330-339.
- [10] NING W T. The H-Connectivity of Exchanged Crossed Cube [J]. Theoretical Computer Science, 2017, 696: 65-68.
- [11] LI Z H, YANG Y Y. RRect: a Novel Server-Centric Data Center Network with High Power Efficiency and Availability [J]. IEEE Transactions on Cloud Computing, 2020, 8(3): 914-927.
- [12] ZHANG Z, DENG Y H, MIN G Y, et al. HSDC: a Highly Scalable Data Center Network Architecture for Greater Incremental Scalability [J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2019, 30(5): 1105-1119.
- [13] GUO C X, WU H T, TAN K, et al. Dcell: a Scalable and Fault-Tolerant Network Structure for Data Centers [C] // Proceedings of the ACM SIGCOMM 2008 conference on Data communication-SIGCOMM '08. New York: ACM Press, 2008: 75 - 86.
- [14] GUO C, LU G, LI D, et al. BCube: a High Performance, Server-Centric Network Architecture for Modular Data Centers [C] // Proceedings of Special Interest Group on Data Communication (SIGCOMM). New York: IEEE Press, 2009.
- [15] 王 喜. DCell 网络上的路径覆盖和限制连通性研究 [D]. 苏州: 苏州大学, 2015.

责任编辑 张 构