第 43 卷第 10 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2021年10月
Vol. 43 No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct. 2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.10.016

平面凸曲线的一类熵不变流

方建波

贵州财经大学 数统学院，贵阳 550025

摘要：研究了保持凸曲线熵不变的一类曲线流. 在这个流下，演化曲线保持凸性，其长度和所围区域的面积在不断减小，最后将光滑地收敛到半径为 $e^{-\varepsilon(0)}$ 的圆.

关 键 词：凸曲线；曲线的熵；几何流

中图分类号：O186.11　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2021)10-0117-07　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

A Class of Entropy Invariant Flows of the Convex Curve

FANG Jianbo

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China

Abstract: A class of curve flows with constant entropy of the convex curve are studied. Under this flow, the evolution curve keeps convexity, and its length and the area enclosed by the curve are diminishing, and finally it converges smoothly to a circle with radius $e^{-\varepsilon(0)}$.

Key words: convex curve; entropy of curve; geometric flow

利用偏微分方程来处理几何问题始于 20 世纪 70 年代，这一时期是几何流蓬勃发展的阶段. 从文献[1]用“热流”研究 Riemann 流形之间的调和映射开始，历经 Gauss 曲率流[2]、平均曲率流[3]、Gauss-Kronecker 曲率流[4]，以及为解决庞加莱猜想而创立的 Ricci 流[5]，几何流逐步成为现代数学的热门研究领域，一大批数学研究者在这方面有许多突出的研究成果.

以上的几何流限制在平面上就有相应的平面曲线流. 由于高维曲率流的许多经典结果在平面上的情形并不平凡，平面曲线流的许多重要结果也不能直接推广到高维情形. 因此，研究平面曲线流既有重要意义又有独立价值. 平面曲线流中最简单且最为重要的模型是曲线收缩流，这方面的研究成果可参见文献[6-7]. 其后，关于曲线流的一个重要研究领域就进入了平面凸曲线流的研究中，这方面涉及到保持凸曲线所围区域面积不变的流[8-11]、保持曲线长度不变的流[12-13]以及外法向流[14-15]. 这里，长度和面积是曲

收稿日期：2020-09-08

基金项目：国家自然科学基金项目(11861004)；贵州省科技厅一般项目(黔科合基础-ZK[2021]一般 007)；贵州省教育厅自然科学研究项目(黔教合 KY 字[2021]138).

作者简介：方建波，教授，博士，主要从事整体微分几何与几何分析的研究.

线的整体几何量，因此，对保持曲线整体几何量不变的几何流的研究是有意义的.

在平面上任给一条简单的、凸且闭的光滑曲线 γ，它的被称为熵能量的整体几何量定义为

$$\varepsilon(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int\kappa\log\kappa\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

其中 κ 是曲线 γ 的曲率. 曲线的熵 $\varepsilon(\gamma)$ 在曲线流中有非常重要的作用，它常常被用来估计演化曲线的曲率 κ 的界. 一个自然的想法是，在某个曲线流下，如果演化曲线的熵保持不变，那么演化曲线的相应渐近行为会是什么样的呢？

为此，设 $\gamma_0: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是平面上的一条简单光滑凸闭曲线，考虑如下的演化方程：

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(u,t)=\left(p(u,t)-\frac{2\pi}{\int\kappa^2\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{N}(u,t) \tag{2}$$

这里，$\gamma(u,0)=\gamma_0$，而 $\boldsymbol{N}$ 和 $p=-\langle\gamma,\boldsymbol{N}\rangle$ 分别为演化曲线 $\gamma(u,t)$ 的单位内法向量和支撑函数. 在方程(2) 下，演化曲线 $\gamma(u,t)$ 有如下的性质：

定理 1 如果一条简单凸闭曲线 γ_0(其熵能 $\varepsilon(0)<1$) 按照方程(2) 进行演化，那么在演化过程中，曲线始终保持凸性，曲线的长度 $L(t)$ 和它所围区域的面积 $A(t)$ 在不断减少，而熵能量(1) 式却是保持不变的，随着时间 t 趋于无穷，演化曲线将光滑地收敛到圆.

在平面上任取一条凸闭曲线 γ，在直角坐标系下，由正 x 轴逆时针转到切向量 $\boldsymbol{T}$ 所形成的角 θ 定义为曲线 γ 的切向角，且曲率 $\kappa=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$. 由曲线的凸性，选择 θ 为演化曲线的参数，从而方程(2) 可以重写为

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(\theta,t)=\left(p(\theta,t)-\frac{2\pi}{\int\kappa\,\mathrm{d}\theta}\right)\boldsymbol{N}(\theta,t) \tag{3}$$

因为 θ 是与时间 t 有关的函数，为了计算的方便，我们希望 θ 与时间 t 无关，为此在方程(3) 的基础上添加一个切向分量而得到演化方程

$$\frac{\partial\hat{\gamma}}{\partial t}(\theta,t)=\alpha(\theta,t)\boldsymbol{T}(\theta,t)+\left(p(\theta,t)-\frac{2\pi}{\int\kappa\,\mathrm{d}\theta}\right)\boldsymbol{N}(\theta,t) \tag{4}$$

这里 $\alpha(\theta,t)$ 待定. 在方程(4) 下，切向角 θ 的演化方程为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=(\alpha(\theta,t)+p_\theta(\theta,t))\kappa(\theta,t)$$

因此，要使得 θ 与 t 无关，只需选取 $\alpha(\theta,t)=-p_\theta(\theta,t)$ 即可.

由于方程(3) 和(4) 的解曲线除相差一个参数变换外，在本质上是一样的[8]，因此，接下来考虑方程(4) 即可. 因为

$$\hat{\gamma}(\theta,t)=(x(\theta,t),y(\theta,t))$$

显然方程(4) 是关于 x, y 的抛物方程组，这不利于我们解决问题，为此，需要把方程(4) 转化为与之等价的柯西问题(单个变量的抛物方程)，即

引理 1 如果 γ_0 是一条光滑的凸闭曲线，那么方程(4) 等价于柯西问题

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\kappa-\kappa^2\frac{2\pi}{\oint\kappa\,\mathrm{d}\theta} \qquad \kappa(\theta,0)=\kappa_0(\theta) \tag{5}$$

证 曲率 κ 的演化方程为

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t}=\kappa^2\left(\left(p-\frac{2\pi}{\oint\kappa\,\mathrm{d}\theta}\right)+\left(p-\frac{2\pi}{\oint\kappa\,\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta\theta}\right)=\kappa^2\left(p+p_{\theta\theta}-\frac{2\pi}{\oint\kappa\,\mathrm{d}\theta}\right)$$

对于平面凸曲线，有

$$\frac{1}{\kappa}=p+p_{\theta\theta}$$

将其代入上式即得方程(5).

下面讨论方程(5)的存在性. 因为方程(5)是一个积分-微分方程，利用压缩映像原理可得：

定理 2　柯西方程(5)在整个时间区间$[0,\omega)$上有唯一正解，其中 ω 为流的最大存在时间.

证　证明过程类似于文献[16]中相应问题的证明方法. 为了叙述的完整性，我们给出相应证明. 记

$$m=\min\{\kappa_0(\theta)\mid\theta\in S^1\}$$

$$M=\max\{\kappa_0(\theta)\mid\theta\in S^1\}$$

并定义

$$\widetilde{m}=\frac{1}{\lambda}m\qquad\widetilde{M}=\lambda M\qquad Q_\omega=S^1\times[0,\omega)$$

其中常数 $\lambda>1$.

考虑满足初始条件 $u(\theta,0)=\kappa_0(\theta)$ 的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\theta,t)=v(\theta,t)-\frac{2\pi}{\oint\kappa\,\mathrm{d}\theta}v^2(\theta,t)\tag{6}$$

这里

$$\widetilde{m}\leqslant v\leqslant\widetilde{M}\qquad v\in C(\overline{Q}_\omega)$$

选取时间

$$\omega=\min\left\{\frac{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)m^2}{\lambda^3M^2},\ 1-\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{2}\,\frac{\widetilde{m}^2}{\widetilde{m}^2+2\widetilde{M}^3+\widetilde{M}^2}\right\}$$

由方程(6)可以得到

$$u(\theta,t)\geqslant\kappa_0(\theta)-\frac{\widetilde{M}^2}{\widetilde{m}}t\geqslant m-\frac{\widetilde{M}^2}{\widetilde{m}}t\geqslant\frac{m}{\lambda}=\widetilde{m}$$

以及 $u(\theta,t)\leqslant\widetilde{M}$，因此

$$\widetilde{m}\leqslant u\leqslant\widetilde{M}\qquad u\in C(\overline{Q}_\omega)$$

引入集合

$$V=\{f\in C(\overline{Q}_\omega)\mid\widetilde{m}\leqslant f(\theta,t)\leqslant\widetilde{M}\}$$

f 的范数定义为

$$\|f\|_{C(\overline{Q}_\omega)}=\max\{|f(\theta,t)|\mid(\theta,t)\in\overline{Q}_\omega\}$$

那么方程(6)的解就定义了 V 自身上的一个算子 T，接下来证明算子 T 是压缩映射. 因为

$$u=\int_0^t v\,\mathrm{d}t-\frac{2\pi}{\oint v\,\mathrm{d}\theta}\int_0^t v^2\,\mathrm{d}t+\kappa_0(\theta)$$

任取 $v_1,v_2\in V$，并定义 $Tu_i=v_i(i=1,2)$，则

$$u_1-u_2=\int_0^t(v_1-v_2)\,\mathrm{d}t+\frac{2\pi\left(\oint v_1\,\mathrm{d}\theta\int_0^t v_2^2\,\mathrm{d}t-\oint v_2\,\mathrm{d}\theta\int_0^t v_1^2\,\mathrm{d}t\right)}{\oint v_1\,\mathrm{d}\theta\oint v_2\,\mathrm{d}\theta}$$

注意到

$$\left|\oint v_1\,\mathrm{d}\theta\int_0^t v_2^2\,\mathrm{d}t-\oint v_2\,\mathrm{d}\theta\int_0^t v_1^2\,\mathrm{d}t\right|=$$

$$
\left|\oint v_1 \mathrm{d}\theta \int_0^t (v_2^2 - v_1^2)\,\mathrm{d}t + \oint (v_1 - v_2)\,\mathrm{d}\theta \int_0^t v_1^2 \mathrm{d}t\right| \leqslant
$$

$$
4\pi \widetilde{M}^3 \int_0^t |v_2 - v_1|\,\mathrm{d}t + 2\pi \| v_2 - v_1 \|_{C(\overline{Q}_\omega)} \widetilde{M}^2 t \leqslant
$$

$$
(4\pi \widetilde{M}^3 + 2\pi \widetilde{M}^2) \| v_2 - v_1 \|_{C(\overline{Q}_\omega)} t
$$

那么可得

$$
|u_1 - u_2|_{C(\overline{Q}_\omega)} \leqslant \left(1 + \frac{2\widetilde{M}^3 + \widetilde{M}^2}{\widetilde{m}^2}\right) \| v_1 - v_2 \|_{C(\overline{Q}_\omega)} t =
$$

$$
\frac{2\widetilde{M}^3 + \widetilde{M}^2 + \widetilde{m}^2}{\widetilde{m}^2} \| v_1 - v_2 \|_{C(\overline{Q}_\omega)} t \leqslant
$$

$$
\frac{1}{2} \| v_1 - v_2 \|_{C(\overline{Q}_\omega)} t
$$

从而说明 T 是从 V 到自身的压缩算子，由压缩映像原理得知，存在 $\kappa \in C(\overline{Q}_\omega)$，使得 $\widetilde{m} \leqslant \kappa \leqslant \widetilde{M}$，并且 $T(\kappa) = \kappa$. 下面的推论是直接的：

推论 1 演化方程(2) 在整个时间区间$[0, \omega)$上有唯一正解.

接下来，我们将证明方程(2) 的长时存在性，下面的结论是必要的：

定理 3 在方程(2) 下，演化曲线的长度和所围区域的面积在不断减少，但是曲线的熵却是保持不变的.

证 由长度和面积的演化方程及 Gage 不等式$\int \kappa^2 \mathrm{d}s \geqslant \frac{\pi L}{A}$，可得

$$
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\int \left(p - \frac{2\pi}{\int \kappa^2 \mathrm{d}s}\right) \kappa \,\mathrm{d}s \leqslant -L + \frac{4\pi^2}{\frac{\pi L}{A}} = \frac{4\pi A - L^2}{L} \leqslant 0
$$

$$
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\int \left(p - \frac{2\pi}{\int \kappa^2 \mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s \leqslant -2A + \frac{2\pi L}{\frac{\pi L}{A}} = -2A + 2A = 0
$$

从而可知演化曲线的长度和所围区域的面积都在不断减少.

对于曲线熵的演化方程，有

$$
\frac{\mathrm{d}\varepsilon(\gamma)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \log \kappa \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\kappa_t}{\kappa} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \left(1 - \frac{2\pi}{\oint \kappa \,\mathrm{d}\theta} \kappa\right) \mathrm{d}\theta = 0
$$

即曲线的熵在演化过程中为常数，定理 3 得证.

由曲率的演化方程可知

$$
\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa - \kappa^2 \frac{2\pi}{\oint \kappa^2 \mathrm{d}s} \geqslant -\kappa^2 \frac{2\pi}{\oint \kappa^2 \mathrm{d}s} \geqslant -\kappa^2 \frac{2\pi}{\frac{4\pi^2}{L(t)}} \geqslant -\frac{L(0)}{2\pi} \kappa^2
$$

简单地计算可以得到

$$
\kappa(\theta, t) \geqslant \frac{1}{\frac{1}{\kappa(\theta, 0)} + \frac{L(0)}{2\pi} t} > 0
$$

即演化曲线在不产生奇点的前提条件下保持凸性.

考虑演化方程

$$\frac{\partial \log \kappa}{\partial t}=1-\kappa \frac{2\pi}{\oint \kappa^2 \mathrm{d}s} \geqslant 1-\frac{L(t)}{2\pi}\kappa$$

利用

$$\kappa_{\min}(t) \leqslant \frac{2\pi}{L(t)}$$

可知

$$\frac{\partial \log \kappa_{\min}}{\partial t} \geqslant 1-\frac{L(t)}{2\pi}\kappa_{\min} \geqslant 0$$

这说明函数 $\log \kappa_{\min}$ 是单调递增的，从而由

$$\kappa_{\min}(t) \geqslant \kappa_{\min}(0)>0$$

可说明曲率有一致的正下界.

如果在某个区间上有 $\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2>0$，那么

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\log\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2-\log \kappa^2\right)=-\frac{4\pi\kappa}{\int \kappa \mathrm{d}\theta}<0$$

则

$$\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\partial \kappa_0}{\partial \theta}\right)^2 \frac{\kappa^2}{\kappa_0^2}$$

因此

$$\begin{aligned}\log \kappa_{\max}(t)-\log \kappa_{\min}(t)=&\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\kappa(\theta, t)} \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(\theta, t)\mathrm{d}\theta \leqslant \\ &\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa(\theta, t)}\left|\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(\theta, t)\right| \mathrm{d}\theta \leqslant \\ &\sqrt{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2(\theta, t)}\left|\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(\theta, t)\right|^2 \mathrm{d}\theta} \leqslant \\ &\sqrt{2\pi}\sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa^2(\theta, 0)}\left|\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(\theta, 0)\right|^2 \mathrm{d}\theta}=C\end{aligned}$$

其中 C 为常数. 从而可得曲率的上界

$$\kappa_{\max}(t) \leqslant \kappa_{\min}(t)\mathrm{e}^C$$

由定理 3 知曲线的熵在方程(2)下保持不变，所以

$$\begin{aligned}\varepsilon(0)=&\frac{1}{2\pi}\int \kappa \log \kappa \mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int \log \kappa \mathrm{d}\theta \geqslant \\ &\frac{1}{2\pi}\int\left(1-\frac{1}{\kappa(\theta, t)}\right)\mathrm{d}\theta \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\left(1-\frac{1}{\kappa_{\min}(t)}\right)\mathrm{d}\theta \geqslant \\ &1-\frac{1}{\kappa_{\min}(t)}\end{aligned}$$

由 $\varepsilon(0)<1$ 可得

$$\kappa_{\min}(t) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon(0)}$$

从而可得曲率的一致上界

$$\kappa_{\max}(t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^C}{1-\varepsilon(0)}$$

结合所得的曲率的一致上下界，我们有：

定理4 方程(2)在$[0,\infty)$上长时存在.

下面我们将研究方程(2)的Hausdorff收敛性和C^{∞}收敛性.

定理5 在方程(2)下，演化曲线在Hausdorff意义下收敛到半径为$e^{-\varepsilon(0)}$的圆周.

证 一方面，由定理3可得等周差的演化方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L^2-4\pi A)=-2L^2+\frac{8\pi^2 L}{\int\kappa^2\mathrm{d}s}+8\pi A-\frac{8\pi^2 L}{\int\kappa^2\mathrm{d}s}=-2(L^2-4\pi A)$$

即

$$L^2-4\pi A=(L_0^2-4\pi A_0)e^{-2t}$$

因此，由Bonnesen不等式可知

$$(L_0^2-4\pi A_0)e^{-2t}=L^2-4\pi A\geqslant\pi^2(r_{\text{out}}-r_{\text{in}})^2$$

这里r_{in}，r_{out}分别为演化曲线的最大内切圆半径和最小外接圆半径，当时间$t\to\infty$时，$r_{\text{in}}\to r_{\text{out}}$.

另一方面，由$\log x\geqslant 1-\frac{1}{x}(x>0)$可知

$$\varepsilon(0)=\frac{1}{2\pi}\int\kappa\log\kappa\,\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{2\pi}\int(\kappa-1)\,\mathrm{d}s=1-\frac{L(t)}{2\pi}$$

由$\varepsilon(0)<1$知$L(t)$有一致正下界，且

$$2\pi r_{\text{out}}\geqslant L(t)\geqslant 2\pi(1-\varepsilon(0))$$

从而可得

$$r_{\text{out}}\geqslant 1-\varepsilon(0)$$

综上可知，演化曲线收敛到圆周.

又因极限圆周的熵为

$$\varepsilon(0)=\frac{1}{2\pi}\int\log\kappa\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int\log\frac{1}{R_{\text{cir}}}\mathrm{d}\theta=\log\frac{1}{R_{\text{cir}}}$$

因此$R_{\text{cir}}=e^{-\varepsilon(0)}$，定理5证毕.

最后，我们通过演化曲线的曲率半径来说明C^{∞}收敛性.

定理6 在方程(2)下，演化曲线的曲率半径$\rho(\theta,t)$收敛到常数$\frac{L_{\infty}}{2\pi}$，并且曲率半径的所有导数$\frac{\partial^k\rho}{\partial\theta^k}$收敛到0，其中$k$的取值为所有正整数.

证 因为

$$\rho(\theta,t)=\frac{1}{\kappa(\theta,t)}$$

因此利用方程(5)可得曲率半径$\rho(\theta,t)$的演化方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\theta,t)=\frac{2\pi}{\int\kappa\,\mathrm{d}\theta}-\rho(\theta,t)$$

再结合长度$L(t)$的演化方程得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho(\theta,t)-\frac{L(t)}{2\pi}\right)=-\left(\rho(\theta,t)-\frac{L(t)}{2\pi}\right)$$

即

$$\rho(\theta,t)-\frac{L(t)}{2\pi}=\left(\rho(\theta,0)-\frac{L(0)}{2\pi}\right)e^{-t}\tag{7}$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\theta,\ t)=\frac{L_\infty}{2\pi}$$

并且对(7) 式求导可得

$$\frac{\partial^k\rho}{\partial\theta^k}(\theta,\ t)=\frac{\partial^k\rho}{\partial\theta^k}(\theta,\ 0)\mathrm{e}^{-t}$$

从而定理 6 得证.

定理 1 的证明　结合定理 3、定理 4 和定理 5、定理 6 即证得主要结果.

参考文献：

[1] EELLS J, SAMPSON J H. Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds [J]. American Journal of Mathematics, 1964, 86(1): 109-160.

[2] FIREY W J. Shapes of Worn Stones [J]. Mathematika, 1974, 21(1): 1-11.

[3] HUISKEN G. Flow by Mean Curvature of Convex Surfaces Into Sphere [J]. Journal of Differential Geometry, 1984, 20: 237-266.

[4] TSO K. Deforming a Hypersurface by Its Gauss-Kronecker Curvature [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1985, 38(6): 867-882.

[5] HAMILTON R. The Ricci Curvature Equation [M]. New York: Springer, 1984.

[6] GAGE M, HAMILTON R S. The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves [J]. Journal of Differential Geometry, 1986, 23(1): 69-96.

[7] GRAYSON M A. The Heat Equation Shrinks Embedded Plane Curve to Round Points [J]. Journal of Differential Geometry, 1987, 26: 285-314.

[8] GAGE M E. On an Area-Preserving Evolution Equation for Plane Curves [J]. Nonlinear Problems in Geometry, 1986, 51: 51-62.

[9] CHAO X L, LING X R, WANG X L. On a Planar Area-Preserving Curvature Flow [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2013, 141(5): 1783-1789.

[10] MA L, CHENG L. A Non-Local Area Preserving Curveflow [J]. Geometriae Dedicata, 2014, 171(1): 231-247.

[11] MAO Y Y, PAN S L, WANG Y L. An Area-Preserving Flow for Closed Convex Plane Curves [J]. Internattional Journal of Mathematics, 2013, 24(4): 84-125.

[12] PAN S L, YANG J N. On a Non-Local Perimeter-Preserving Curve Evolution Problem for Convex Plane Curves [J]. Manuscripta Mathematics, 2008, 127(4): 469-484.

[13] MA L, ZHU A Q. On a Length Preserving Curve Flow [J]. Monatshefte Für Mathematik, 2012, 165(1): 57-78.

[14] KRÖNER H. A Note on Expansion of Convex Plane Curves Via Inverse Curvature Flow [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2019, 26(2): 1-11.

[15] 张增乐. 关于单位速度外法向流下的几何不变量的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(6): 47-51.

[16] GAO L Y, WANG Y L. Deforming Convex Curves with Fixed Elastic Energy [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 427(2): 817-829.

责任编辑　廖　坤