第 43 卷第 10 期 西南大学学报(自然科学版) 2021年10月
Vol. 43 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.10.013

同阶交换子群个数之集为{1, 3}的有限群

钱 焱, 陈贵云

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 证明了不存在同阶交换子群个数之集为{1, 2}的有限群,并且完全确定了同阶交换子群个数之集为{1, 3}的有限群结构. 作为推论,得到:群 G 的同阶交换子群个数之集为{1, 3}等价于群 G 的同阶子群个数之集为{1, 3}.

关 键 词: 同阶交换子群;阶;群结构

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A

文 章 编 号: 1673-9868(2021)10-0100-05

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

Finite Groups Whose Set of the Number of Abelian Subgroups of the Same Order Is {1,3}

QIAN Yan, CHEN Guiyun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: It is proved in this paper that there is no finite group G satisfying the condition that the set of the number of abelian subgroups of the same order is {1, 2}. Furthermore, it is determined that the structure of the finite group G whose set of the number of abelian subgroups of the same order is {1, 3}. It is, hence, derived that for a group G, the set of the number of abelian subgroups of the possible order is {1, 3} if and only if the set of the number of subgroups of the possible order is {1, 3}.

Key words: abelian subgroup of the same order; order; group structure

有限群的结构一直是群论研究中一个最基本的课题,而群的性质与结构都能从它的固有数量反映出来,例如:奇数阶群可解;若 G 的 Sylow 子群的个数之集为{1},则 G 为幂零群.

因此,通过子群的数量特征来研究群 G 的结构是极其有意义的. 比如,许多群论学者研究了子群共轭类的类数、非正规子群的个数及阶、极大交换子群的阶之集,以及当同阶子群个数之集为简单集合时对群结构的影响,有关这方面的成果可参见文献[1-12].

本文关注同阶交换子群个数与群结构的关系,并讨论了当群 G 的同阶交换子群个数之集为{1, 3}时群 G 的结构. 当然这类群是存在的,如 S_3 就满足此条件. 另外,本文也证明了同阶交换子群个数之集为{1, 2}的有

收稿日期:2020-07-25
基金项目:国家自然科学基金项目(12071376).
作者简介:钱 焱,硕士研究生,主要从事群论的研究.
通信作者:陈贵云,教授.

限群是不存在的. 因此，研究满足同阶交换子群个数之集为{1，3}的群 G 的结构是有意义的.

本文将证明如下定理：

定理 1　设 G 是有限群，则下列结论成立：

(a) 不存在有限群 G，使得其同阶交换子群个数之集为{1，2}.

(b) G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}的充要条件是 G 同构于下列群之一：

(b1) $G=\langle u\rangle\times(\langle b\rangle\rtimes\langle a\rangle)$，其中 $u^k=1$，$a^{2^m}=1$，$b^3=1$，$a^{-1}ba=b^{-1}$，$2\nmid k$，$3\nmid k$；

(b2) $G=\langle v\rangle\times Q_8$，其中 $2\nmid o(v)$，Q_8 为四元数群；

(b3) $G=\langle w\rangle\times G_2$，其中 $2\nmid o(w)$，G_2 为 $(2^{n-1}，2)$- 型交换群；

(b4) $G=\langle d\rangle\times G_2$，其中 $2\nmid o(d)$，G_2 为半广义四元数群，且 $G_2=\langle e，f\rangle$，$e^{2^{n-1}}=1$，$f^2=1$，$f^{-1}ef=e^{1+2^{n-2}}$，$n\geqslant 4$.

由文献[11]的定理 4.3 得：若 G 的同阶子群个数之集为{1，3}，则 G 只可能同构于以上(b1)-(b4)群之一. 因此得到下面的推论：

推论 1　设 G 为有限群，则下列结论等价：

(i) G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}；

(ii) G 的同阶子群个数之集为{1，3}.

本文所涉及到的群都是有限群. $\pi(G)$ 表示群 $|G|$ 的所有素因子的集合，对 $q\in\pi(G)$，$\mathrm{Syl}_q(G)$ 表示 G 的所有 Sylow q- 子群的集合，G_q 表示 G 的某个 Sylow q- 子群. $G=A\rtimes B$ 表示 G 为 A 与 B 的半直积，其中 $A\trianglelefteq G$. 其他符号和术语参见文献[13].

为了证明定理 1，先引入以下引理：

引理 1[12]　设 P 是一个包含唯一 p 阶子群的 p- 群，那么或者 P 是循环群，或者 $p=2$ 且 P 是广义四元数群.

引理 2[13]　设 $|P|=p^n$，$1<m<n$. 若 P 只有一个 p^m 阶子群，则 P 为循环群.

引理 3　设 $p\in(G)$，$P\in\mathrm{Syl}_p(G)$，且 G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}，则

(i) 若 P 有唯一 p 阶子群，则或者 P 为循环群，或者 $p=2$ 且 P 为广义四元数群；

(ii) 若 P 有两个及以上的 p 阶子群，则 $p=2$，且 P 的 2 阶子群个数为 3.

证　(i) 若 P 有唯一 p 阶子群，则由引理 1 即可得到 (i) 成立.

(ii) 若 P 有两个及以上的 p 阶子群，取 $1\neq z\in Z(P)$，且 $|z|=p$，则 P 存在某 p 阶子群 $L\neq\langle z\rangle$，且 $L\langle z\rangle=L\times\langle z\rangle$ 为 $(p，p)$- 型交换子群. 又因 $L\langle z\rangle$ 含有 $p+1$ 个 p 阶交换子群，且 G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}，故 $p=2$，且 P 的 2 阶子群个数为 3.

引理 4　设 $q\in\pi(G)$，$Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$，其中 q 为奇素数，且 G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}，则 Q 为循环群，且 $Q\trianglelefteq G$.

证　由引理 2 知，Q 必为循环群. 因为 G 的 Sylow q- 子群的个数为 $1+kq$，且 q 为奇素数，所以 $1+kq=1$，或 $1+kq>3$. 又因为 G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}，所以 $1+kq$ 只能等于 1，从而 $Q\trianglelefteq G$.

引理 5[14]　二面体群 D_8 有 5 个 2 阶子群，3 个 4 阶子群.

引理 6[11]　设 G 为广义四元数群，$s_k(G)$ 表示 G 的 2^k 阶子群的个数，则

$$s_k(G)=\begin{cases}1 & k=0,1,n\\ 2^{n-k}+1 & k=2,3,\cdots,n-1\end{cases}$$

引理 7　若 $|G|=8$，且 G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}，则 G 只可能是 $(4，2)$- 型交换群或四元数群 Q_8.

证　由文献[15]的 3.4.3 知，8 阶群在同构意义下共有 5 类，分别是 $C_8,C_2\times C_2\times C_2,C_4\times C_2,Q_8,D_8$.

下面将分别计算每个类的同阶交换子群个数之集.

因为 C_8 为循环群，所以它的各阶子群个数都为1，且均为交换群，从而 C_8 的同阶交换子群个数之集为{1}.

因为 $C_2 \times C_2 \times C_2$ 的各阶子群均为交换群，且其2阶子群的个数为 $(2^3-1)/(2-1)=7$，4阶子群的个数为 $[(2^3-1)(2^2-1)]/[(2^2-1)(2-1)]=7$，所以 $C_2 \times C_2 \times C_2$ 的同阶交换子群个数之集为{1，7}.

不妨设

$$C_4 \times C_2 = \langle a, b : a^4=1, b^2=1, [a, b]=1 \rangle$$

易知 $C_4 \times C_2$ 的各阶子群都为交换群，且2阶子群有3个，分别为 $\langle a^2 \rangle$，$\langle b \rangle$，$\langle a^2 b \rangle$；4阶子群也有3个，分别为 $\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle$，$\langle a \rangle$，$\langle ab \rangle$. 所以 $C_4 \times C_2$ 的同阶交换子群个数之集为{1，3}.

因为 $Q_8 = \langle a, b : a^4=1, a^2=b^2, b^{-1}ab=a^{-1} \rangle$，且其真子群均为交换群. 由引理6可计算得：其2阶子群有1个，即 $\langle a^2 \rangle$；4阶子群有3个，分别为 $\langle a \rangle$，$\langle b \rangle$，$\langle ab \rangle$. 因此，Q_8 的同阶交换子群个数之集为{1，3}.

由引理5知8阶二面体群 D_8 的同阶交换子群个数之集为{1，3，5}.

引理8[16] 设 P 为16阶非交换2-群，且 P 的同阶交换子群个数之集为{1，3}，则 P 只能为半广义四元数群，定义关系为 $P = \langle a, b : a^8=b^2=1, b^{-1}ab=a^5 \rangle$.

引理9[13] 设 P 为一个具有循环极大子群的2-群，则 P 只有以下6种互不同构类型的群：

(ⅰ) 2^n 阶循环群，$P=\langle a \rangle$，$a^{2^n}=1$，$n \geqslant 1$；

(ⅱ) $(2^{n-1}, 2)$-型交换群，$P=\langle a, b \rangle$，$a^{2^{n-1}}=b^2=1$，$n \geqslant 2$；

(ⅲ) 广义四元数群，$P=\langle a, b \rangle$，$a^{2^{n-1}}=1$，$a^{2^{n-2}}=b^2$，$b^{-1}ab=a^{-1}$，$n \geqslant 3$；

(ⅳ) 二面体群，$P=\langle a, b \rangle$，$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1}$，$n \geqslant 3$；

(ⅴ) 半广义四元数群，$P=\langle a, b \rangle$，$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{1+2^{n-2}}$，$n \geqslant 4$；

(ⅵ) $P=\langle a, b \rangle$，$a^{2^{n-1}}=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}}$，$n \geqslant 4$.

引理10[15] 设 G 为非交换群，且它的所有Sylow子群循环，则 G 为亚循环群，$G=\langle a, b \rangle$，$a^m=b^n=1$，$b^{-1}ab=a^r$，$((r-1)n, m)=1$，$r^n \equiv 1 \pmod m$，$|G|=nm$.

引理11[11] 设 G 是 (p^n, p^m)-型交换 p-群，其中 $m \leqslant n$. 则群 G 的 p^k 阶子群的个数为

$$s_k(G)=\begin{cases} 1 & k=0, m+n \\ p^k+p^{k-1}+\cdots+p+1 & 1 \leqslant k \leqslant m \\ p^m+p^{m-1}+\cdots+p+1 & m<k \leqslant n \\ p^{m+n+k}+p^{m+n+k-1}+\cdots+p+1 & n<k<m+n \end{cases}$$

定理1的证明

证 (a) 设 $p \in \pi(G)$，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

若 P 有唯一 p 阶子群，则或者 P 为循环群，或者 $p=2$ 且 P 为广义四元数群. 当 P 为广义四元数群时，由引理6计算得其4阶子群个数至少为3，矛盾. 当 P 为循环群时，因为 G 的Sylow p-子群个数为 $n=1+kp$，所以 $n=1$，或者 $n \geqslant 3$. 又因为 G 的同阶交换子群个数之集为{1，2}，所以 $n=1$. 进而得到 G 的所有Sylow子群正规且循环，故 G 为循环群，从而 G 的各阶子群个数都为1，不满足题设条件. 若 P 有两个及以上的 p 阶子群，则同引理3(ⅱ)所证可得 $p+1=2$，这与 $p \geqslant 2$ 矛盾. 综上所述，结论(a)得证.

(b) 由引理3和引理4知 $G=H \rtimes G_2$，其中 H 循环且 $2 \nmid |H|$. 下面分两种情况进行讨论：

情形1 若 G_2 有唯一2阶子群，则 G_2 或为循环群或为广义四元数群.

如果 G_2 为循环群，那么 $|\mathrm{Syl}_2(G)|=3$，故 $G_2 \ntrianglelefteq G$，于是 G 非交换，且所有Sylow子群循环. 从而由引理10得，G 为亚循环群. 因为 G_2 为Sylow子群且个数为3，所以 $3 \mid |H|$. 又当 $t \mid |H|$ 且 $t \neq 2,3$ 时有 $[G_t, G_2]=1$，故可设 $G=\langle u \rangle \times (G_3 \rtimes G_2)$，其中 $|u|=k$，$(k, 6)=1$，$G_2=\langle a \rangle$，$a^{2^m}=1$，$m \geqslant 1$，

$G_3=\langle b\rangle$，$b^{3^n}=1$，$n\geqslant 1$，$a^{-1}ba=b^r$，且由 G_2 不正规可知 $3^n\nmid(r-1)$.

先证 $n=1$. 因为 $|\mathrm{Syl}_2(G)|=3$，所以 $|G_3:N_{G_3}(G_2)|=3$，则 $|N_{G_3}(G_2)|=3^{n-1}$. 于是设 $N_{G_3}(G_2)=\langle b^3\rangle$. 又因为 $N_{G_3}(G_2)=C_{G_3}(G_2)$，故$[b^3,a]=1$. 因为 $a^{-1}ba=b^r$，于是 $b^3=a^{-1}b^3a=b^{3r}$，从而 $b^{3(r-1)}=1$，因此 $3^{n-1}\Big|(r-1)$. 若 $n\geqslant 2$，则有 $3\Big|(r-1)$. 又因为 $G_3\rtimes G_2$ 为亚循环群，所以$((r-1)2^m,3^n)=1$，这与 $3\Big|(r-1)$ 矛盾. 因此 $n=1$.

再证 $r=-1$. 因为 $r\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，所以 $r\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ 或 $r\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)$. 由假设条件 $a^{-1}ba=b^r$ 知 $(r,3)=1$，从而得 $r\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$，于是 $r\equiv -1(\mathrm{mod}\ 3)$. 因此 $r=-1$.

可令

$$T=G_3\rtimes G_2=\langle a,b:a^{2^m}=1,b^3=1,a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$$

由定义关系知 T 的 Sylow 2- 子群为极大子群且恰有 3 个，即$\langle a\rangle$,$\langle ab\rangle$,$\langle ab^{-1}\rangle$. 对 $L\leqslant T$，若 L 是 2- 群，则 L 含于 T 的 Sylow 2- 子群中. 因为 T 的 Sylow 2- 子群只有 3 个且循环，因此与 L 同阶的子群最多有 3 个. 又由 Sylow 子群共轭及循环知，与 L 同阶的子群共轭，故与 L 同阶的子群个数为 1 或 3. 如果 L 不是 2- 群，则 L 的阶为 $2^i\cdot 3$，此时考虑 T 的阶为 $2^{m-1}\cdot 3$ 的极大子群，可知此极大子群必为$\langle a^2\rangle\langle b\rangle$,$\langle(ab)^2\rangle\langle b\rangle$,$\langle(ab^{-1})^2\rangle\langle b\rangle$. 又由定义关系可知 $C_{G_2}(G_3)=\langle a^2\rangle$，即$[a^2,b]=1$，从而$\langle b\rangle\rtimes\langle a^2\rangle=\langle a^2\rangle\times\langle b\rangle$ 为循环群，则

$$\langle a^2\rangle\langle b\rangle=\langle(ab)^2\rangle\langle b\rangle=\langle(ab^{-1})^2\rangle\langle b\rangle=\langle a^2\rangle\times\langle b\rangle$$

故 T 的阶为 $2^{m-1}\cdot 3$ 的极大子群只有 1 个，即为$\langle a^2\rangle\times\langle b\rangle$. 综上所述，$T$ 的极大子群均循环，且同阶极大子群的个数之集为{1，3}，进而 T 的 $2^i\cdot 3$ 阶的同阶交换子群个数也为 1，符合定理 1 的条件. 综上所述，此时 G 对应定理 1(b) 中的(b1) 类型群.

如果 G_2 为广义四元数群，此时考虑 G_2 的 4 阶子群. 由引理 6 知 G_2 只能为 Q_8. 下面证明 $G_2\trianglelefteq G$. 若 $G_2\ntrianglelefteq G$，则由定理 1 的条件知，G 至少有 3 个 Sylow 2- 子群，将其中 3 个分别记为 G_{21},G_{22},G_{23}，它们彼此共轭且均有 3 个 4 阶子群. 如果它们的 4 阶子群不分别对应相等，那么与 G 的同阶交换子群个数之集为{1，3}矛盾，因此它们的 4 阶子群分别对应相等. 又因为 G_{21},G_{22},G_{23} 均可由其 4 阶子群生成，所以 $G_{21}=G_{22}=G_{23}$，但这与 G 的 Sylow 2- 子群个数至少为 3 矛盾. 因此 $G_2\trianglelefteq G$. 综上所述，此时 G 对应定理 1(b) 中的(b2) 类型群.

情形 2　若 G_2 的 2 阶子群个数为 3，对 G_2 是否交换进行讨论.

假设 G_2 为交换群，则 G_2 的极大子群也交换，因此极大子群个数为 3. 由假设知 G 的 $|G_2|/2$ 阶子群只有 3 个，从而 G 只能有 1 个 Sylow 2- 子群，即 $G_2\trianglelefteq G$，于是 G 也为交换群. 此时定理 1 的条件等价于 G 的同阶子群个数之集为{1，3}. 根据文献[11] 的定理 4.3 找出 G 为交换群的类型即可，得到：当 G_2 为$(2^{n-1},2)$- 型交换群时，G 满足定理 1 的条件. 综上所述，此时 G 对应定理 1(b) 中的(b3) 类型群.

假设 G_2 为非交换群，则 $|G_2|\geqslant 8$，故可分为以下几种情形讨论：

(i) 若 $|G_2|=8$ 且 G_2 的 2 阶子群个数为 3，讨论 G 的结构. 由引理 7 知，不存在满足此条件的非交换 2- 群，故此类群不存在.

(ii) 若 $|G_2|=16$ 且 G_2 的 2 阶子群个数为 3，讨论 G 的结构. 由引理 8 知，G_2 只能为半广义四元数群.

(iii) 若 $|G_2|=2^n$，$n\geqslant 5$ 且 G_2 的 2 阶子群个数为 3，则断言：G_2 只能是半广义四元数群.

证明当 $n=5$ 时，G_2 只能是半广义四元数群.

考虑 G_2 的极大子群 M. 当 M 交换时，M 为循环群或$(2^r,2^s)$- 型交换群，其中 $r+s=4$. 又由引理 11 知$(2^2,2^2)$- 型交换群含有 7 个 4 阶子群，这与定理 1 的条件矛盾，因此 M 为循环群或$(2^3,2)$- 型交换群. 当 M 非交换时，若 M 只有 1 个 2 阶元，则 M 是广义四元数群，然而由引理 6 知，16 阶广义四元数群不满足定理 1 的条件. 若 M 有 3 个 2 阶元，则由上面 (ii) 知 M 为半广义四元数群. 综上所述，M 为循环群、$(2^3,2)$-

型交换群或 16 阶半广义四元数群.

当 M 为循环群时，则 G_2 为引理 9 中的群，经过计算群的同阶交换子群个数得，G_2 为半广义四元数群. 因为$(2^3, 2)$-型交换群和 16 阶半广义四元数群的 8 阶子群都是交换群且个数为 3，又因为 G_2 的同阶交换子群个数之集必为$\{1, 3\}$，则：若 M 为这两个群之一，则 G 的 8 阶子群只能在 M 的这 3 个极大子群中，从而 G_2 的每个极大子群的极大子群都含在 M 内，进而 G_2 中除循环极大子群之外的极大子群都等于 M. 但 G_2 至少有 3 个极大子群，因此 G_2 一定至少含有 2 个循环极大子群，因此 G_2 为引理 9 中的群，且 G_2 有 3 个2 阶子群，通过计算群的同阶交换子群个数知，G_2 为 32 阶半广义四元数群.

假设当 $n=k-1$ 时，G_2 是一个半广义四元数群，去证明当 $n=k$ 时，G_2 是一个半广义四元数群.

仍然考虑 G_2 的极大子群 M. 当 M 为交换群时，M 为循环群或$(2^r, 2^s)$-型交换群，其中 $r+s=k-1$. 又由引理 9 知，当 M 为非循环交换群时，M 只能为$(2^{k-2}, 2)$-型交换群. 当 M 为非交换群时，如果 M 只有 1 个 2 阶元，那么 M 只能是广义四元数群，但是由引理 6 计算 M 的 4 阶子群个数知，广义四元数群不满足定理 1 的条件. 如果 M 有 3 个 2 阶元，则 M 的同阶交换子群个数集为$\{1, 3\}$，由归纳假设，M 为半广义四元数群. 因此，仍然可以得到 M 为循环群、$(2^{k-2}, 2)$-型交换群或 2^{k-1} 阶半广义四元数群. 然后同 $n=5$ 时的证明可得 G_2 为半广义四元数群. 综上所述，当 (ii) 和 (iii) 成立时，G 都对应定理 1(b) 的(b4) 类型群.

由于定理 1 中的 4 种群对应的 Sylow 2-子群互不同构，因此定理 1(b) 的(b1)－(b4)类群互不同构，故定理 1 结论(b) 得证.

参考文献：

[1] 郭凯艳，曹洪平，陈贵云. 非循环子群共轭类个数为 5 的有限幂零群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(4)：12-15.

[2] 唐　锋. 恰有两个子群共轭类长的有限群 [J]. 数学学报，2011，54(4)：619-622.

[3] 向建国，李样明. 非正规子群阶的个数与有限群的结构 [J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版)，2007，25(6)：7-10.

[4] 龚　律，褚智伟. 恰有 6 个非正规子群的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(12)：7-11.

[5] 谭三标，艾海明，晏燕雄. 最高阶元个数为 $6p^2q$ 的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(4)：1-3.

[6] 雷　倩，何立官. 关于 Conway 单群和 Fischer 单群的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：96-100.

[7] 范　睿，陈贵云. 恰有 10 个非正规子群的有限幂零群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(10)：5-8.

[8] 胡接春，陈贵云. 极大交换子群的阶对群的结构的影响 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2009，31(10)：106-108.

[9] 陈彦恒，贾松芳. 同阶子群个数的集合为$\{1, p+1\}$的有限群的完全分类 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(3)：1-3.

[10] 李春艳，陈贵云. 同阶子群个数之集为$\{1, 3, 4\}$的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：54-59.

[11] 陈彦恒. 在一定条件下同阶子群的个数对有限群结构的影响 [D]. 重庆：西南大学，2008.

[12] KURZWEIL H，STELLMACHER B. The Theory of Finite Groups [M]. New-York：Springer，2003.

[13] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1993.

[14] 陈林发. 二面体群 D_4 的一些性质 [J]. 镇江农业机械学院学报，1982，3(2)：97-102.

[15] 陈重穆. 有限群论基础 [M]. 重庆：重庆出版社，1983.

[16] 王亮亮. 16 阶非交换 2 群的子群结构 [J]. 太原师范学院学报(自然科学版)，2013，12(3)：62-66.

责任编辑　廖　坤