DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.10.014

有限群的 δ-置换子群

高建玲， 毛月梅

山西大同大学 数学与统计学院，山西 大同 037009

摘要：假定 δ 是有限群 G 的 Sylow 子群的完全集，即对每个 $|G|$ 的素因子 p，集合 δ 仅包含 G 的一个 Sylow p-子群. 若群 G 的子群 H 置换 δ 中的所有元素，则称子群 H 在 G 中 δ-置换. 利用准素数子群的 δ-置换性研究了有限群的结构，得到了超可解群的若干新的判别准则.

关 键 词：δ-置换子群；Sylow 子群；超可解群

中图分类号：O152.1 **文献标志码：A**

文 章 编 号：1673－9868(2021)10－0105－05

开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

On δ-Permutable Subgroups of Finite Groups

GAO Jianling， MAO Yuemei

School of Mathematics and Statistics，Shanxi Datong University，Datong Shanxi 037009，China

Abstract：Let δ be a complete set of Sylow subgroups of a finite group G. Then，δ contains exactly one Sylow p-subgroup of G for each prime p dividing the order of G. A subgroup H of G is said to be δ-permutable if H permutes with each member of δ . The structures of finite groups with δ-permutability of primary subgroups are investigated and some new determination criteria of supersolvable groups are obtained.

Key words：δ-permutable subgroup；Sylow subgroup；supersolvable group

本文所考虑的群皆为有限群. 用 G 表示群，p 表示素数，$\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的所有素因子组成的集合，$|G|_p$ 表示 G 的 Sylow p-子群的阶. 对群系 $\mathscr{F}$，用 $Z_{\mathscr{F}}(G)$ 表示 G 的所有 $\mathscr{F}$-超中心正规子群的积. 用 $\mathscr{U}$ 表示全体超可解群组成的群系. 所有未说明的符号与术语都是标准的，可参看文献[1-2].

有限群结构的确定是有限群研究的根本问题，这方面的研究已有许多结果，如文献[3-10]. 运用置换子群的性质是研究有限群结构的一个重要手段. 因此，置换子群的概念被很多学者多次推广. 其中，文献[6]引入了子群的 δ-置换性：令集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集，即对每个 $p\in\pi(G)$，集合 δ 仅包含 G

收稿日期：2020－08－20

基金项目：国家自然科学青年基金项目(11901364)；山西省应用基础研究计划项目(201901D211439)；山西省科技创新项目(2019L0747).

作者简介：高建玲，硕士，讲师，主要从事群论的研究.

通信作者：毛月梅，博士，副教授.

的一个 Sylow p-子群，若群 G 的子群 H 置换 δ 中的所有元素，则称子群 H 在 G 中 δ-置换. 并证明了：若 $\mathscr{F}$ 为包含全体超可解群 $\mathscr{U}$ 的饱和群系，下列两条等价：

1) $G \in \mathscr{F}$;

2) 存在 $H \trianglelefteq G$ 使得 $G/H \in \mathscr{F}$，且对所有 $G_p \in \mathscr{F}$，有 $G_p \cap H$ 的极大子群在 G 中 δ-置换.

文献[7]得出：若 G_p 的极大子群在 G 中 δ-置换，其中 $G_p \in \delta$，$p \in \pi(G)$ 且 p 最小，那么 G 为 p-幂零群. 文献[8]得出：设 $p \in \pi(G)$，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 H 为 G 的 p'-Hall 子群，使得 $G = P \cdot H$，令集合 δ 是 H 的 Sylow 子群的完全集，如果 G 满足下列两条：

1) $N_G(P)/C_G(P)$ 是 p-群；

2) P 的所有极大子群在 H 中 δ-置换.

那么 G 为 p-幂零群.

文献[9]从 G_p 以及 $G_p \cap F^*(G)$ 的所有子群的 δ-置换性两方面刻画了有限群的结构. 另外，文献[10]针对次正规 δ-置换子群的嵌入性进行了研究，并针对 δ-置换性对有限群结构的影响进行了研究. 本文将从子群的阶以及非 Frattini p-主因子两方面讨论准素数子群的 δ-置换性，进一步刻画有限群的结构，得到超可解群的新判别准则，并将以上结论推广.

1 记号及引理

假定集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集，若 $N \trianglelefteq G$，我们记

$$\delta N = \{G_pN : G_p \in \delta\} \qquad \delta N/N = \{G_pN/N : G_p \in \delta\} \qquad \delta \cap N = \{G_p \cap N : G_p \in \delta\}$$

定义 1[6] 假定 $H \leqslant G$，集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集，若 H 置换 δ 中的所有元素，则称 H 在 G 中 δ-置换.

引理 1[6] 假定集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集，U 是 G 的 δ-置换子群，$N \trianglelefteq G$，总有

(i) $\delta \cap N$ 及 $\delta N/N$ 分别是 N 及 G/N 的 Sylow 子群的完全集；

(ii) UN/N 在 G/N 中 $\delta N/N$-置换；

(iii) 若 $U \leqslant N$，则 U 在 N 中 $\delta \cap N$-置换.

引理 2[11] 假定 $\mathscr{F}$ 是一个非空群系，$H \leqslant G$ 且 $N \trianglelefteq G$，则 $Z_{\mathscr{F}}(G)N/N \leqslant Z_{\mathscr{F}}(G/N)$.

假设 P 是一个 p-群. 若 P 不是非交换 2-群，记 $\Omega(P) = \mho_1(P)$，否则记 $\Omega(P) = \mho_2(P)$.

引理 3[12] 假定 $\mathscr{F}$ 是一个可解饱和群系，P 是 G 的正规 p-子群，且 C 是 P 的 Thompson 临界子群[13]，若 $P/\Phi(P) \leqslant Z_{\mathscr{F}}(G/\Phi(P))$ 或 $\Omega(C) \leqslant Z_{\mathscr{F}}(G)$，则 $P \leqslant Z_{\mathscr{F}}(G)$.

引理 4[12] 假设 C 是非平凡 p-子群 P 的 Thompson 临界子群，则

(i) 若 p 是奇素数，则 $\mho_1(C)$ 的方次数是 p；

(ii) 若 P 是交换 2-群，则 $\mho_1(C)$ 的方次数是 2；

(iii) 若 $p = 2$，则 $\mho_2(C)$ 的方次数至多是 4.

引理 5[14] 若群 G 的广义 Fitting 子群 $F^*(G)$ 是可解的，则 $F^*(G) = F(G)$.

引理 6[15] 假定 $\mathscr{F}$ 是任一群系，$E \trianglelefteq G$，若 $F^*(E) \leqslant Z_{\mathscr{F}}(G)$，则 $E \leqslant Z_{\mathscr{F}}(G)$.

引理 7[16] 假定 $\mathscr{F}$ 是包含全体超可解群 $\mathscr{U}$ 的饱和群系，$E \trianglelefteq G$ 且 $G/E \in \mathscr{F}$，若 $E \leqslant Z_{\mathscr{U}}(G)$，则 $G \in \mathscr{F}$.

2 主要结果

定理 1 设 P 是 G 的正规 p-子群，集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集. 假定 P 有一个子群 D，满足 $1 < |D| < |P|$，且 P 的每个阶是 $|D|$ 的子群 H 在 G 中 δ-置换. 进一步，当 P 是非交换 2-群且 $|P:D| > 2$ 时，假定 P 的每个阶是 $2|D|$ 并且方次数大于 2 的子群 H 也在 G 中 δ-置换，则 $P \leqslant Z_{\mathscr{U}}(G)$.

证 假设结论不成立，令 (G, P) 是使得 $|G| + |P|$ 为最小的反例. 假定 N 是 G 的极小正规子群且

包含于 P. 按以下步骤导出矛盾：

步骤 1　若 $|N|<|D|$，则 N 是 G 的包含于 P 的唯一的极小正规子群，满足 $P/N\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$ 并且 $|N|>p$.

设 H/N 是 P/N 的子群，满足 $|H/N|=|D|/|N|$ 或 $|H/N|=2|D|/|N|$（若 P/N 是非交换 2-群，$|P/N:D/N|>2$ 且 $\exp(H/N)>2$），则 H 是 P 的子群，满足 $|H|=|D|$ 或 $|H|=2|D|$（若 P 是非交换 2-群，$|P:D|>2$ 且 $\exp(H)>2$）. 由假设知，H 在 G 中 δ-置换. 因此由引理 1 知 H/N 在 G/N 中 $\delta N/N$-置换. 由 G 的选取可知 $P/N\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$. 若 $|N|=p$，则 $P\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，矛盾. 所以 $|N|>p$. 假定 R 是 G 的包含于 P 且不同于 N 的极小正规子群. 因为 $NR/N\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$，又因 NR/N 是 G/N 的极小正规子群，故 $|R|=|NR/N|=p$，这可推得 $|R|\leqslant|N|<|D|$. 类似前面的讨论有 $P/R\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/R)$，因此有 $P\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，矛盾. 所以 N 是 G 的包含于 P 的唯一的极小正规子群.

步骤 2　$|N|=|D|$.

如果 $|N|>|D|$，假定 N_1 是 N 的子群，满足 $|N_1|=|D|$，N_1 在 G 的某个 Sylow p-子群 G_p 中正规，不失一般性可设 $G_p\in\delta$. 由假设知 N_1 在 G 中 δ-置换，即对任一 $q\in\pi(G)$ 且 $p\neq q$，取 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$ 且 $Q\in\delta$，有 $N_1Q=QN_1$. 因为 $N_1=N\cap N_1Q\trianglelefteq N_1Q$，故 $Q\leqslant N_G(N_1)$，显然 $G_p\leqslant N_G(N_1)$. 假定 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ 是 $\pi(G)$ 的所有与 p 不同的元素，$Q_i\in\mathrm{Syl}_{q_i}(G)$ 且 $Q_i\in\delta$，则

$$N_1\trianglelefteq\langle G_p,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t\rangle=G$$

再由 N 的极小性易知 $N_1=1$ 或 $N_1=N$，而 $1<|D|<|N|$，矛盾.

以下假设 $|N|<|D|$. 由步骤 1 知 $P/N\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$. 若 $N\leqslant\Phi(P)$，则由引理 2 有

$$P/\Phi(P)\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/\Phi(P))$$

再由引理 3 知 $P\leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，矛盾. 故 $N\nleqslant\Phi(P)$. 由步骤 1 可知 $\Phi(P)=1$. 假设 U 是 N 在 P 中的补，N_1 是 N 的极大子群，满足：N_1 在 G 的某个 Sylow p-子群 G_p 中正规. 不失一般性，可设 $G_p\in\delta$. 因为

$$|D|<|P|=p|U||N_1|$$

故 $|U|\geq|D|/|N_1|$. 不妨取 U 的阶是 $|D|/|N_1|$ 的子群 V. 令 $T=N_1V$，则 $|T|=|N_1V|=|D|$，由假设知 T 在 G 中 δ-置换，因此对任一 $q\in\pi(G)$ 且 $p\neq q$，取 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$ 且 $Q\in\delta$，有 $TQ=QT$. 因为

$$N_1=N\cap T=N\cap TQ\trianglelefteq TQ$$

故 $Q\leqslant N_G(N_1)$，显然 $G_p\leqslant N_G(N_1)$. 假定 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ 是 $\pi(G)$ 的所有与 p 不同的元素，$Q_i\in\mathrm{Syl}_{q_i}(G)$ 且 $Q_i\in\delta$，则

$$N_1\trianglelefteq\langle G_p,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t\rangle=G$$

从而 $|N|=p$，与步骤 1 的结果矛盾. 因此 $|N|=|D|$.

步骤 3　$|D|=p$.

令 G_p 是 G 的 Sylow p-子群且 $G_p\in\delta$，N/M 是 G_p 的主因子，则 $|N/M|=p$. 假设 L/N 是包含于 P/N 的 G_p/N 的 p 阶正规子群，则 $|L/M|=p^2$. 首先考虑 L/M 是初等交换 p-群，假设 $L/M=N/M\times T/M$，其中 $|N/M|=|T/M|=p$，则 $|T|=|N|=|D|$. 由假设知 T 在 G 中 δ-置换，显然 $M=T\cap N$. 类似于步骤 2 的讨论有 $M\trianglelefteq G$，所以 $|N|=p$. 以下假设 L/M 是 p^2 阶循环群，则存在元素 $a\in L\backslash M$ 且 $L=M\langle a\rangle$. 可推得 $N=M(N\cap\langle a\rangle)$. 易知 $a\notin N$ 且 $|N\cap\langle a\rangle|=p$，所以 $M\cap\langle a\rangle=1$，从而 $|\langle a\rangle|=p^2$. 记 $\mho_1(L)=\langle l^p:l\in L\rangle$，显然 $\mho_1(L)\leqslant\Phi(L)<N$. 取 N_1 是 N 的极大子群，满足 $\mho_1(L)\leqslant N_1$ 且 $N_1\trianglelefteq G_p$. 又因 $M\cap\langle a\rangle=1$，故 $N_1\neq M$，所以 $\langle a^p\rangle\leqslant N_1$ 且 $|N_1\langle a\rangle|=|N|=|D|$. 由假设知 $N_1\langle a\rangle$ 在 G 中 δ-置换. 因为 $N_1=N\cap N_1\langle a\rangle$，类似于步骤 2 的证明，可得 $N_1\trianglelefteq G$，从而 $|N|=p$.

步骤 4　最后矛盾.

当 P 是非交换 2-群时，由步骤 3 及定理假设知 P 的所有素数阶或者 4 阶循环子群在 G 中 δ-置换. 首

先证明 G 有唯一的正规子群 R 满足：P/R 是 G 的主因子，$R \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$ 并且 $|P/R| > p$.

令 P/R 是 G 的主因子. 显然，(G, R) 满足定理假设. 再由 (G, P) 的选择有 $R \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 若 $|P/R| = p$，则 $P/R \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/R)$，因此 $P \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，矛盾. 故 $|P/R| > p$. 假设 P/L 是 G 的主因子，且满足 $P/R \neq P/L$. 类似前面的讨论有 $L \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 由引理 2 有

$$P/R = RL/R \leqslant RZ_{\mathfrak{U}}(G)/R \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G/R)$$

在此情况下，可得出与上面相同的矛盾. 因此 G 有唯一的正规子群 R 满足：P/R 是 G 的主因子，$R \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$ 并且 $|P/R| > p$.

假定 C 是 P 的一个 Thompson 临界子群. 若 $\Omega(C) < P$，则 $\Omega(C) \leqslant R \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，由引理 3 有 $P \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，矛盾. 所以 $P = C = \Omega(C)$，再由引理 4 知，当 P 是非交换 2-群时，P 的方次数是 p 或者 4.

因 $P/R \cap Z(G_p/R) > 1$，取

$$L/R \leqslant P/R \cap Z(G_p/R) \qquad |L/R| = p$$

其中 G_p 是 G 的 Sylow p-子群，且 $G_p \in \delta$. 记 $x \in L \backslash R$，$H = \langle x \rangle$，则 $L = HR$ 且 $|H| = p, 4$. 由假设知 H 在 G 中 δ-置换，再由引理 1 有 $HR/R = L/R$ 在 G/R 中 $\delta R/R$-置换，即对任一 $q \in \pi(G/R)$ 且 $p \neq q$，取 $Q/R \in \mathrm{Syl}_q(G/R)$ 且 $Q/R \in \delta R/R$，有 $L/R \cdot Q/R = Q/R \cdot L/R$. 类似于步骤 2 的讨论有 $L/R \trianglelefteq G/R$. 从而 $|L/R| = |P/R| = p$.

定理 2 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群的可解饱和群系，集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集，$E \trianglelefteq G$ 满足 $G/E \in \mathscr{F}$，并且 $F^*(E)$ 是可解的. 若对 $F^*(E)$ 的所有非循环的 Sylow p-子群 P，假定 P 有一个子群 D 满足 $1 < |D| < |P|$，且 P 的每个阶是 $|D|$ 的子群 H 在 G 中的 δ-置换. 进一步，当 P 是非交换 2-群且 $|P : D| > 2$ 时，假定 P 的每个阶是 $2|D|$ 并且方次数大于 2 的子群 H 也在 G 中 δ-置换，则 $G \in \mathscr{F}$.

证 因 $F^*(E)$ 可解，由引理 5 有 $F^*(E) = F(E)$. 设 P 是 $F(E)$ 的 Sylow p-子群，其中 $p \in \pi(F(E))$. 显然 $P \trianglelefteq G$. 若 P 非循环，则 P 满足定理 1 的假设，因此 $P \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 若 P 循环，假设 L/K 是 G 的任意包含于 P 的主因子，则 $|L/K| = p$，故 L/K 在 G 中是 $\mathscr{F}$-中心的，因此 $P \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，从而 $F^*(E) \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 由引理 6 有 $E \leqslant Z_{\mathfrak{U}}(G)$，再由引理 7 有 $G \in \mathscr{F}$.

定理 3 假设 G 是 p-可解群，集合 δ 是 G 的 Sylow 子群的完全集，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 $P \in \delta$. 若对 G 的任一非 Frattini p-主因子 H/K，都存在 P 的一个极大子群 P_1，使得 P_1 在 G 中 δ-置换，且 $H/K \not\leqslant P_1K/K$，则 G 是 p-超可解群.

证 假设结论不成立，令 G 为极小阶反例.

假设 N 是 G 的极小正规子群. 下证 G/N 满足定理条件. 设 $(H/N)/(K/N)$ 是 G/N 的非 Frattini p-主因子，则

$$H/K \cong (H/N)/(K/N) \not\leqslant \Phi((G/N)/(K/N)) \cong \Phi(G/K)$$

且 H/K 是 G 的 p-主因子. 由假设知，存在 P 的一个极大子群 P_1 在 G 中 δ-置换且 $H/K \not\leqslant P_1K/K$. 若 N 是 p'-子群，则 P_1N/N 是 PN/N 的极大子群. 若 N 是 p-子群且 $N \not\leqslant P_1$，则 $P = NP_1$. 因为 G 的每个 Sylow p-子群覆盖 G 的所有 p-主因子，故 $H \leqslant PK = P_1K$，与 $H/K \not\leqslant P_1K/K$ 矛盾. 所以 $N \leqslant P_1$，因此 P_1/N 是 P/N 的极大子群. 由引理 1 可知，P_1N/N 在 G/N 中 $\delta N/N$-置换. 显然有

$$(H/N)/(K/N) \not\leqslant (P_1N/N)/(K/N)$$

由 G 的极小性可知，G/N 是 p-超可解群. 若 $N \leqslant O_{p'}(G)$，则 G 是 p-超可解群，矛盾. 故 N 是交换 p-子群. 易知 N 是 G 的非 Frattini p-主因子，由假设得，存在 P 的一个极大子群 P_2 在 G 中 δ-置换且 $N \not\leqslant P_2$. 所以 $P = NP_2$. 由假设知，对任一 $q \in \pi(G)$ 且 $p \neq q$，取 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ 且 $Q \in \delta$，有 $P_2Q = QP_2$. 又因

$$N \cap P_2Q = N \cap P_2 \trianglelefteq P_2Q$$

故 $Q \leqslant N_G(N \cap P_2)$，显然 $P \leqslant N_G(N \cap P_2)$. 假设 $q_1, q_2, \cdots, q_t$ 是 $\pi(G)$ 的所有与 p 不同的元素，$Q_i \in \mathrm{Syl}_{q_i}(G)$ 且 $Q_i \in \delta$，可得

$$N \cap P_2 \trianglelefteq \langle P, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t \rangle = G$$

因此 $N \cap P_2 = 1$ 或 $N \leqslant P_2$，这两种情形都不可能.

因此，结论成立.

参考文献：

[1] DOERK K, HAWKES T. Finite Soluble Groups [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1992: 871-872.

[2] GUO W B. The Theory of Classes Groups [M]. New York: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000: 257-258.

[3] 曹建基，高建玲. 非正规循环子群的正规化子皆极大的两类有限可解群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(12): 81-85.

[4] 袁　媛，常　健，刘建军. 有限群的可解性与其部分极大子群的 SS-可补性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(4): 1-4.

[5] 袁　媛，唐　康，刘建军. S-拟正规嵌入子群与有限群的 p-幂零性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 1-4.

[6] ASAAD M, HELIEL A A. On Permutable Subgroups of Finite Groups [J]. Archiv der Mathematik, 2003, 80(2): 113-118.

[7] LI Y M, LI X H. $\mathfrak{Z}$-Permutable Subgroups and p-Nilpotency of Finite Groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2005, 202(1): 72-81.

[8] KONG Q J, GUO X Y. On δ-Permutability of Maximal Subgroups of Sylow Subgroups of Finite Groups [J]. Archiv der Mathematik, 2008, 91(2): 106-110.

[9] LI Y M, WANG L F, WANG Y M. Finite Groups with Some $\mathfrak{Z}$-Permutable Subgroups [J]. Glasgow Mathematical Journal, 2010, 52(1): 145-150.

[10] HELIEL A A, BALLESTER-BOLINCHES A, ESTEBAN-ROMERO A R, et al. $\mathfrak{Z}$-Permutable Subgroups of Finite Groups [J]. Monatshefte Für Mathematik, 2016, 179(4): 523-534.

[11] GUO W B. On F-Supplemented Subgroups of Finite Groups [J]. Manuscripta Mathematica, 2008, 127(2): 139-150.

[12] CHEN X Y, GUO W B. On Π-Supplemented Subgroups of a Finite Groups [EB/OL] [2020-07-20]. https://arXiv: 1307. 0089, 2014, 1. 27.

[13] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York: Chelsea, 1968: 172-185.

[14] GUO W B, SKIBA A N. Finite Groups with Given s-Embeded and n-Embeded Subgroups [J]. Journal of Algebra, 2009, 321(10): 2843-2860.

[15] SKIBA A N. On Two Questions of L. A. Shemetkov Concerning Hypercyclically Embeded Subgroups of Finite Groups [J]. Journal of Group Theory, 2010, 13(6): 841-850.

[16] SU N, LI Y M, WANG Y M. A Criterion of p-Hypercyclically Embedded Subgroups of Finite Groups [J]. Journal of Algebra, 2014, 400(1): 82-93.

责任编辑　廖　坤