第 43 卷第 10 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2021年10月
Vol. 43　No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.10.001

## 多粒度与知识发现专题

**【主持人语】**　　　　**主持人：钱　进**

随着互联网和数据存储技术的快速发展，各行各业积累了大规模数据，如何从这些复杂的数据中提取出有用的知识是一个迫切待解决的问题．多粒度知识发现就是对大规模复杂数据进行信息粒化，以及构建与融合多个粒结构，从中挖掘出可用的知识并形成有效决策和推荐．本专题主要针对粒计算与知识发现领域中的多粒度模型构建、知识表示和精准推荐等一些问题进行了相关研究，这些新颖工作将为人工智能领域有关多粒度知识发现问题的进一步探索提供新的研究思路和方向．

# 局部多粒度覆盖粗糙集

谢德华，　刘财辉，　凌　敏

赣南师范大学 数学与计算机科学学院，江西 赣州 341000

**摘要**：为了拓展多粒度覆盖粗糙集模型，本文利用覆盖粗糙集中最小描述转化后的粗糙集经典表示，并结合局部粗糙集的概念，提出了多粒度空间下的局部多粒度覆盖粗糙集模型．在此基础上，深入探讨了在多粒度空间与单粒度空间下模型的内在联系，讨论了局部多粒度覆盖粗糙集的基本性质，研究了在乐观策略和悲观策略下的局部多粒度覆盖粗糙集上、下近似集的关系．研究结果表明本文的模型在特定条件下可转化为多粒度覆盖粗糙集模型，是对原有模型的有效拓展．

**关　键　词**：近似表示；多粒度；覆盖粗糙集；局部粗糙集

**中图分类号**：**TP391**　　**文献标志码**：**A**

**文 章 编 号**：1673－9868(2021)10－0001－09　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

# Local Multi-granulation Covering-Based Rough Sets

XIE Dehua，　LIU Caihui，　LING Min

*Department of Mathematics and Computer Science，Gannan Normal University，Ganzhou Jiangxi 341000，China*

**Abstract**：In order to expand the multi-granularity covering-based rough set model，this paper proposes a local multi-granularity covering-based rough set model in multi-granularity space by using the classical rep-

收稿日期：2021－05－25
基金项目：国家自然科学基金项目(62166001，61663002)；江西省自然科学基金项目(20202BAB202010)．
作者简介：谢德华，硕士研究生，主要从事粗糙集、机器学习与数据挖掘的研究．
通信作者：刘财辉，教授．
主持人简介：钱　进，华东交通大学软件学院教授，硕士生导师，中国人工智能学会粒计算与知识发现专业委员会常务委员，江西省“双千计划”入选者．

resentation of the minimum description of covering-based rough set and the concept of the local rough set. On this basis, the internal relationship between the model in multi-granularity space and the single granularity space is discussed, the basic properties of the local multi-granularity covering-based rough set are discussed, and the relationship between the upper approximation sets and the lower approximation sets of local multi-granularity covering-based rough set under the optimistic strategy and the pessimistic strategy is studied. The results show that the proposed model can be transformed into the multi-granularity covering-based rough set model under the certain conditions, which is an effective extension of the original model.

**Key words**: approximate representation; multi-granularity; covering-based rough set; local rough set

## 1 研究背景

将经典粗糙集理论扩展至多粒度空间下的粗糙集模型[1-2]，在理论研究和实际应用上愈加重要，广泛应用于特征选择、知识获取、决策分析、模式识别和医疗诊断等领域[3-6]．因实际问题中数据的多样性，经典粗糙集在实际应用场景中具有局限性，各类粗糙集扩展模型的研究成为一个研究热潮，如：决策粗糙集模型、变精度粗糙集模型、概率粗糙集模型等[7-9]．文献[10]研究了多粒度粗糙集模型的代数结构．文献[11]对模糊空间下的多粒度粗糙集模型进行了探讨．文献[12]研究了覆盖空间下的多粒度粗糙集模型，且利用元素的最小描述对不同多粒度覆盖粗糙集进行比较，发现了乐观多粒度和悲观多粒度与平均多粒度覆盖粗糙集之间的关系．文献[13]提出了基于模糊邻域多粒度粗糙集的特征选择算法，从信息的角度提出了基于模糊邻域熵的不确定性度量．文献[14]提出了4类基于覆盖的乐观(悲观)多粒度模糊粗糙集模型，引入了模糊互补$\beta$-邻域簇的概念．文献[15]研究了基于矩阵的动态优势多粒度粗糙集(DMGRSs)方法，更新了具有演化数据的动态有序信息系统中的多粒度近似．随着大数据的发展，为了提升精确率，文献[16-17]提出了局部粗糙集模型，提出了决策理论粗糙集在大数据背景下目标概念近似表示的改进，以及局部多粒度决策粗糙集．在局部粗糙集的基础上，文献[18]提出了基于不完备信息系统下的局部粗糙集理论，将局部粗糙集从完备信息系统扩展至不完备信息系统．文献[16-18]的研究都基于等价关系．文献[19]基于相容关系，探讨了乐观多粒度和悲观多粒度的局部相容粗糙集．文献[20]研究了相似关系下的局部粗糙集模型．本文从信息概念和存在概念之间的交叉角度，利用覆盖粗糙集理论基础[21-25]，提出了一种在覆盖近似空间下的局部粗糙集模型：局部覆盖粗糙集，以及局部乐观多粒度覆盖粗糙集和局部悲观多粒度粗糙集．本文探讨了在多粒度空间与单粒度空间下模型的内在联系，和局部多粒度覆盖粗糙集的基本性质，深入研究了对乐观多粒度和悲观多粒度下的局部多粒度覆盖粗糙集中上、下近似集的关系．研究结果表明，局部多粒度覆盖粗糙集在特定情况下可退化为多粒度覆盖粗糙集模型，是对原有模型的有效拓展．

## 2 理论基础

近似概念是覆盖近似空间中的知识表示．文献[21]提出的多粒度覆盖粗糙集模型将多粒度的思想引入覆盖粗糙集模型中，采用一簇覆盖，提出了一种多粒度覆盖粗糙集模型．本节介绍经典多粒度覆盖粗糙集的相关基础概念．

### 2.1 覆盖粗糙集

**定义1**[3-4] 设$U$为论域，$C$为$U$的子集簇，如果$C$中所有的集合均不为空，且有$\cup C=U$，那么称$C$为$U$上的覆盖．

**定义2**[3] 设$U$为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$为论域$U$上的覆盖，对于$\forall x\in U$，$x$在覆盖近似空间$\langle U, C\rangle$中的最小描述$MdC(x)$为

$$MdC(x)=\{C_i\in C: x\in C_i \wedge \forall C_j，且\ x\in C_j \wedge S\subseteq C_i \Rightarrow C_i=C_j\} \tag{1}$$

**例 1**　给定覆盖近似空间 $\langle U, C\rangle$，其中 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$C_1, C_2 \in C$，$C_1=\{\{1,2,4,5,7,8\},\{2,5,8\},\{3,5,6,9\}\}$，$C_2=\{\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\},\{7,8,9\}\}$. 最小描述和覆盖的近似集可以由以下计算得到：

根据定义 2 有

$$MdC_1(1)=MdC_1(4)=MdC_1(7)=\{\{1,2,4,5,7,8\}\}$$
$$MdC_1(2)=MdC_1(8)=\{\{2,5,8\}\}$$
$$MdC_1(5)=\{\{2,5,8\},\{3,5,6,9\}\}$$
$$MdC_1(3)=MdC_1(6)=MdC_1(9)=\{\{3,5,6,9\}\}$$
$$MdC_2(1)=MdC_2(2)=MdC_2(3)=\{\{1,2,3\}\}$$
$$MdC_2(4)=MdC_2(5)=MdC_2(6)=\{\{4,5,6,7,8\}\}$$
$$MdC_2(7)=MdC_2(8)=\{\{4,5,6,7,8\},\{7,8,9\}\}$$
$$MdC_2(9)=\{\{7,8,9\}\}$$

**定义 3**[20]　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域 $U$ 上的覆盖，对于 $\forall X \in U$，$X$ 在覆盖近似空间 $\langle U, C\rangle$ 中的覆盖粗糙集下近似和覆盖粗糙集上近似分别为 $\underline{C}(X)$ 和 $\overline{C}(X)$：

$$\underline{C}(X)=\{x \in U\text{：存在 } C_i \in MdC(x)\text{，使得 } C_i \subseteq X\} \tag{2}$$

$$\overline{C}(X)=\{x \in U\text{：} \forall C_i \in MdC(x),\ C_i \cap X \neq \varnothing\} \tag{3}$$

该形式下的覆盖粗糙集将由最大描述和最小描述转化为粗糙集经典表示，当覆盖关系变成划分关系时，覆盖粗糙集即为经典粗糙集.

## 2.2　局部粗糙集

这里对文献[16]中提出的局部粗糙集的定义作基本介绍.

**定义 4**　令 $\langle U, \leqslant\rangle$ 为偏序集，$\leqslant$ 是论域中的一种偏序关系，对任意的 $x, y \in U$，$D(y/x)$ 有：

(a) $0 \leqslant D(y/x) \leqslant 1$；

(b) $x \leqslant y \Rightarrow D(y/x)=1$；

(c) $x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow D(x/y) \leqslant D(x/z)$.

其中 $D(Y/X)=\dfrac{|X \cap Y|}{|X|}$ 为包含度，$|X|$ 表示集合 $X$ 内的元素个数，同时有

$$X \subseteq Y \Rightarrow D(X/Z) \leqslant D(Y/Z)$$

**定义 5**[16]　令 $(U, R)$ 为一个近似空间，$D$ 是定义在 $P(U) \times P(U)$ 上的包含度，$P(U)$ 为论域 $U$ 的幂集，则对任意 $\forall X \subseteq U$，有

$$\underline{R}_\alpha(X)=\{x\text{：} D(X/[x]_R) \geqslant \alpha,\ x \in X\} \tag{4}$$

$$\overline{R}_\beta(X)=\bigcup\{x\text{：} D(X/[x]_R) > \beta,\ x \in X\} \tag{5}$$

$\langle \underline{R}_\alpha(X), \overline{R}_\beta(X)\rangle$ 称为局部粗糙集，$\underline{R}_\alpha(X)$ 称为集合 $X$ 的 $\alpha$-下近似集，$\overline{R}_\beta(X)$ 称为集合 $X$ 的 $\beta$-上近似集. 当且仅当 $\alpha=1$，$\beta=0$ 时，局部粗糙集就退化为经典粗糙集.

## 2.3　多粒度覆盖粗糙集[23-26]

文献[21]提出的多粒度覆盖粗糙集模型，结合多重二元关系，将多粒度空间引入文献[10]所提出的覆盖粗糙集模型中，采用一簇而非单个的覆盖，提出了一种新的多粒度覆盖粗糙集模型. 以下是相关的基本介绍：

**定义 6**[3]　在近似空间 $(U, C)$ 上，$C_1, C_2, \cdots, C_m$ 为该近似空间的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，$X$ 的乐观多粒度覆盖下近似集、上近似集分别记为 $\underline{L^{\sum_{i=1}^{m} C_i(X)}}$ 和 $\overline{L_{\sum_{i=1}^{m} C_i(X)}}$，有：

$\underline{L^{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}}=$

$\{x\in U$:(存在 $C_{1j}\in MdC_1(x)$,使得 $C_{1j}\subseteq X)\vee\cdots\vee$(存在 $C_{mj}\in MdC_m(x)$,使得 $C_{mj}\subseteq X)\}$ (6)

$$\overline{L_{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}}=U-\underline{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}=\sim\underline{\sum_{i=1}^{m}C_i}(\sim X)\tag{7}$$

**定理 1** $\underline{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{C_i}(X)$,$\overline{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{C_i}(X)$

由上述结论可以得到多粒度覆盖上近似与覆盖上近似之间的关系,以及多粒度覆盖下近似与覆盖下近似之间的关系.

**定义 7** 在近似空间$(U,C)$上,$C_1,C_2,\cdots,C_m$ 为该近似空间上的一簇覆盖,对于 $\forall X\subseteq U$,$X$ 的悲观多粒度覆盖下近似集、上近似集分别记为$\underline{B^{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}}$ 和$\overline{B_{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}}$,有:

$$\underline{B^{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}}=\{x\in U:(\forall C_{1j}\in MdC_1(x),\text{有 }C_{1j}\subseteq X)\wedge\cdots\wedge(\forall C_{mj}\in MdC_m(x),\text{有 }C_{mj}\subseteq X)\}\tag{8}$$

$\overline{B_{\sum_{i=1}^{m}C_i(X)}}=$

$\{x\in U$:(存在 $C_{1j}\in MdC_1(x)$,使得 $C_{1j}\cap X\neq\varnothing)\vee\cdots\vee$(存在 $C_{mj}\in MdC_m(x)$,使得 $C_{mj}\cap X\neq\varnothing)\}$ (9)

**定义 8**[21] 设 $U$ 为论域,$C1=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 和 $C2=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 为论域上的两个覆盖. $\forall x\subseteq U$,若对于 $\forall Ci\in MdC1(x)$,都存在 $Cj\in MdC2(x)$,使得 $Cj\subseteq Ci$,则称覆盖 $C2$ 比覆盖 $C1$ 细,记为 $C2\preccurlyeq C1$. 若 $C2\preccurlyeq C1$ 且 $C1\preccurlyeq C2$,则称覆盖 $C2$ 与覆盖 $C1$ 相等,记为 $C2=C1$;否则为不相等,记为 $C2\neq C1$. 若 $C2\preccurlyeq C1$ 且 $C2\neq C1$,则称覆盖 $C2$ 较覆盖 $C1$ 严格细,记为 $C2\prec C1$.

**定理 2**[21] 设 $U$ 为论域,$C1=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 和 $C2=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 为论域上的两个覆盖,若 $C2\preccurlyeq C1$,则对 $\forall X\subseteq U$,有$\underline{C1}(X)\subseteq\underline{C2}(X)$ 和$\overline{C2}(X)\subseteq\overline{C1}(X)$.

## 3 局部多粒度覆盖粗糙集模型

本节提出一种新的粗糙集扩展模型:局部覆盖粗糙集. 并在此基础上扩展至多粒度空间,形成多粒度局部覆盖粗糙集. 讨论单粒度空间和多粒度空间下的局部覆盖粗糙集模型及其性质,并与覆盖粗糙集对比且加以说明.

### 3.1 局部覆盖粗糙集

**定义 9** 在近似空间$(U,C)$上,令 $U$ 为论域,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为该近似空间(论域)的一簇覆盖,对于 $\forall X\subseteq U$,$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$,$X$ 在覆盖近似空间$(U,C)$中的局部覆盖粗糙集的下近似集、上近似集分别为:

$$\underline{C}_\alpha(X)=\{x\in X:\text{存在 }C_i\in MdC_i(x),\text{使得 }D(X/[x]_{C_i})\geqslant\alpha,C_i\subseteq X\}\tag{10}$$

$$\overline{C}_\beta(X)=\{x\in X:\forall C_i\in MdC_i(x),D(X/[x]_{C_i})>\beta,C_i\cap X\neq\varnothing\}\tag{11}$$

其中,$\underline{C}_\alpha(X)$ 称为 $X$ 的局部覆盖粗糙集 $\alpha$- 下近似集,$\overline{C}_\beta(X)$ 称为局部覆盖粗糙集 $\beta$- 上近似集,其边界集为 $BN(X)=\overline{C}_\beta(X)-\underline{C}_\alpha(X)$. 当 $BN(X)=\varnothing$ 时,称 $X$ 是可定义的,否则是不可定义的. 当且仅当 $\alpha=1$,$\beta=0$ 时,局部覆盖粗糙集退化为覆盖粗糙集,即:

$$\underline{C}_\alpha(X)=\{x\in X:\text{存在 }C_i\in MdC_i(x),\text{使得 }C_i\subseteq X,D(X/[x]_{C_i})\geqslant1\}=$$

$$\{x\in X:\text{存在 }C_i\in MdC_i(x),\text{使得 }C_i\subseteq X\}=\underline{C}(X)$$

$$\overline{C}_\beta(X)=\{x\in X:\forall C_i\in MdC_i(x),C_i\cap X\neq\varnothing,D(X/[x]_{C_i})>0\}=$$

$$\{x \in U: \forall C_i \in MdC(x), C_i \cap X \neq \emptyset\} = \overline{C}(X)$$

这说明局部覆盖粗糙集并没有改变原有覆盖关系下的目标近似，与原有的覆盖粗糙集的近似表示一致.

**例 2**　在例 1 的假设条件下，令 $\alpha = 0.6$，$\beta = 0.4$，令 $X = \{1, 2, 5, 8\}$，则局部覆盖粗糙集的上下近似集为：

$$[1]_{C_1} = \{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}\} \qquad [2]_{C_1} = \{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{2, 5, 8\}\}$$

$$[5]_{C_1} = \{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 5, 6, 9\}\}$$

$$[8]_{C_1} = \{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{2, 5, 8\}\}$$

$$D(X/[1]_{C_1}) = \frac{|X \cap [1]_{C_1}|}{|[1]_{C_1}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad D(X/[2]_{C_1}) = \frac{|X \cap [2]_{C_1}|}{|[2]_{C_1}|} = \frac{7}{9}$$

$$D(X/[5]_{C_1}) = \frac{|X \cap [5]_{C_1}|}{|[5]_{C_1}|} = \frac{8}{13} \qquad D(X/[8]_{C_1}) = \frac{|X \cap [8]_{C_1}|}{|[8]_{C_1}|} = \frac{7}{9}$$

根据定义 8，可得 $X$ 关于覆盖 $C_1$ 的局部覆盖 $\alpha$- 下近似集为 $\underline{C}_{1(0.6)}(X) = \{1, 2, 5, 8\}$，局部覆盖 $\beta$- 上近似集为 $\overline{C}_{1(0.4)}(X) = \{1, 2, 5, 8\}$.

$$[1]_{C_2} = \{\{1, 2, 3\}\} \qquad [2]_{C_2} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$[5]_{C_2} = \{\{4, 5, 6, 7, 8\}\} \qquad [8]_{C_2} = \{\{4, 5, 6, 7, 8\}, \{7, 8, 9\}\}$$

$$D(X/[1]_{C_2}) = \frac{|X \cap [1]_{C_2}|}{|[1]_{C_2}|} = \frac{2}{3} \qquad D(X/[2]_{C_2}) = \frac{|X \cap [2]_{C_2}|}{|[2]_{C_2}|} = \frac{2}{3}$$

$$D(X/[5]_{C_2}) = \frac{|X \cap [5]_{C_2}|}{|[5]_{C_2}|} = \frac{2}{5} \qquad D(X/[8]_{C_2}) = \frac{|X \cap [8]_{C_2}|}{|[8]_{C_2}|} = \frac{3}{8}$$

所以，$X$ 关于覆盖 $C_2$ 的局部覆盖 $\alpha$- 下近似集为 $\underline{C}_{2(0.6)}(X) = \{1, 2\}$，局部覆盖 $\beta$- 上近似集为 $\overline{C}_{2(0.4)}(X) = \{1, 2, 5\}$.

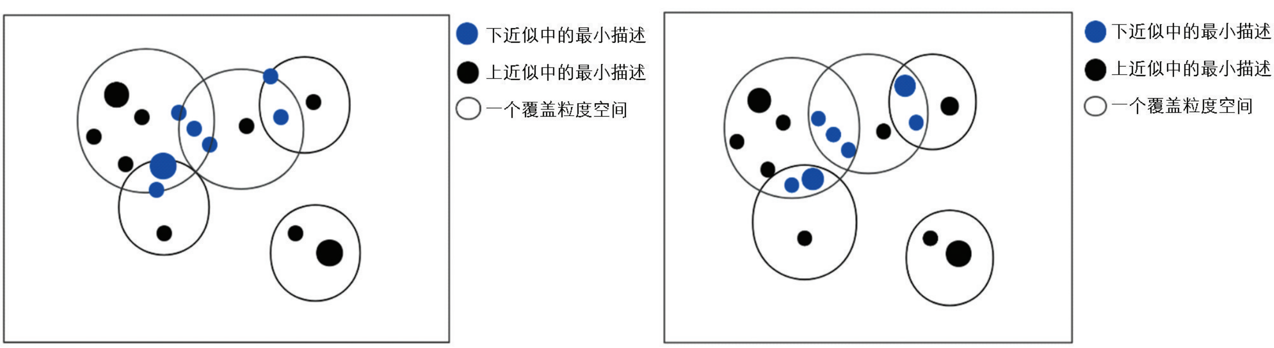
从上述计算结果看，

$$\underline{C}_1(X) \prec \underline{C}_{1(0.6)}(X) \qquad \overline{C}_1(X) \succ \overline{C}_{1(0.4)}(X)$$

这表明对于集合 $X$，其正域有增加，意味着在近似表示上可以更加精确. 而对于 $C_2$，$X$ 在 $C_2$ 的覆盖粗糙集上是完全不可定义的，但在 $C_2$ 的局部覆盖粗糙集上可定义，表明对于集合 $X$，局部覆盖粗糙集在知识近似表示方面是更精准的.

### 3.2　局部多粒度覆盖粗糙集

将单个粒度下的局部覆盖粗糙集扩展至多个粒度空间下得到的局部多粒度覆盖粗糙集. 而在多粒度近似空间中，多粒度覆盖粗糙集与局部多粒度覆盖粗糙集的表示见图 1.




(a) 多粒度覆盖粗糙集　　(b) 局部多粒度覆盖粗糙集

**图 1**　多粒度覆盖粗糙集与局部多粒度覆盖粗糙集

其近似集定义表示及其性质的分析如下：

**定义 10**　在覆盖近似空间$(U, C)$上，$U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，$0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$，$X$ 在覆盖近似空间$(U, C)$上的局部乐观多粒度覆盖粗糙集的下、上近似集分别表示为：

$$\underline{O^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}}} = \{x \in X: (\text{存在 } C_{1j} \in MdC_1(x), \text{使得 } D(X/[x]_{C_{1j}}) \geqslant \alpha, C_{1j} \subseteq X) \vee \cdots \vee (\text{存在 } C_{nj} \in MdC_n(x), \text{使得 } D(X/[x]_{C_{nj}}) \geqslant \alpha, C_{nj} \subseteq X)\} \tag{12}$$

$$\overline{O_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}}} = \{x \in X: (\forall C_{1j} \in MdC_1(x), D(X/[x]_{C_{1j}}) > \beta, C_{1j} \cap X \neq \varnothing) \wedge \cdots \wedge (\forall C_{nj} \in MdC_n(x), D(X/[x]_{C_{nj}}) > \beta, C_{nj} \cap X \neq \varnothing)\} \tag{13}$$

**定义 11**　在覆盖近似空间$(U, C)$上，$U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，$0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$，$X$ 在覆盖近似空间$(U, C)$上的局部悲观多粒度覆盖粗糙集的下、上近似集分别表示为：

$$\underline{P^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}}} = \{x \in X: (\forall C_{1j} \in MdC_1(x), D(X/[x]_{C_{1j}}) \geqslant \alpha, C_{1j} \subseteq X) \wedge \cdots \wedge (\forall C_{nj} \in MdC_n(x), D(X/[x]_{C_{nj}}) \geqslant \alpha, C_{nj} \subseteq X)\} \tag{14}$$

$$\overline{P_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}}} = \{x \in X: (\text{存在 } C_{1j} \in MdC_1(x), \text{使得 } D(X/[x]_{C_{1j}}) > \beta, C_{1j} \cap X \neq \varnothing) \vee \cdots \vee (\text{存在 } C_{nj} \in MdC_n(x), \text{使得 } D(X/[x]_{C_{nj}}) > \beta, C_{nj} \cap X \neq \varnothing)\} \tag{15}$$

**例 3**　在例 1 的假设条件下，当 $X=\{1, 2, 5, 8\}$ 时，根据定义 6 可计算覆盖 $C$ 的乐观多粒度覆盖粗糙集的下近似集与上近似集：

$$\underline{\sum_{i=1}^{2} C_i(X)^{\alpha}} = \underline{C_1}(X) \cup \underline{C_2}(X) = \{\{2, 5, 8\}\} \cup \varnothing = \{\{2, 5, 8\}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{2} C_i(X)^{\beta}} = \overline{C_1}(X) \cap \overline{C_2}(X) =$$

$$\{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{2, 5, 8\}\} \cap \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \{7, 8, 9\}\} =$$

$$\{\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{7, 8\}, \{5, 8\}, \{2\}, \{8\}\}$$

根据定义 10 以及例 2 可得局部乐观多粒度覆盖粗糙集的下近似集、上近似集：

$$\underline{\sum_{i=1}^{2} C_i(X)^{(0.6)}} = \{\underline{C_1}(X)^{(0.6)} \cup \underline{C_2}(X)^{(0.6)}\} =$$

$$\{\{1, 2, 5, 8\} \cup \{1, 2\}\} = \{\{1, 2, 5, 8\}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{2} C_i(X)^{(0.4)}} = \{\overline{C_1}(X)^{(0.4)} \cap \overline{C_2}(X)^{(0.4)}\} =$$

$$\{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \cap \{\{1, 2, 5\}\} = \{\{1, 2, 5\}\}$$

同理可求得悲观多粒度覆盖粗糙集的上、下近似集和局部悲观多粒度覆盖粗糙集的上、下近似集.

**定理 3**　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，$0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$，有

$$\underline{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}} = \bigcup_{i=1}^{n} \underline{C_i}(X)^{\alpha} \qquad \overline{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{C_i}(X)^{\beta}$$

**证**　对于 $\forall x \in U$，由局部多粒度覆盖粗糙集的下近似集可得：

$$x \in \underline{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}} \Leftrightarrow \text{存在 } C_i \in \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}, \text{存在 } C_{ij} \subseteq MdC_i(X), \text{使得 } D(X/[x]_{C_i}) \geqslant \alpha \Leftrightarrow$$

$$存在\ C_i \in \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}，使得\ x \in \underline{C_i}(X)^{\alpha} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n}\underline{C_i}(X)^{\alpha}$$

而对于 $\forall x \in U$，根据局部多粒度覆盖粗糙集的上近似集可得：

$$x \in \overline{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}} \Leftrightarrow \forall C_i \in \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}, C_{ij} \cap MdC_i(X) \neq \emptyset, D(X/[x]_{C_i}) > \beta \Leftrightarrow$$

$$\forall C_i \in \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}, x \in \overline{C_i}(X)^{\beta} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n}\overline{C_i}(X)^{\beta}$$

证毕.

定理 3 说明了在覆盖近似空间中覆盖关系下的局部多粒度覆盖粗糙集的近似集与单粒度下的局部覆盖粗糙集之间的联系. 可以清晰地观察到：局部多粒度覆盖粗糙集的下近似集是所有单粒度下局部覆盖粗糙集下近似集的并集；局部多粒度覆盖粗糙集的上近似集是所有单粒度下局部覆盖粗糙集上近似集的交集.

**定理 4**　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，$0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$，有：

(ⅰ) $\underline{O^{\sum_{i=1}^{n} C_i(\emptyset)^{\alpha}}} = \emptyset$，$\overline{O_{\sum_{i=1}^{n} C_i(\emptyset)^{\beta}}} = \emptyset$；$\underline{O^{\sum_{i=1}^{n} C_i(U)^{\alpha}}} = U$，$\overline{O_{\sum_{i=1}^{n} C_i(U)^{\beta}}} = U$；

(ⅱ) $\underline{P^{\sum_{i=1}^{n} C_i(\emptyset)^{\alpha}}} = \emptyset$，$\overline{P_{\sum_{i=1}^{n} C_i(\emptyset)^{\beta}}} = \emptyset$；$\underline{P^{\sum_{i=1}^{n} C_i(U)^{\alpha}}} = U$，$\overline{P_{\sum_{i=1}^{n} C_i(U)^{\beta}}} = U$.

**定理 5**　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，有：

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，$\underline{O^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}}} = \underline{O^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)}}$，$\underline{P^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}}} = \underline{P^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)}}$；

(ⅱ) 当 $\beta=0$ 时，$\overline{O_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}}} = \overline{O_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)}}$，$\overline{P_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}}} = \overline{P_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)}}$.

定理 5 表明了在特殊情况下，局部多粒度覆盖粗糙集会退化为多粒度覆盖粗糙集，以及两者在覆盖近似空间上的联系.

**定理 6**　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X \subseteq U$，给定 $0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$，下列结论不一定成立：

(ⅰ) $\underline{O^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}}} \subseteq \overline{O_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}}}$；

(ⅱ) $\underline{P^{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}}} \subseteq \overline{P_{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}}}$.

**证**　见例 3. 限于篇幅，证明略.

定理 6 得出一个结论，即局部多粒度覆盖粗糙集在覆盖近似空间上不一定满足对偶性. 换一句话说，全局多粒度覆盖粗糙集中由下近似集的补，根据对偶性原理得到的其上近似集，在局部多粒度覆盖粗糙集中是不一定成立的.

**定理 7**　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，若 $C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_n$，且 $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$，$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n$，则

$$\underline{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\alpha}} = \underline{C_1}(X)^{\alpha_1} \qquad \overline{\sum_{i=1}^{n} C_i(X)^{\beta}} = \overline{C_1}(X)^{\beta_1}$$

**证**　因为 $C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_n$ 且 $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$，所以根据定义 7 和定理 1 可推得

$$\underline{C_1}(X)^{\alpha_1} \supseteq \underline{C_2}(X)^{\alpha_2} \supseteq \cdots \supseteq \underline{C_n}(X)^{\alpha_n}$$

即

$$\bigcup_{i=1}^{n}\underline{C_i}(X)^{\alpha}=\underline{C_1}(X)^{\alpha_1}$$

从而根据定理 3 有

$$\underline{\sum_{i=1}^{n}C_i}(X)^{\alpha}=\underline{C_1}(X)^{\alpha_1}$$

同理，因为 $C_1\leqslant C_2\leqslant\cdots\leqslant C_n$ 且 $0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_n$，根据定义 7 和定理 1 可得

$$\overline{C_1}(X)^{\beta_1}\subseteq\overline{C_2}(X)^{\beta_2}\subseteq\cdots\subseteq\overline{C_n}(X)^{\beta_n}$$

即

$$\bigcap_{i=1}^{n}\overline{C_i}(X)^{\beta}=\overline{C_1}(X)^{\beta_1}$$

根据定理 3 可得

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}C_i}(X)^{\beta}=\overline{C_1}(X)^{\beta_1}$$

证毕.

定理 7 说明：在给定的一簇覆盖中存在某种特殊的粗细关系，使得多粒度局部覆盖粗糙集的下近似与在最细条件下得到的局部覆盖粗糙集的下近似相等，多粒度局部覆盖粗糙集的上近似与在最细条件下得到的局部覆盖粗糙集的上近似也相等.

**定理 8**　设 $U$ 为论域，$C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为论域上的一簇覆盖，对于 $\forall X\subseteq U$，给定 $0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$，有：

(ⅰ) $\underline{P^{\sum_{i=1}^{n}C_i(X)^{\alpha}}}\subseteq\underline{O^{\sum_{i=1}^{n}C_i(X)^{\alpha}}}$；

(ⅱ) $\overline{P_{\sum_{i=1}^{n}C_i(X)^{\beta}}}\subseteq\overline{O_{\sum_{i=1}^{n}C_i(X)^{\beta}}}$.

**证**　根据局部乐观多粒度覆盖粗糙集和局部悲观多粒度覆盖粗糙集的定义，定理 8 易证.

## 4　结　论

当下，多粒度粗糙集在粗糙集理论中的重要性愈加契合现实应用场景，新的理论和应用拓展可以有效推动粗糙集领域的发展. 本文在覆盖近似空间下，首先基于覆盖粗糙集中的最小描述转化后的粗糙集经典表示形式，提出了局部覆盖粗糙集，并研究了在多粒度近似空间下的局部乐观多粒度覆盖粗糙集和局部悲观多粒度覆盖粗糙集. 其次，研究了多粒度空间下的局部覆盖粗糙集与单粒度局部覆盖粗糙集间的内在联系，发现了局部多粒度覆盖粗糙集的上、下近似集跟所有单粒度下局部覆盖粗糙集的上、下近似集的代数关系. 最后，探讨了局部多粒度覆盖粗糙集与多粒度覆盖粗糙集间的一些基本性质，指出了局部多粒度覆盖粗糙集可在特定情况下由多粒度覆盖粗糙集泛化得到.

**参考文献：**


[1]　PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2]　BONIKOWSKI Z, BRYNIARSKI E, WYBRANIEC U. Extensions and Intentions in the Rough Set Theory [J]. Information Sciences, 1998, 107(1-4): 149-167.

[3]　POMYKALA J A. Approximation Operations in Approximation Space [J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Methematics, 1987, 35(9-10): 653-662.

[4]　LIAO X Q, NAZIR S, SHEN J X, et al. Rough Set Approach Toward Data Modelling and User Knowledge for Extracting Insights [J]. Complexity, 2021, 2021: 1-9.

[5] CHATTERJEE A，SINHA S，ROY S，et al. A Rough Set Based Approach to Compute The Impact of Non-Academic Parameters on Academic Performance [J]. Recent Advances in Computer Science and Communications，2021，2021：1-14.
[6] KHAN S，ALI H，ULLAH Z，et al. KNN and ANN-Based Recognition of Handwritten Pashto Letters Using Zoning Features [J]. International Journal of Advanced Computer Science and Applications，2018，9(10)：091069.
[7] YAO Y Y，WONG S K M，LINGRAS P. A Decision-Theoretic Rough Set Model [J]. Methodologies for Intelligent Systems，1990，5：17-24.
[8] ZIARKO W. Variable Precision Rough Set Model [J]. Journal of Computer and System Sciences，1993，46(1)：39-59.
[9] 王基一，许黎明. 概率粗糙集模型 [J]. 计算机科学，2002，29(8)：76-78.
[10] SHE Y H，HE X L. On the Structure of the Multigranulation Rough Set Model [J]. Knowledge Based Systems，2012，36：81-92.
[11] HUANG B，GUO C X，ZHUANG Y L，et al. Intuitionistic Fuzzy Multigranulation Rough Sets [J]. Information Sciences，2014，277：299-320.
[12] LIU C H，MIAO D Q，QIAN J. On Multi-Granulation Covering Rough Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2014，55(6)：1404-1418.
[13] SUN L，WANG L Y，DING W P，et al. Feature Selection Using Fuzzy Neighborhood Entropy-Based Uncertainty Measures for Fuzzy Neighborhood Multigranulation Rough Sets [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2021，29(1)：19-33.
[14] ATEF M，ATIK A E F. Some Extensions of Covering-Based Multigranulation Fuzzy Rough Sets from New Perspectives [J]. Soft Computing，2021，25(8)：6633-6651.
[15] HU C X，ZHANG L. Dynamic Dominance-Based Multigranulation Rough Sets Approaches with Evolving Ordered Data [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2021，12(1)：17-38.
[16] QIAN Y H，LIANG X，QI W，et al. Local Rough Set：A Solution to Rough Data Analysis in Big Data [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2018，97：38-63.
[17] QIAN Y H，LIANG X Y，LIN G P，et al. Local Multigranulation Decision-Theoretic Rough Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2017，82(6)：119-137.
[18] 刘瑶瑶. 基于局部粗糙集研究不完备信息系统的理论 [J]. 智能计算机与应用，2019，9(5)：121-124.
[19] 周悦丽，林国平. 基于相容关系的局部粗糙集模型 [J]. 模糊系统与数学，2020，34(6)：43-54.
[20] 张　杰，张燕兰. 基于相似关系的局部粗糙集模型 [J]. 山东大学学报(理学版)，2021，56(3)：77-82.
[21] 周正国. 一种多粒度覆盖粗糙集模型 [J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版)，2012，28(5)：10-13.
[22] 胡　军，王国胤. 覆盖粒度空间的层次模型 [J]. 南京大学学报(自然科学版)，2008，44(5)：551-558.
[23] 胡　军，王国胤，张清华. 一种覆盖粗糙模糊集模型 [J]. 软件学报，2010，21(5)：968-977.
[24] QIAN Y H，LIANG J Y，PEDRYCZ W，et al. Positive Approximation：an Accelerator for Attribute Reduction in Rough Set Theory [J]. Artificial Intelligence，2010，174(9)：597-618.
[25] QIAN Y H，LIANG J Y，WEI W. Pessimistic Rough Decision [J]. 浙江海洋学院学报(自然科学版)，2010(5)：440-449.
[26] 刘财辉，蔡克参. 元素最小描述并集下的多粒度覆盖粗糙集模型 [J]. 智能系统学报，2016，11(4)：534-538.

**责任编辑　廖　坤**