DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.10.015

模糊拟度量在复杂性分析中的应用

田恪明[1,2]，　吴健荣[1]

1. 苏州科技大学 数学科学学院，江苏 苏州 215009；2. 苏州科技大学 天平学院 公共教学部，江苏 苏州 215009

摘要：在复杂性理论中，复杂性分析主要是针对算法的效率进行分析. 通常地，在复杂性分析中更多的是研究算法的渐近效率. 近年来，拟度量在复杂性分析中的应用受到学者们的广泛研究，但是它也存在着一定的局限性，例如拟度量并不适合刻画算法渐近效率的高低. 为了解决这个问题，本文引入了复杂性函数集上的模糊拟度量，并以此刻画了算法渐近效率的高低. 同时，通过研究它的基本性质，建立了一个不动点定理，并应用该不动点定理研究了与分治算法相关的递归方程的解的存在性和唯一性，以及与快速排序算法相关的递归方程的解的存在性和唯一性. 以上结果构建起了模糊拟度量和算法的渐近效率之间的联系，为模糊拟度量在算法应用方面的进一步研究提供了一种新的有效途径.

关 键 词：模糊拟度量；复杂性；算法；渐近效率

中图分类号：O159　　**文献标志码：**A

文 章 编 号：1673－9868(2021)10－0110－07

开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Application of Fuzzy Quasi-Metric in Complexity Analysis

TIAN Keming[1,2]，　WU Jianrong[1]

1. *School of Mathematics Science，Suzhou University of Science and Technology，Suzhou Jiangsu 215009，China；*
2. *Department of Public Teaching，Tianping College，Suzhou University of Science and Technology，Suzhou Jiangsu 215009，China*

Abstract：In complexity theory，complexity analysis is mainly aimed at the efficiency of the algorithm. Generally，in complexity analysis，more attention is paid to the asymptotic efficiency of the algorithm. In recent years，the application of quasi-metric in complexity analysis has been widely studied by scholars，but it also has some limitations. For example，quasi-metric is not suitable for describing the asymptotic efficiency of algorithms. In order to solve this problem，a fuzzy quasi-metric in a complexity space is introduced and used to describe the asymptotic efficiency of algorithms. After giving some results of the fuzzy quasi-metric，a fixed point theorem in a complexity space is established. As its application，the existence and uniqueness of the solution of recurrence equations associated with Divide-and-Conquer algorithm and the existence and uniqueness of the solution of recurrence equations associated with Quicksort algorithm are proven. The above results construct the relationship between fuzzy quasi-metric and the asymptotic ef-

收稿日期：2020－09－22
基金项目：国家自然科学基金项目(11971343).
作者简介：田恪明，硕士，助教，主要从事模糊分析的研究.
通信作者：吴健荣，博士，教授.

ficiency of the algorithm, and provide a new and effective approach for the further research of application of fuzzy quasi-metric in algorithms.

Key words: fuzzy quasi-metric; complexity; algorithm; asymptotic efficiency

文献[1]为了构建复杂性分析的拓扑基础，在复杂性空间中引入了一种拟度量，并将其应用于分治算法的效率分析中. 随后，文献[2]进一步研究了该拟度量空间的性质，证明了复杂性空间是 Smyth 完备的，可以被建模为拟范数半线性空间. 关于此空间的更多结果详见文献[3-6].

算法的渐近效率在复杂性分析中具有重要的应用. 然而，正如本文例 2 所述，文献[1]中引入的拟度量并不适合刻画算法的渐近效率.

为解决上述问题，在本文中，我们在复杂性函数集上引入了一种模糊拟度量，并且证明了它可以刻画算法的渐近效率. 此外，我们建立了一个不动点定理，并应用此定理证明了与分治算法和快速排序算法相关的递归方程解的存在性和唯一性.

1　预备知识

在本文中，符号 $\mathbb{N}_+$ 表示非负整数集.

定义 1[7]　设 $*:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 是一个二元运算，如果

(a) $*$ 满足结合律和交换律；

(b) $*$ 是连续的；

(c) $\forall a\in[0,1]$, $a*1=a$；

(d) 当 $a\leqslant c$ 和 $b\leqslant d(a,b,c,d\in[0,1])$ 时，$a*b\leqslant c*d$.

则称 $*$ 是一个连续 t-模.

注 1　当 $a,b\in[0,1]$ 时，对任意的连续 t-模 $*$，$a\wedge b\geqslant a*b$ 恒成立.

定义 2[8]　设 X 是一个非空集合，$*$ 是一个连续 t-模，M 是 $X\times X\times[0,\infty)$ 上的模糊集，对 $\forall x,y,z\in X$，有

(FQM1) $M(x,y,0)=0$；

(FQM2) $\forall t>0$, $M(x,y,t)=M(y,x,t)=1\Leftrightarrow x=y$；

(FQM3) $\forall t,s\geqslant 0$, $M(x,z,t+s)\geqslant M(x,y,t)*M(y,z,s)$；

(FQM4) $M(x,y,\cdot):[0,\infty)\longrightarrow[0,1]$ 是左连续的.

则称 $(M,*)$ 为 X 上的一个模糊拟度量.

注 2　文献[9]介绍的概率拟度量 $(P_C,\wedge)$ 可看作一个特殊的模糊拟度量.

注 3　若 M 还满足

(FQM5) $\forall t>0$, $M(x,y,t)=M(y,x,t)$.

则 $(M,*)$ 为文献[10]意义下的一个模糊度量，有关模糊度量的更多结果详见文献[11-12].

设 $(M,*)$ 是 X 上的模糊拟度量，若 M^{-1} 是 $X\times X\times[0,\infty)$ 上的函数，且满足 $M^{-1}(x,y,t)=M(y,x,t)$，则 $(M^{-1},*)$ 也是 X 上的一个模糊拟度量. 此外，若 M^i 是 $X\times X\times[0,\infty)$ 上的函数，且满足 $M^i(x,y,t)=\min\{M(x,y,t),M^{-1}(x,y,t)\}$，则 $(M^i,*)$ 是 X 上的一个模糊度量.

文献[10]证明了：X 上任意的模糊度量 M^i 可以诱导生成一个 T_0 拓扑 τ_{M^i}，该拓扑有一个开球族 $\left\{B_{M^i}\left(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right):n\in\mathbb{N}_+\right\}$ 的局部基，其中

$$B_{M^i}\left(x,\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\left\{y\in X:M^i\left(x,y,\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}\right\}\qquad x\in X,\ n\in\mathbb{N}_+$$

此外 τ_{M^i} 是 T_2 分离的和第一可数的.

定义 3[8]　设 $\{x_n\}$ 是模糊拟度量空间 $(X,M,*)$ 中的序列，若对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $t>0$，都存在 $n_0\in\mathbb{N}_+$，使得当 $m\geqslant n\geqslant n_0$ 时 $M(x_n,x_m,t)>1-\varepsilon$，则称序列 $\{x_n\}$ 是左 K-柯西列.

定义4 设$(X, M, *)$是一个模糊拟度量空间，若对X中任意的左K-柯西列$\{x_n\}$，存在$x \in X$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} M(x, x_n, t) = \lim\limits_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$，则称$(X, M, *)$是Smyth完备的.

例1[8] 设(X, d)是一个拟度量空间，M_d是定义在$X \times X \times [0, \infty)$上的函数，且对任意的$x, y \in X$，$t \geqslant 0$，有

$$M_d(x, y, t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \dfrac{t}{t + d(x, y)} & t > 0 \end{cases}$$

若$*$为任意的连续t-模，则$(M_d, *)$为X上的一个模糊拟度量，称$(M_d, *)$是由d导出的标准模糊拟度量.

接下来我们介绍拟度量空间的一些基本概念.

定义5[13] 设(X, d)是一个拟度量空间，若对$\forall \varepsilon \in (0, 1)$，$t > 0$，都存在$n_0 \in \mathbb{N}_+$，当$m \geqslant n \geqslant n_0$时$d(x_n, x_m) < \varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$为左$K$-柯西列.

定义6[13] 设(X, d)是一个拟度量空间，若(X, d)中任意的左K-柯西列是收敛的，则称(X, d)是Smyth完备的.

定理1[2] 设(X, d)是一个拟度量空间，(X, d)是Smyth完备的当且仅当(X, d)中任意的左K-柯西列是收敛的，即存在$x \in X$使得$\lim\limits_{n\to\infty} d^s(x, x_n) = 0$.

定义7[1] 设$C = \left\{ f: \mathbb{N}_+ \longrightarrow (0, +\infty]: \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \dfrac{1}{f(n)} < +\infty \right\}$，对$\forall f, g \in C$，定义

$$d_C(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \left(\left(\frac{1}{g(n)} - \frac{1}{f(n)} \right) \vee 0 \right)$$

则称C为复杂性函数集，称d_C为复杂性拟度量，称(C, d_C)为复杂性(拟度量)空间.

注4 容易验证d_C是C上的一个拟度量.

文献[2]证明了复杂性空间(C, d_C)是Smyth完备的.

在复杂性理论中，算法的复杂性由它的运行时间函数$f(n)(n \in \mathbb{N}_+)$来表示，其中$f(n)$被称为算法的复杂性函数.

设$f, g \in C$，若对$\forall n \in \mathbb{N}_+$有$f(n) \leqslant g(n)$，则称$f$的所有输入效率都优于$g$. 显然地，若$f$的所有输入效率都优于$g$，则$d_C(f, g) = 0$.

在本文中，设$f, g \in C$，若存在$n_0 \in \mathbb{N}_+$，使得对所有的$n \geqslant n_0$都有$f(n) \leqslant g(n)$，我们称f的渐近效率优于g.

例2说明复杂性拟度量d_C不适合刻画算法的渐近效率.

例2 设$f, g \in C$，对任意的$n \in \mathbb{N}_+$，$f(n) = n + 1$，$g(n) = \dfrac{2^n}{n^2 + 2}$. 通过计算可得：当$n = 0, 1, 2, \cdots, 10$时$f(n) > g(n)$；当$n \geqslant 11$时$f(n) < g(n)$. 因此，$f$的渐近效率优于$g$. 此时，显然$d_C(f, g) \neq 0$. 因此，复杂性拟度量$d_C$不适合刻画算法的渐近效率.

2 复杂性函数集上的模糊拟度量空间

本节将在复杂性函数集C上引入模糊拟度量，以此刻画算法的渐近效率.

定义8[9] 对$\forall f, g \in C$，$t > 0$，定义辅助函数Q_C

$$Q_C(f, g, t) = \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} \left(\left(\frac{1}{g(k)} - \frac{1}{f(k)} \right) \vee 0 \right)$$

其中$t \in (n, n+1]$，$n \in \mathbb{N}_+$.

性质1[9] 对$\forall f, g \in C$，$t \in (0, 1]$，有$Q_C(f, g, t) = d_C(f, g)$.

性质2[9] 对$\forall f, g, h \in C$，$t, s > 0$，有$Q_C(f, g, t + s) \leqslant Q_C(f, h, t) + Q_C(h, g, s)$.

性质3[9] 对$\forall f, g \in C$，函数$Q_C(f, g, \cdot)$在$(0, \infty)$上是非增的和左连续的.

定理 2　设 C 是复杂性函数集，$*$ 是连续 t-模，$f,g\in C$，在 $C\times C\times[0,\infty)$ 上定义函数 M_C，

$$M_C(f,g,t)=\begin{cases}0 & t=0\\ \dfrac{t}{t+Q_C(f,g,t)} & t>0\end{cases}$$

则

(i) $(M_C,*)$ 是 C 上的一个模糊拟度量；

(ii) 若 $(M_{d_C},*)$ 是由 d_C 导出的标准模糊拟度量，则对 $\forall t\in(0,1]$，$M_C(f,g,t)=M_{d_C}(f,g,t)$.

证　(i) (FQM1) 显然成立.

(FQM2) 令 $f,g\in C$，对 $\forall t>0$，当 $f=g$ 时，

$$M_C(f,g,t)=M_C(f,f,t)=\frac{t}{t+Q_C(f,f,t)}=1$$

反之，若对 $\forall t>0$，

$$M_C(f,g,t)=M_C(g,f,t)=1$$

则特别地当 $t=1$ 时，

$$M_C(f,g,1)=M_C(g,f,1)=1$$

因此

$$Q_C(f,g,1)=Q_C(g,f,1)=0$$

又由性质 1 即得

$$d_C(f,g)=d_C(g,f)=0$$

因为 d_C 是 C 上的拟度量，所以 $f=g$.

(FQM3) 令 $f,g,h\in C$，对 $\forall t,s\geqslant 0$，不妨设 $M_C(f,h,t)\leqslant M_C(g,h,s)$，所以

$$\frac{t}{t+Q_C(f,h,t)}\leqslant\frac{s}{s+Q_C(h,g,s)}$$

即

$$tQ_C(h,g,s)\leqslant sQ_C(f,h,t)$$

又因为

$$tQ_C(f,g,t+s)\leqslant tQ_C(f,h,t)+tQ_C(h,g,s)\leqslant(t+s)Q_C(f,h,t)$$

故

$$M_C(f,g,t+s)=\frac{t+s}{t+s+Q_C(f,g,t+s)}\geqslant\frac{t}{t+Q_C(f,h,t)}=M_C(f,h,t)$$

即证得

$$M_C(f,g,t+s)\geqslant M_C(f,h,t)\wedge M_C(h,g,s)$$

因此

$$M_C(f,g,t+s)\geqslant M_C(f,h,t)*M_C(h,g,s)$$

(FQM4) 由性质 3 可知，显然成立.

(ii) 由性质 1，对 $\forall f,g\in C$，当 $t\in(0,1]$ 时，$Q_C(f,g,t)=d_C(f,g)$，于是 $M_C(f,g,t)=M_{d_C}(f,g,t)$.

下文中的模糊拟度量空间 $(C,M_C,*)$ 均为定理 2 中引入的模糊拟度量空间.

定理 3　在模糊拟度量空间 $(C,M_C,*)$ 中，对 $\forall f,g\in C$，f 的渐近效率优于 g 当且仅当存在 $n_0\in\mathbb{N}_+$，使得对 $\forall t>n_0$，有 $M_C(f,g,t)=1$.

证　必要性　对 $\forall f,g\in C$，若 f 的渐近效率优于 g，则存在 $n_0\in\mathbb{N}_+$，使得对 $\forall n\geqslant n_0$ 有 $f(n)\leqslant g(n)$. 由 $Q_C(f,g,t)$ 的定义可得，对任意的 $t>n_0$，$Q_C(f,g,t)=0$，即 $M_C(f,g,t)=1$.

充分性　由条件，当 $t\in(n_0,n_0+1]$ 时，$M_C(f,g,t)=1$，即 $Q_C(f,g,t)=0$. 于是，对 $\forall n\geqslant n_0$，有 $f(n)\leqslant g(n)$，即 f 的渐近效率优于 g.

例 3 表明模糊拟度量 M_C 可以刻画算法的渐近效率.

例 3 令 $f(n)$,$g(n)$ 为例 2 中的函数. 经计算得:当 $n=0,1,2,\cdots,10$ 时 $f(n)>g(n)$;当 $n\geqslant 11$ 时 $f(n)<g(n)$. 因此,取 $n_0=11$,则对 $\forall t\in(11,12]$,$Q_C(f,g,t)=0$. 由性质 3 可知函数 $Q_C(f,g,\cdot)$ 是非增的,所以对 $\forall t>11$,$Q_C(f,g,t)=0$,即 $M_C(f,g,t)=1$. 因此 f 的渐近效率优于 g. 即模糊拟度量 M_C 可以刻画算法的渐近效率.

定理 4 模糊拟度量空间$(C,M_C,*)$是 Smyth 完备的.

证 令$\{f_n\}$是$(C,M_C,*)$中的左 K-柯西列,取 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,则存在 $n_0\in\mathbb{N}_+$,使得当 $m\geqslant n\geqslant n_0$ 时,$M_C(f_n,f_m,t)>1-\varepsilon$. 由定理 2 得 $M_C(f_n,f_m,1)=M_{d_C}(f_n,f_m,1)$. 所以当 $m\geqslant n\geqslant n_0$ 时,

$$\frac{1}{1+d_C(f_n,f_m)}>1-\varepsilon$$

即

$$d_C(f_n,f_m)<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<2\varepsilon$$

因此,$\{f_n\}$是(C,d_C)中的左 K-柯西列. 因为(C,d_C)是 Smyth 完备的,所以存在 $f\in C$,使得

$$\lim_{n\to\infty}d_C(f,f_n)=\lim_{n\to\infty}d_C(f_n,f)=0$$

又由性质 1 可得,对 $\forall t>0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}Q_C(f,f_n,t)=\lim_{n\to\infty}Q_C(f_n,f,t)=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}M_C(f,f_n,t)=\lim_{n\to\infty}M_C(f_n,f,t)=1$$

所以左 K-柯西列$\{f_n\}$是收敛的. 因此,$(C,M_C,*)$是 Smyth 完备的.

3 不动点定理及其应用

本节主要介绍模糊拟度量空间$(C,M_C,*)$的不动点定理及其应用.

定义 9 设 Φ 是模糊拟度量空间$(C,M_C,*)$上的一个自映射,对于 $f,g\in C$,$t\in(0,1]$,若存在 $k\in(0,1)$,使得

$$\frac{1}{M_C(\Phi f,\Phi g,t)}-1\leqslant k\left(\frac{1}{M_C(f,g,t)}-1\right)$$

则称自映射 Φ 是$(0,1]$-压缩的.

定理 5 若 Φ 是一个$(0,1]$-压缩的自映射,则 Φ 有唯一的不动点.

证 令 $\Phi f_n=f_{n+1}$,则存在 $k\in(0,1)$,使得对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$,$t\in(0,1]$,总有

$$\frac{1}{M_C(f_{n+1},f_{n+2},t)}-1=\frac{1}{M_C(\Phi f_n,\Phi f_{n+1},t)}-1\leqslant k\left(\frac{1}{M_C(f_n,f_{n+1},t)}-1\right)$$

则

$$Q_C(f_{n+1},f_{n+2},t)\leqslant kQ_C(f_n,f_{n+1},t)$$

由性质 1 可得

$$d_C(f_{n+1},f_{n+2})\leqslant kd_C(f_n,f_{n+1})$$

根据三角不等式得,对 $\forall n,m\in\mathbb{N}_+$ 有

$$d_C(f_n,f_{n+m})\leqslant\frac{k^n(1-k^m)}{1-k}d_C(f_0,f_1)\leqslant\frac{k^n}{1-k}d_C(f_0,f_1)$$

所以$\{f_n\}$在(C,d_C)中是一个左 K-柯西列. 因为(C,d_C)是 Smyth 完备的,从而$\{f_n\}$在度量$(d_C)^s$意义下是收敛的. 因此,序列$\{f_n\}$在模糊度量$(M_{d_C})^i$意义下是收敛的. 即存在 $p\in C$,对 $\forall t\in(0,1]$,有

$$\lim_{n\to\infty}M_{d_C}(p,f_n,t)=\lim_{n\to\infty}M_{d_C}(f_n,p,t)=1$$

又由定理 2 可得,对 $\forall t\in(0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} M_C(p, f_n, t)=\lim_{n\to\infty} M_C(f_n, p, t)=1$$

因此，$\{f_n\}$ 在模糊度量 M_C^i 意义下收敛到 p. 由 Φ 是(0，1]-压缩映射可得，对 $\forall t\in(0,1]$，

$$\lim_{n\to\infty} M_C(\Phi p, f_n, t)=\lim_{n\to\infty} M_C(f_n, \Phi p, t)=1$$

因此，$\{f_n\}$ 在模糊度量 M_C^i 意义下收敛到 Φp. 又因为模糊度量 M_C^i 的拓扑是 T_2 分离的，所以 $p=\Phi p$，即 Φ 有不动点 p.

下面证 Φ 的不动点的唯一性. 令 $q\in C$ 是 Φ 的不动点，则对 $\forall t\in(0,1]$，$M_C(p, q, t)=M_C(\Phi p, \Phi q, t)$. 由于 Φ 是(0，1]-压缩的，因此存在 $k\in(0,1)$，使得对 $\forall t\in(0,1]$，

$$\frac{1}{M_C(p, q, t)}-1=\frac{1}{M_C(\Phi p, \Phi q, t)}-1\leqslant k\left(\frac{1}{M_C(p, q, t)}-1\right)$$

即 $M_C(p, q, t)=1$. 因为 $M_C(p, q, \cdot)$ 是递增的，所以对 $\forall t>0$，都有 $M_C(p, q, t)=1$. 同理可得，对 $\forall t>0$，都有 $M_C(q, p, t)=1$. 因此 $p=q$. 即 Φ 的不动点是唯一的.

接下来我们将应用定理 5 来证明与分治算法相关的递归方程的解的存在唯一性.

正如文献[1，14]中所述，分治算法都是通过递归的方法将原始问题分解成几个子问题来解决，每个子问题都是由相同的算法单独解决的，然后组合后的结果就是原始问题的答案. 因此，分治算法的复杂性通常由下面的递归方程的解来表示：

$$\begin{cases} T(1)=c \\ T(n)=aT\left(\dfrac{n}{b}\right)+h(n) \end{cases}\qquad a, b, c\in\mathbb{N}_+,\ a, b\geqslant 2 \tag{1}$$

其中，$n\in\{b^p: p\in\mathbb{N}_+\}$，并且 $h(n)<+\infty$. 递归方程(1)自然地诱导出一个映射 Φ，定义如下：

$$\begin{cases} \Phi f(1)=c \\ \Phi f(n)=af\left(\dfrac{n}{b}\right)+h(n) & n\in\{b^p: p\in\mathbb{N}_+\} \\ \Phi f(n)=+\infty & n\notin\{b^p: p\in\mathbb{N}_+\} \end{cases}$$

文献[1]证明了：对 $\forall f, g\in C$，当 $k=\dfrac{1}{a}$ 时，$d_C(\Phi f, \Phi g)\leqslant kd_C(f, g)$. 由性质 1 可得，对 $\forall t\in(0,1]$，

$$k\left(\frac{1}{M_C(f, g, t)}-1\right)=\frac{kQ_C(f, g, t)}{t}=\frac{kd_C(f, g)}{t}\geqslant\frac{d_C(\Phi f, \Phi g)}{t}=$$

$$\frac{Q_C(\Phi f, \Phi g, t)}{t}=\frac{1}{M_C(\Phi f, \Phi g, t)}-1$$

因此，Φ 是一个(0，1]-压缩的自映射. 应用定理 5 可得，Φ 有唯一的不动点 $g_0\in C$，即为递归方程(1)的解.

最后我们将应用定理 5 来证明与快速排序算法相关的递归方程解的存在唯一性.

文献[15]在讨论快速排序算法的平均案例分析时得出了一个递归方程 T：

$$\begin{cases} T(1)=0 \\ T(n)=\dfrac{2(n-1)}{n}+\dfrac{n+1}{n}T(n-1) & n>1 \end{cases} \tag{2}$$

正如文献[16]中所述，递归方程(2)可以自然地诱导出一个映射 $\Phi: C\longrightarrow C$，定义如下：

$$\begin{cases} \Phi f(1)=+\infty \\ \Phi f(2)=1 \\ \Phi f(n)=\dfrac{2(n-1)}{n}+\dfrac{n+1}{n}f(n-1) & n>2 \end{cases}$$

由文献[17]可知，对 $\forall f, g\in C$，$d_C(\Phi f, \Phi g)\leqslant\dfrac{d_C(f, g)}{2}$. 取 $k=\dfrac{1}{2}$，由性质 1 得，对 $\forall t\in(0,1]$，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_C(f, g, t)}-1\right)=\frac{Q_C(f, g, t)}{2t}=\frac{d_C(f, g)}{2t}\geqslant\frac{d_C(\Phi f, \Phi g)}{t}=$$

$$\frac{Q_C(\Phi f, \Phi g, t)}{t} = \frac{1}{M_C(\Phi f, \Phi g, t)} - 1$$

因此，Φ 是一个$(0, 1]$-压缩的自映射. 应用定理5可得，Φ 有唯一的不动点 $g_0 \in C$. 从而，若定义函数 $h: \mathbb{N}_+ \longrightarrow [0, +\infty)$ 如下:

$$\begin{cases} h(1) = 0 \\ h(n) = g_0(n) & n > 1 \end{cases}$$

则 h 就是递归方程(2)的唯一解.

参考文献:

[1] SCHELLEKENS M. The Smyth Completion: a Common Foundation for Denotational Semantics and Complexity Analysis [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 1995, 1: 535-556.

[2] ROMAGUERA S, SCHELLEKENS M. Quasi-Metric Properties of Complexity Spaces [J]. Topology and Its Applications, 1999, 98(1-3): 311-322.

[3] ROMAGUERA S, SCHELLEKENS M. Duality and Quasi-Normability for Complexity Spaces [J]. Applied General Topology, 2002, 3(1): 91-112.

[4] GARCÍA-RAFFI L M, ROMAGUERA S, SÁNCHEZ-PÉREZ E A. Sequence Spaces and Asymmetric Norms in the Theory of Computational Complexity [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 36(1-2): 1-11.

[5] ROMAGUERA S, SÁNCHEZ-PÉREZ E A, VALERO O. The Dual Complexity Space as the Dual of a Normed Cone [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2006, 161(2): 165-174.

[6] ROMAGUERA S, SCHELLEKENS M. Partial Metric Monoids and Semivaluation Spaces [J]. Topology and Its Applications, 2005, 153(5-6): 948-962.

[7] SCHWEIZER B, SKLAR A. Statistical Metric Spaces [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1960, 10(1): 314-334.

[8] GREGORI V, ROMAGUERA S. Fuzzy Quasi-Metric Spaces [J]. Applied General Topology, 2004, 5(1): 129-136.

[9] ROMAGUERA S, TIRADO P. The Complexity Probabilistic Quasi- Metric Space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 376(2): 732-740.

[10] KRAMOSIL I, MICHALEK J. Fuzzy Metric and Statistical Metric Spaces [J]. Kyberneticall Praha, 1975, 11(5): 215-229.

[11] 杨 浩，吴健荣. 模糊度量空间中的有界集 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(10): 45-50.

[12] 杨 浩，吴健荣. 模糊度量空间中的伪度量结构及等距同构 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 95-100.

[13] REILLY I L, SUBRAHMANYAM P V, VAMANAMURTHY M K. Cauchy Sequences in Quasi-Pseudo-Metric Spaces [J]. Monatshefte für Mathematik, 1982, 93(2): 127-140.

[14] AHO A V, HOPCROFT J E, ULLMAN J. Data Structures and Algorithms [M]. New York: Addison-Wesley, 1983.

[15] KRUSE R L. Data Structures and Program Design [M]. Englewood: Prentice-Hall, 1987.

[16] ROMAGUERA S, SAPENA A, TIRADO P. The Banach Fixed Point Theorem in Fuzzy Quasi-Metric Spaces with Application to the Domain of Words [J]. Topology and Its Applications, 2007, 154(10): 2196-2203.

[17] SAADATI R, VAEZPOUR S M, CHO Y J. Quicksort Algorithm: Application of a Fixed Point Theorem in Intuitionistic Fuzzy Quasi-Metric Spaces at a Domain of Words [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 228(1): 219-225.

责任编辑 廖 坤