

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.11.009

具有马尔可夫链的二维罗塞尔系统的 异步输出反馈耗散控制

叶志勇, 罗良刚, 罗小玉

重庆理工大学 理学院, 重庆 400054

摘要: 研究了对二维马尔可夫跳系统的耗散控制问题。基于罗塞尔(Roesser)模型对底层系统进行描述。特别地, 在处理被控系统与控制器之间的异步时, 采用隐马尔可夫模型, 并通过条件概率矩阵来构造它们间的关系。利用 Lyapunov 稳定性理论构造 Lyapunov 函数并研究了闭环二维系统的渐近稳定性和耗散性, 得到了所需的控制增益。最后, 通过一个实例来验证了该方法的有效性和潜力。

关键词: 耗散性; 二维系统; 马尔科夫跳系统; 隐马尔可夫模型

中图分类号: O231

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2021)11-0069-11

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Asynchronous Output Feedback Dissipative Control for Two-Dimensional Rosel Systems with Markov Chains

YE Zhiyong, LUO Lianggang, LUO Xiaoyu

College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China

Abstract: In this paper, the dissipative control of two-dimensional Roesser systems with Markov chains is considered. The underlying system is described based on the Roesser model. In particular, when dealing with the asynchronous phenomenon between the controlled system and the controller, the hidden Markov model is adopted and the relationship between them is constructed by the conditional probability matrix. Using the Lyapunov stability theory and the Lyapunov function, the asymptotic stability and dissipativity of a closed loop two-dimensional system are considered, and the desired control gain is obtained. Finally, an example is presented to show the effectiveness and potential of the proposed design method.

Key words: dissipativity; two-dimensional system; Markov jump system; hidden Markov model

收稿日期: 2019-11-25

基金项目: 重庆自然科学基金项目(2019cc27, 2016cc12)。

作者简介: 叶志勇, 博士, 教授, 主要从事动力学与动力学控制研究。

近年来二维系统的控制问题受到了广泛关注,得到了极大发展^[1-6].

耗散系统是由 Willems 在 1972 年提出,然后由 Hill 和 Moylan 进行了推广,使得耗散性在系统和控制系统中起重要作用.耗散性理论概括包含了无源性定理、有界实引理、Kalman-Yakubovich-Popov 引理和圆判据^[7-9].因此,耗散性及其在控制和滤波中的应用受到广泛关注并且取得重大突破,得到许多新的理论和结果.针对连续时间^[10]和离散时间^[11]系统的耗散控制器的设计方法被提出.文献[12]考虑随机发生的一种分布式时滞,利用凸优化和随机分析理论,保证了得到的误差系统在耗散性下的稳定性.而对于不确定扰动的 T-S 模糊系统,文献[13]提出基于非并行分布补偿的严格耗散标准,利用控制器增益中的有界不确定性来处理控制信号增益的实际元件不确定性和使用多李雅普诺夫函数进行控制器综合,得到了相对保守的设计条件.

带有马尔可夫跳的系统也是研究邻域的热点,马尔可夫链的优势在于擅长对突然改变的结构或参数变化进行建模.文献[14]研究了一类马尔可夫跳系统在连续时间和离散时间条件下的非脆弱控制问题,其构造了一个随机正李雅普诺夫函数,基于增益矩阵分解技术,利用李雅普诺夫函数设计了一组模态相关的状态反馈控制和吸引域增益.文献[15]研究了具有乘性噪声的离散时间奇异马尔可夫跳系统的耗散控制,并针对系统模态与控制器模态之间的异步现象,构造了一组马尔可夫链,最后利用线性矩阵不等式给出了保证耗散性和稳定性的充分条件.

虽然目前大多数的研究方向都集中在同步的控制器和滤波器上^[17-19],但同步的控制器和滤波器往往不符合现实,需要的条件过于苛刻,在实际中,控制器或滤波器的模式不能完全跟随系统模式转换,因此,异步控制器/过滤器更现实,也更可取,并且越来越受到关注^[20-21].文献[20]建立了对二维马尔可夫跳的罗塞尔系统的 H_∞ 控制问题.文献[21]研究了离散马尔可夫跳系统的无源异步控制问题,采用隐马尔可夫模型描述了系统模式与控制器模式之间的异步现象,利用矩阵不等式技术,给出了保证隐马尔可夫跳变系统随机无源性的 3 个等价充分条件.因此,我们研究了具有输出反馈控制器的二维罗塞尔系统的异步耗散控制和稳定性,并给出了具有输出反馈控制器的系统的稳定性和耗散的充分条件.

1 预备知识

在这篇文章中,我们将研究下列含有马尔可夫跳的二维罗塞尔(Roesser)模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^h(i+1, j) = \mathbf{A}_{11}(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^h(i, j) + \mathbf{A}_{12}(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^v(i, j) + \\ \mathbf{B}_1(\gamma_{i,j})\mathbf{u}(i, j) + \mathbf{G}_1(\gamma_{i,j})\boldsymbol{\omega}(i, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j+1) = \mathbf{A}_{21}(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^h(i, j) + \mathbf{A}_{22}(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^v(i, j) + \\ \mathbf{B}_2(\gamma_{i,j})\mathbf{u}(i, j) + \mathbf{G}_2(\gamma_{i,j})\boldsymbol{\omega}(i, j) \\ \mathbf{y}(i, j) = \mathbf{C}_1(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^h(i, j) + \mathbf{C}_2(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^v(i, j) + \\ \mathbf{G}_3(\gamma_{i,j})\boldsymbol{\omega}(i, j) \\ \mathbf{z}(i, j) = \mathbf{E}_1(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^h(i, j) + \mathbf{E}_2(\gamma_{i,j})\mathbf{x}^v(i, j) + \\ \mathbf{F}(\gamma_{i,j})\mathbf{u}(i, j) + \mathbf{G}_4(\gamma_{i,j})\boldsymbol{\omega}(i, j) \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\mathbf{A}(\gamma_{i,j}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(\gamma_{i,j}) & \mathbf{A}_{12}(\gamma_{i,j}) \\ \mathbf{A}_{21}(\gamma_{i,j}) & \mathbf{A}_{22}(\gamma_{i,j}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(\gamma_{i,j}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\gamma_{i,j}) \\ \mathbf{B}_2(\gamma_{i,j}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\gamma_{i,j}) = [\mathbf{C}_1(\gamma_{i,j}) \quad \mathbf{C}_2(\gamma_{i,j})] \quad \mathbf{E}(\gamma_{i,j}) = [\mathbf{E}_1(\gamma_{i,j}) \quad \mathbf{E}_2(\gamma_{i,j})]$$

$\mathbf{x}^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_h}$ 表示在水平方向的状态,同理, $\mathbf{x}^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_v}$ 表示在垂直方向的状态, $\mathbf{u}(i, j) \in \mathbb{R}^{n_u}$ 表示控制输入, $\boldsymbol{\omega}(i, j) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ 表示扰动输入, $\mathbf{y}(i, j) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 表示输出, $\mathbf{z}(i, j) \in \mathbb{R}^{n_z}$ 表示控制输出.

$\mathbf{A}(\gamma_{i,j}), \mathbf{B}(\gamma_{i,j}), \mathbf{C}(\gamma_{i,j}), \mathbf{E}(\gamma_{i,j}), \mathbf{F}(\gamma_{i,j}), \mathbf{G}_1(\gamma_{i,j}), \mathbf{G}_2(\gamma_{i,j}), \mathbf{G}_3(\gamma_{i,j}), \mathbf{G}_4(\gamma_{i,j})$ 都是已知的相应维数的实值矩阵, 它们都是 $\gamma_{i,j}$ 的函数, $\gamma_{i,j}$ 是马尔可夫链. $\gamma_{i,j} \in H_1 = \{1, 2, \dots, k_1\}$ 并且具有转移函数矩阵 $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{pq})$,

$$\lambda_{pq} = P\{\gamma_{i+1,j} = q \mid \gamma_{i,j} = p\} = P\{\gamma_{i,j+1} = q \mid \gamma_{i,j} = p\} = \begin{cases} \gamma_{i,j}\delta + o(\delta) & i \neq j \\ 1 + \gamma_{i,i}\delta + o(\delta) & i = j \end{cases} \quad (2)$$

这里的 $\delta > 0$ 并且 $\gamma_{i,j} \geq 0$ 是从 i 到 j 的转移率.

注 1 本文研究的系统是带有马尔可夫跳的. 不带马尔可夫跳的情形, 能够作为本文的一个极其特殊的情况.

根据现代概率理论, 对 $\forall p, q \in H_1$ 有

$$\begin{cases} \lambda_{pq} \geq 0 \\ \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} = 1 \end{cases} \quad (3)$$

系统的边界条件 (X_0, Γ_0) 被定义为

$$\begin{cases} X_0 = \{\mathbf{x}^h(0, j), \mathbf{x}^v(i, 0) \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\} \\ \Gamma_0 = \{\gamma_{0,j}, \gamma_{i,0} \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\} \end{cases} \quad (4)$$

定义零边界条件: $\mathbf{x}^h(0, j) = 0, \mathbf{x}^v(i, 0) = 0, i, j = 0, 1, 2, \dots$. 下面对 X_0 进行假设.

假设 1 假设 X_0 满足下列条件,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} E\left(\sum_{l=0}^L (|\mathbf{x}^h(0, l)|^2 + |\mathbf{x}^v(l, 0)|^2)\right) < \infty \quad (5)$$

这里的 $E(\cdot)$ 表示数学期望, $|\cdot|$ 表示欧基米德范数.

假设 $\gamma_{i,j}$ 的准确数值是难以获得的. 若(1) 式中 $\mathbf{F}(\gamma_{i,j})$ 为空矩阵, $\mathbf{B}_1(\gamma_{i,j})$ 为列满秩的矩阵, 本文将设计如下异步输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_c^h(i+1, j) = \mathbf{A}_{c,11}(\eta_{i,j})\mathbf{x}_c^h(i, j) + \mathbf{A}_{c,12}(\eta_{i,j})\mathbf{x}_c^v(i, j) + \\ \mathbf{B}_{c,1}(\eta_{i,j})\mathbf{y}(i, j) \\ \mathbf{x}_c^v(i, j+1) = \mathbf{A}_{c,21}(\eta_{i,j})\mathbf{x}_c^h(i, j) + \mathbf{A}_{c,22}(\eta_{i,j})\mathbf{x}_c^v(i, j) + \\ \mathbf{B}_{c,2}(\eta_{i,j})\mathbf{y}(i, j) \\ \mathbf{u}(i, j) = \mathbf{C}_{c,1}(\eta_{i,j})\mathbf{x}_c^h(i, j) + \mathbf{C}_{c,2}(\eta_{i,j})\mathbf{x}_c^v(i, j) + \\ K(\eta_{i,j})\mathbf{y}(i, j) \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{A}_{c,11}(\eta_{i,j}), \mathbf{A}_{c,12}(\eta_{i,j}), \mathbf{A}_{c,21}(\eta_{i,j}), \mathbf{A}_{c,22}(\eta_{i,j}), \mathbf{B}_{c,1}(\eta_{i,j}), \mathbf{B}_{c,2}(\eta_{i,j}), \mathbf{C}_{c,1}(\eta_{i,j}), \mathbf{C}_{c,2}(\eta_{i,j}), K(\eta_{i,j})$ 都表示表示控制增益, 其中 $\eta_{i,j}$ 是决定控制增益的参数, $\eta_{i,j} \in H_2, H_2 = \{1, 2, \dots, k_2\}$. 同时由 $\gamma_{i,j}$ 得到条件概率 π_{ps} , 即

$$\pi_{ps} = P\{\eta_{i,j} = s \mid \gamma_{i,j} = p\} \quad (7)$$

本文利用蒙特卡洛方法得到条件概率矩阵 $\mathbf{\Pi} = (\pi_{ps})$ 且满足条件

1) $\pi_{ps} \in [0, 1]$,

2) $\sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} = 1$.

对任意的 $p \in H_1, s \in H_2$.

为了方便计算, 分别用 p, q, s 表示 $\gamma_{i,j}, \gamma_{i+1,j}(\gamma_{i,j+1})$ 和 $\eta_{i,j}$, 即 $\mathbf{A}_p$ 表示 $\mathbf{A}(\gamma_{i,j})$.

将(6)式代入(1)式,得到下面的闭环动力系统:

$$\xi: \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}^1(i, j) = \bar{\mathbf{A}}_{ps} \tilde{\mathbf{x}}(i, j) + \mathbf{E}_{ps} \boldsymbol{\omega}(i, j) \\ \mathbf{z}(i, j) = \bar{\mathbf{C}}_p \tilde{\mathbf{x}}(i, j) + \mathbf{F}_p \boldsymbol{\omega}(i, j) \end{cases} \quad (8)$$

这里的

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{ps} &= \bar{\mathbf{E}} [\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Theta}_c \mathbf{C}] \bar{\mathbf{E}}^T & \mathbf{E}_{ps} &= \bar{\mathbf{E}} [\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{A} \boldsymbol{\Theta}_c \mathbf{G}_3] & \bar{\mathbf{C}}_p &= \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T \\ \tilde{\mathbf{x}}^1(i, j) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i+1, j) \\ \mathbf{x}^h_c(i+1, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j+1) \\ \mathbf{x}^v_c(i, j+1) \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{x}}(i, j) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(i, j) \\ \mathbf{x}^h_c(i, j) \\ \mathbf{x}^v(i, j) \\ \mathbf{x}^v_c(i, j) \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{I} & & \\ & & \mathbf{I} & \\ & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{G}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} & \mathbf{G}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_3 \\ 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{\Theta}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{E}} &= [\mathbf{E} \quad 0] & \mathbf{A}_c(\eta_{i,j}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c,11}(\eta_{i,j}) & \mathbf{A}_{c,12}(\eta_{i,j}) \\ \mathbf{A}_{c,21}(\eta_{i,j}) & \mathbf{A}_{c,22}(\eta_{i,j}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_c(\eta_{i,j}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c,1}(\eta_{i,j}) \\ \mathbf{B}_{c,2}(\eta_{i,j}) \end{bmatrix} & \mathbf{C}_c(\eta_{i,j}) &= [\mathbf{C}_{c,1}(\eta_{i,j}) \quad \mathbf{C}_{c,2}(\eta_{i,j})] \end{aligned}$$

下面根据一维系统的耗散性给出带有马尔科夫跳的二维罗塞尔系统的严格的 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散性定义和系统渐近稳定性.

定义 1^[20] 对二维闭环系统 ξ , 输入 $\boldsymbol{\omega}(i, j) \equiv 0$ 若对任意边界条件 (X_0, Γ_0) 满足

$$\lim_{i+j \rightarrow \infty} E(|\mathbf{x}(i, j)|^2) = 0 \quad (9)$$

则称二维闭环系统 ξ 是渐近均方稳定的.

定义 2^[20] 假设二维闭环系统 ξ 满足假设 1, 如果在零边界条件和 $\boldsymbol{\omega}(i, j) \in l_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ 下, 下列条件成立

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \mathbf{z}(i, j)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(i, j) + 2 \mathbf{z}(i, j)^T \mathbf{S} \boldsymbol{\omega}(i, j) + \boldsymbol{\omega}(i, j)^T \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}(i, j) &\geq \\ \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\omega}(i, j)^T \boldsymbol{\omega}(i, j) & \end{aligned} \quad (10)$$

$\mathbf{Q}, \mathbf{S}$ 和 $\mathbf{R}$ 是对称矩阵, 其中 $\alpha > 0$, $\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}_*^T \mathbf{Q}_* \leq 0$, 则 ξ 是严格 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散.

注 2 (10) 式是由 Willems 所提出的耗散不等式.

本文将设计一个形如(6)式的异步控制器来保证二维罗塞尔系统 ξ 的渐近稳定性和 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散性能.

2 主要结论

本节将研究对于带有马尔科夫跳的二维罗塞尔系统 ξ 的渐近均方稳定性和严格的 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散并提出控制器的设计方法. 首先给出一个充分条件:

定理 1 在假设 1 的条件下思考闭环二维系统 ξ , 对给定的 $\alpha > 0$ 以及对称矩阵 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$, 其中

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}_*^T \mathbf{Q}_* \leq 0$$

如果存在一个对称矩阵 $\mathbf{R}_p = \text{diag}\{\mathbf{R}_p^h, \mathbf{R}_p^v\} > 0$, $\mathbf{Q}_{ps} > 0$ 和 K_s , 对于 $\forall p \in H_1, s \in H_2$, 下列条件成立:

$$\sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \mathbf{Q}_{ps} < \mathbf{R}_p \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{R}}_p & \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} & \bar{\mathbf{R}}_p \mathbf{E}_{ps} & 0 \\ * & -\mathbf{Q}_{ps} & -\bar{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{S} & \bar{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & -\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{S}^T \mathbf{F}_p\} & \mathbf{F}_p^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中

$$\bar{\mathbf{R}}_p = \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q$$

则系统 ξ 是渐近均方稳定的和严格 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散的

证 首先定义一个新的矩阵 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将矩阵(12) 前乘 $\mathbf{A}$, 后乘 $\mathbf{A}^T$, 那么矩阵(12) 转换为下列矩阵

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{ps} & \mathbf{E}_{ps} \\ * & -\mathbf{I} & \mathbf{Q}_*^T \bar{\mathbf{C}}_p & \mathbf{Q}_*^T \mathbf{F}_p \\ * & * & -\mathbf{Q}_{ps} & -\bar{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{S} \\ * & * & * & -\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{S}^T \mathbf{F}_p\} \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

基于舒尔补定理, 下列线性矩阵不等式与矩阵(14) 是等价的:

1) 当 $-\bar{\mathbf{R}}_p^{-1} < 0$ 时, 有 $\varphi_1 = -\mathbf{Q}_{ps} + \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} < 0$.

2) 当 $\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{ps} & -\bar{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{S} \\ * & -\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{S}^T \mathbf{F}_p\} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{ps} & \mathbf{E}_{ps} \\ \mathbf{Q}_*^T \bar{\mathbf{C}}_p & \mathbf{Q}_*^T \mathbf{F}_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{ps} & \mathbf{E}_{ps} \\ \mathbf{Q}_*^T \bar{\mathbf{C}}_p & \mathbf{Q}_*^T \mathbf{F}_p \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

下面将从系统的渐近均方稳定性进行证明. 假设 $\omega(i, j) \equiv 0$, 定义 Lyapunov 函数 $\mathbf{V}(i, j) = \tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \cdot \mathbf{R}_q \tilde{\mathbf{x}}(i, j)$, 那么

$$\Delta \mathbf{V}(i, j) = \tilde{\mathbf{x}}^{1T}(i, j) \mathbf{R}_q \tilde{\mathbf{x}}^1(i, j) - \tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \mathbf{R}_p \tilde{\mathbf{x}}(i, j) \quad (15)$$

根据假设 $\omega(i, j) \equiv 0$, 系统可变为 $\mathbf{x}^1(i, j) = \bar{\mathbf{A}}_{ps} \mathbf{x}(i, j)$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V}(i, j) &= \tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{A}}_{ps} \tilde{\mathbf{x}}(i, j) - \tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \mathbf{R}_p \tilde{\mathbf{x}}(i, j) = \\ &\quad \tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) (\bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \mathbf{R}_p) \tilde{\mathbf{x}}(i, j) \end{aligned} \quad (16)$$

对 $\Delta \mathbf{V}(i, j)$ 求期望得

$$E(\Delta \mathbf{V}(i, j)) = E(\tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) (\bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \mathbf{R}_p) \tilde{\mathbf{x}}(i, j)) =$$

$$E(\tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \left(\sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \sum_q^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \mathbf{R}_p \right) \tilde{\mathbf{x}}(i, j)) =$$

$$E(\tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \left(\sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \mathbf{R}_p \right) \tilde{\mathbf{x}}(i, j)) \quad (17)$$

基于 φ_1 得

$$\mathbf{Q}_{ps} > \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} \quad (18)$$

将(18)式带入(17)式得

$$E(\Delta \mathbf{V}(i, j)) = E(\tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \left(\sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \mathbf{R}_p \right) \tilde{\mathbf{x}}(i, j)) <$$

$$E(\tilde{\mathbf{x}}^T(i, j) \left(\sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \mathbf{Q}_{ps} - \mathbf{R}_p \right) \tilde{\mathbf{x}}(i, j)) <$$

$$- \varphi E(|\tilde{\mathbf{x}}(i, j)|^2) \quad (19)$$

其中 $\varphi = \lambda_{\min}(\mathbf{R}_p - \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \mathbf{Q}_{ps})$ 是最小的特征值. 由(11)式知 $\mathbf{R}_p - \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \mathbf{Q}_{ps} > 0$, 所以 $\varphi > 0$.

根据(19)式得到

$$E(|\tilde{\mathbf{x}}(i, j)|^2) \leq -\frac{1}{\varphi} E(\Delta \mathbf{V}(i, j)) \quad (20)$$

另一方面,

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \Delta \mathbf{V}(i, j) =$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \tilde{\mathbf{x}}^h(i+1, j)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i+1,j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(i+1, j) - \tilde{\mathbf{x}}^h(i, j)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i,j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(i, j) +$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^v(i, j+1)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i,j+1}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, j+1) - \tilde{\mathbf{x}}^v(i, j)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i,j}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, j) =$$

$$\sum_{j=0}^n \tilde{\mathbf{x}}^h(m+1, j)^T \mathbf{R}_{\gamma_{m+1,j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(m+1, j) - \tilde{\mathbf{x}}^h(0, j)^T \mathbf{R}_{\gamma_{0,j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(0, j) +$$

$$\sum_{i=0}^m \tilde{\mathbf{x}}^v(i, n+1)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i,n+1}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, n+1) - \tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i,0}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0) \quad (21)$$

这里的 m, n 是任意的正整数. 因为 $\mathbf{R}_p = \text{diag}\{\mathbf{R}_p^h, \mathbf{R}_p^v\} > 0$, 所以根据(20)式得到

$$E\left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n |\mathbf{x}(i, j)|^2\right) \leq -\frac{1}{\varphi} E\left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \Delta \mathbf{V}(i, j)\right) \leq$$

$$\frac{1}{\varphi} E\left(\sum_{j=0}^n \tilde{\mathbf{x}}^h(0, j)^T \mathbf{R}_{\gamma_{0,j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(0, j) + \sum_{i=0}^m \tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0)^T \mathbf{R}_{\gamma_{i,0}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0)\right) \quad (22)$$

下面让 m 和 n 趋于无穷大,

$$E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\mathbf{x}}(i, j)|^2\right) \leq \frac{\sigma}{\varphi} E\left(\sum_{i=0}^{\infty} (|\tilde{\mathbf{x}}^h(0, i)|^2 + |\tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0)|^2)\right) \quad (23)$$

这里的 $\sigma = \lambda_{\max}\{\mathbf{R}_{\gamma_{0,j}}^h, \mathbf{R}_{\gamma_{i,0}}^v\}$, 而根据假设 1, 得到

$$E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\mathbf{x}}(i, j)|^2\right) < \infty \quad (24)$$

这表示(9)式成立, 所以系统 ξ 是渐近均方稳定的.

下面证明在零边界条件下系统 ξ 的耗散性. 定义 $\boldsymbol{\Omega} = [\tilde{\mathbf{x}}^T(i, j), \boldsymbol{\omega}^T(i, j)]^T$, 首先对矩阵(12)进行处理, 让其前乘 $\mathbf{N}^T$ 后乘 $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (25)$$

根据舒尔补定理, 矩阵(12) 的期望等价于

$$E(\Gamma) = E\left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_1 & \mathbf{\Delta}_2 \\ \mathbf{\Delta}_3 & \mathbf{\Delta}_4 \end{bmatrix}\right) < 0 \quad (26)$$

这里的

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta}_1 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{Q}}_{ps} - \bar{\mathbf{C}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{C}}_p \\ \mathbf{\Delta}_2 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{E}}_{ps} - \bar{\mathbf{C}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{F}}_p - \bar{\mathbf{C}}_p^T \bar{\mathbf{S}} \\ \mathbf{\Delta}_3 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{E}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p^T \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T - \bar{\mathbf{F}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{C}}_p - \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{C}}_p \\ \mathbf{\Delta}_4 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{E}}_{ps}^T \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{E}}_{ps} - \mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{F}}_p - \text{sym}\{\bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{F}}_p\} \end{aligned}$$

下面定义 $\mathbf{J}$, 由(11) 式和(26) 式得到

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= E(\Delta \mathbf{V}(i, j) - \mathbf{z}(i, j)^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{z}(i, j) - 2 * \mathbf{z}(i, j)^T \bar{\mathbf{S}} \boldsymbol{\omega}(i, j) - \boldsymbol{\omega}(i, j)^T [\mathbf{R} - \alpha \mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}(i, j)) = \\ &E\left((\tilde{\mathbf{x}}^T, \boldsymbol{\omega}^T) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 & \boldsymbol{\Theta}_2 \\ \boldsymbol{\Theta}_3 & \boldsymbol{\Theta}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}\right) \leq E\left((\tilde{\mathbf{x}}^T, \boldsymbol{\omega}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_1 & \mathbf{\Delta}_2 \\ \mathbf{\Delta}_3 & \mathbf{\Delta}_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}\right) \leq \\ &E(\boldsymbol{\Omega}^T \Gamma \boldsymbol{\Omega}) < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

这里的

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_1 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{A}}_{ps} - \mathbf{R}_p - \bar{\mathbf{C}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{C}}_p \\ \boldsymbol{\Theta}_2 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{E}}_{ps} - \bar{\mathbf{C}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{F}}_p - \bar{\mathbf{C}}_p^T \bar{\mathbf{S}} \\ \boldsymbol{\Theta}_3 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{E}}_{ps}^T \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{A}}_{ps}^T - \bar{\mathbf{F}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{C}}_p - \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{C}}_p \\ \boldsymbol{\Theta}_4 &= \sum_{s=1}^{k_2} \pi_{ps} \bar{\mathbf{E}}_{ps}^T \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q \bar{\mathbf{E}}_{ps} - \mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \bar{\mathbf{F}}_p^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{F}}_p - \text{sym}\{\bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{F}}_p\} \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E(\Delta \mathbf{V}(i, j) - \mathbf{z}(i, j)^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{z}(i, j) - 2 * \mathbf{z}(i, j)^T \bar{\mathbf{S}} \boldsymbol{\omega}(i, j) - \boldsymbol{\omega}(i, j)^T [\mathbf{R} - \alpha \mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}(i, j)) = \\ &(E \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{\mathbf{x}}^h(\infty, j) \mathbf{R}_{\gamma_{\infty, j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(m+1, j) - \tilde{\mathbf{x}}^h(0, j) \mathbf{R}_{\gamma_{0, j}}^h \tilde{\mathbf{x}}^h(0, j)) + \\ &\sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{\mathbf{x}}^v(i, \infty) \mathbf{R}_{\gamma_{i, \infty}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, \infty) - \tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0) \mathbf{R}_{\gamma_{i, 0}}^v \tilde{\mathbf{x}}^v(i, 0)) + \\ &\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E(-\mathbf{z}(i, j)^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{z}(i, j) - 2 * \mathbf{z}(i, j)^T \bar{\mathbf{S}} \boldsymbol{\omega}(i, j) - \boldsymbol{\omega}(i, j)^T [\mathbf{R} - \alpha \mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}(i, j)) \geq \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E(-\mathbf{z}(i, j)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(i, j) - 2 * \mathbf{z}(i, j)^T \mathbf{S} \boldsymbol{\omega}(i, j) - \boldsymbol{\omega}(i, j)^T [\mathbf{R} - \alpha \mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}(i, j)) \quad (28)$$

在零边界条件下结合(27),(28) 式有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E(\mathbf{z}(i, j)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(i, j) + 2 * \mathbf{z}(i, j)^T \mathbf{S} \boldsymbol{\omega}(i, j) + \boldsymbol{\omega}(i, j)^T [\mathbf{R} - \alpha \mathbf{I}] \boldsymbol{\omega}(i, j)) > 0 \quad (29)$$

根据定义 2 系统 ξ 是严格的 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散. 定理得证.

注 3 矩阵 $\mathbf{Q}_{ps}$ 可以使包含控制器增益 K_s 的矩阵 $\bar{\mathbf{A}}_{ps}$ 和 $\bar{\mathbf{C}}_{ps}$ 与 π_{ps} 成功分离, 减少矩阵不等式的维数, 降低控制器的复杂度.

注 4 通过选择 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ 和 $\mathbf{R} = 2\alpha \mathbf{I}$, 得到系统 ξ 是无源性的条件, 即满足

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{R}}_p & \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{A}}_{ps} & \bar{\mathbf{R}}_p \mathbf{E}_p & \mathbf{0} \\ * & -\mathbf{Q}_{ps} & -\bar{\mathbf{C}}_{ps}^T \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ * & * & -\alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{F}_p\} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

注 5 通过选择 $\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{R} = (\alpha^2 + \alpha) \mathbf{I}$, 得到了系统 ξ 是 H_∞ 性的条件, 即满足

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{ps} & \mathbf{E}_p \\ * & -\mathbf{I} & \bar{\mathbf{C}}_{ps} & \mathbf{F}_p \\ * & * & -\mathbf{Q}_{ps} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\alpha^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

虽然定理 1 给出了一个形式简单的充分条件, 但由于非线性性的存在, 将其直接用于控制器设计是困难的. 接下来进一步研究控制器的设计方法.

定理 2 假定系统(1) 中 $\mathbf{F}$ 是空矩阵, $\mathbf{B}$ 是列满秩矩阵, 给定一个标量 $\alpha > 0$ 和 3 个矩阵 $\mathbf{Q}, \mathbf{S}$ 和 $\mathbf{R}$, 其中 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{S}$ 是实对称矩阵, 对于一些 $\mathbf{Q}_*$, 这里的 $\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}_*^T \mathbf{Q}_* \leq 0$. 那么闭环系统 ξ 是均方渐近稳定的并且是 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散. 如果存在矩阵 $\mathbf{L}_1$, 两个正定矩阵 $\bar{\mathbf{M}}_1 \bar{\mathbf{M}}_2$, 一个正定的对角矩阵 $\mathbf{R}_p = \text{diag}\{\mathbf{R}_p^h, \mathbf{R}_p^v\} > 0$, 这里的 $\mathbf{R}_p^h = \mathbf{R}_p^{hT} > 0$ 和 $\mathbf{R}_p^v = \mathbf{R}_p^{vT} > 0$, 使(11) 式成立且

$$\bar{\mathbf{R}}_p = \sum_{q=1}^{k_1} \lambda_{pq} \mathbf{R}_q$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{M}}^T + \mathbf{T}^{-T} \bar{\mathbf{P}}_\pi \mathbf{T}^{-1} & \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{E}}^T + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X} \mathbf{E}^T & \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{L} \mathbf{G}_3 & \mathbf{0} \\ * & -\boldsymbol{\Theta}_{\pi\sigma} & -\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{S} & \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & -\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{S}^T \mathbf{G}_4\} & \mathbf{G}_4^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

这里的

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

并且 $\mathbf{T}$ 是一个可逆的转移矩阵满足 $\bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, 则控制器增益 $\boldsymbol{\Theta}_c = \bar{\mathbf{S}}_1^{-1} \mathbf{L}_1$.

证 定义 $\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T}$, 根据上述, 得到

$$\mathbf{T}^T \mathbf{L} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_c = \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Theta}_c = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Theta}_c \quad (31)$$

将(30)式前乘 $\text{diag}\{\mathbf{T}^T, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ 后乘 $\text{diag}\{\mathbf{T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$, 并且根据 $\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T}$ 得到

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M} - \mathbf{M}^T + \bar{\mathbf{R}}_p & \mathbf{M} \bar{\mathbf{E}} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_c \mathbf{C}) \bar{\mathbf{E}}^T & \mathbf{M} (\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_c \mathbf{G}_3) & 0 \\ * & -\mathbf{Q}_{ps} & -\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{S} & \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & -\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{S}^T \mathbf{G}_4\} & \mathbf{G}_4^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (32)$$

然后将(33)式前乘 $\text{diag}\{\mathbf{M}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ 和后乘 $\text{diag}\{\mathbf{M}^{-T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$.

由于不等式 $(\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}) \bar{\mathbf{R}}_p (\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{P}^{-1})^T \geq 0$, 得到 $\bar{\mathbf{R}}_p^{-1} \geq \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-T} - \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_p \mathbf{M}^{-T}$, 则(32)式能够保证下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{R}}_p^{-1} & \mathbf{A}_{ps} & \mathbf{E}_{ps} & 0 \\ * & -\mathbf{Q}_{ps} & -\mathbf{C}_p^T \mathbf{S} & \mathbf{C}_p^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & -\mathbf{R} + \alpha \mathbf{I} - \text{sym}\{\mathbf{S}^T \mathbf{F}_p\} & \mathbf{F}_p^T \mathbf{Q}_*^T \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

这里的

$$\bar{\mathbf{A}}_{ps} = \bar{\mathbf{E}} [\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_c \mathbf{C}] \bar{\mathbf{E}}^T \quad \mathbf{E}_{ps} = \bar{\mathbf{E}} [\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\Theta}}_c \mathbf{G}_3] \quad \bar{\mathbf{C}}_p = \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^T \quad \mathbf{F}_p = \mathbf{G}_4$$

然后将(33)式前乘 $\text{diag}\{\bar{\mathbf{R}}_p, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ 后乘 $\text{diag}\{\bar{\mathbf{R}}_p, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$, 则得到定理 1 中的(14)式, 运用定理 1, 得到系统 ξ 是均方稳定的和 $2D(\mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{R})$ - α 耗散的, 证明完成.

注 6 定理 2 通过松弛矩阵技术和变量替换处理矩阵不等式(11)和(12)所涉及的非线性问题, 成功地将控制设计问题转化为一个基于 LMI 的问题, 利用 Matlab 可以轻松地解决该问题.

3 数值模拟

本节将使用 Darboux 方程来验证控制器的有效性. 这里选择以下的马尔可夫跳跃系统, 相应的系统矩阵如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 1.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= [1 \quad 10] \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix} & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.08 \end{bmatrix} & \mathbf{F} &= 0 \\ \mathbf{G}_3 &= 0.05 & \mathbf{G}_4 &= 0.6 \end{aligned}$$

由马尔可夫跳跃组成的系统矩阵满足以下转移概率矩阵和条件概率矩阵:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

然后利用定理 2 中提出的控制器设计方法得到如下控制器增益:

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}_c = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.94 & 8 \\ 0.29 & 0.16 & 1.56 \\ 0.51 & 0.27 & 0.53 \end{bmatrix}$$

接下来, 将通过比较有控制输入和无控制输入时系统状态的演化来进一步证明其有效性. 因此, 有必要提出边界条件:

$$x^h(0, j) = \begin{cases} 10 & 0 \leq j \leq 100 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$x^v(i, 0) = \begin{cases} -8 & 0 \leq i \leq 90 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

而 $w(i, j)$ 是满足正态分布的随机数, 根据这些零边界条件和系数条件可以得到不带有控制输出的开环系统. 选择 $Q = -1, S = 1, R = 3$, 得到 $Q_c(T_i, T_j)$ (图 1) 与随机场状态 $z(i, j)$ (图 2). 从图 1 可知参数 α 的最小值, 即 $\alpha = 1.9271$. 图 2 可知控制器能有效地稳定开环系统.

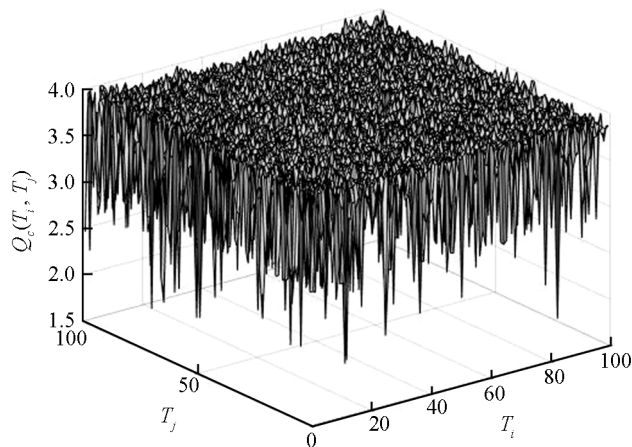


图 1 $Q_c(T_i, T_j)$

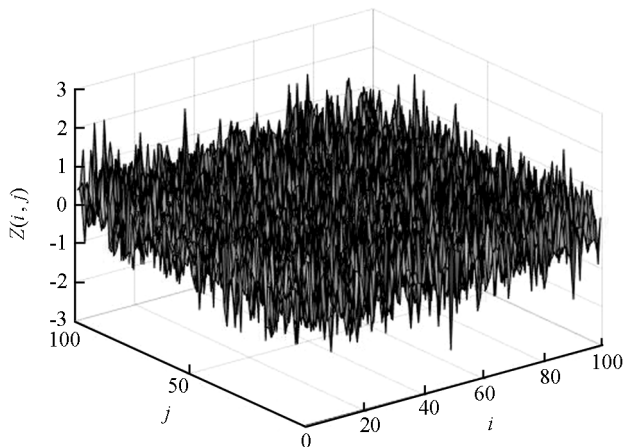


图 2 随机场状态 $Z(i, j)$

5 结 论

本文研究了基于罗塞尔模型构建的二维马尔可夫系统的 $2D(Q, S, R)$ - α 耗散控制问题. 考虑到系统模式信息的不可获取性, 我们将研究重点放在了异步控制上, 建立了被控二维系统与控制器之间异步的隐马尔可夫模型. 将一维系统的耗散性定义推广到二维系统, 得到了保证系统渐近均方稳定性和 $2D(Q, S, R)$ - α 耗散的充分条件, 并且通过优化技术给出了一种控制器的设计方法. 在之后的工作中, 将考虑在有限域上开展异步控制器的设计及其有效性论证的工作.

参考文献:

- [1] KACZOREK T. Two-Dimensional Linear System [M]. Berlin: Springer, 1985.
- [2] KAR H, SINGH V. An Improved Criterion for the Asymptotic Stability of 2-D Digital Filters Described by the Fornasini-Marchesini Second Model Using Saturation Arithmetic [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(11): 1412-1413.
- [3] KAR H, SINGH V. Robust Stability of 2-D Discrete Systems Described by the Fornasini-Marchesini Second Model Employing Quantization/Overflow Nonlinearities [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2004, 51(11): 598-602.
- [4] ROESSER R. A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1975, 20(1): 1-10.
- [5] RAMOS J A, MERCÈRE G. A Stochastic Subspace System Identification Algorithm for State-Space Systems in the General 2-D Roesser Model Form [J]. International Journal of Control, 2018, 91(12): 2743-2771.
- [6] HUA D L, WANG W Q, YAO J. Finite-Region Dissipative Control for 2-D Systems in the Roesser Model [J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(16): 3406-3417.
- [7] LOZANO R, BROGLIATO B, EGELAND O, et al. Dissipative Systems: Analysis and Control [M]. London: Springer-Verlag, 2007.
- [8] WU M, LAN Y H, SHE J H, et al. Optimal Repetitive Control Based on Two-Dimensional Model [J]. International

Journal of Innovative Computing Information and Control, 2012, 8(3A): 1897-1905.

[9] WU Z J, KARIMI H R. A Novel Framework of Theory on Dissipative Systems [J]. International Journal of Innovative Computing Information and Control, 2013, 9(7): 2755- 2769.

[10] XIE S L, XIE L H, DE SOUZA C E. Robust Dissipative Control for Linear Systems with Dissipative Uncertainty [J]. International Journal of Control, 1998, 70(2): 169-191.

[11] TAN Z Q, SOH Y C, XIE L H. Dissipative Control for Linear Discrete-Time Systems [J]. Automatica, 1999, 35(9): 1557-1564.

[12] DAI M C, XIA J W, PARK J H, et al. Asynchronous Dissipative Filtering for Markov Jump Discrete-Time Systems Subject to Randomly Occurring Distributed Delays [J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(4): 2395-2420.

[13] NASERI A, ASEMANI M H. Non-Fragile Robust Strictly Dissipative Control of Disturbed T-S Fuzzy Systems with Input Saturation [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019, 38(1): 41-62.

[14] LI S C, ZHANG J F, CHEN Y, et al. Non-Fragile Control for Positive Markov Jump Systems with Actuator Saturation [M] //Positive Systems. Cham: Springer International Publishing, 2019: 109-125.

[15] LU X, YAN J Q, WANG H X, et al. Dissipativity-Based Asynchronous Control for Discrete-Time Singular Markov Jump Systems with Multiplicative Noises [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2019, 16(3): 172988141985161.

[16] AHN C K, SHI P, BASIN M V. Two-Dimensional Dissipative Control and Filtering for Roesser Model [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7): 1745-1759.

[17] ABERKANE S, DRAGAN V. H_{∞} Filtering of Periodic Markovian Jump Systems: Application to Filtering with Communication Constraints [J]. Automatica, 2012, 48(12): 3151-3156.

[18] ZHANG B Y, ZHENG W X, XU S Y. Filtering of Markovian Jump Delay Systems Based on a New Performance Index [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2013, 60(5): 1250-1263.

[19] HUANG K W, WANG J F, PAN F. Nonfragile Quantized Dissipative Filter for Nonlinear Networked Systems [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019: 1-14.

[20] WU Z G, SHEN Y, SHI P, et al. $\mathcal{H}_{\infty}$ Control for 2-D Markov Jump Systems in Roesser Model [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(1): 427-432.

[21] WU Z G, SHI P, SHU Z, et al. Passivity-Based Asynchronous Control for Markov Jump Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(4): 2020-2025.

责任编辑 张 构