DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.11.010

一类条件协方差估计及其大样本性质

甘胜进[1,2]

1. 福建师范大学 福清分校电子与信息工程学院，福建 福清 350300；2. 台湾政治大学 统计学系，台北 11605

摘要：提出一类条件协方差的核估计量，并给出其大样本性质，蒙特卡洛模拟结果表明，其估计效果不比现有估计量差.

关 键 词：条件协方差矩阵；核估计；交叉验证

中图分类号：O212　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2021)11-0080-08　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Estimate for a Class of Conditional Covariance and Its Large Sample Properties

GAN Shengjin[1,2]

1. School of Electronical and Information Engineering, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing Fujian 350300, China;
2. Department of Statistics, National Chengchi University, Taipei 11605, China

Abstract: A kernel estimator for a class of conditional covariance is proposed, and its large sample properties are given. Monte Carlo simulation shows that its performance is comparable to the existing methods.

Key words: conditional covariance matrix; kernel estimation; cross-validation

设 p 维随机变量 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_p)^{\mathrm{T}}$，在给定协变量 $U=u$ 条件下，考虑 $\boldsymbol{X}$ 的条件协方差矩阵，即

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)=\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}|U=u)$$

当 $p=1$ 时，条件协方差矩阵特殊化为条件方差 $\operatorname{Var}(\boldsymbol{X} \mid U=u)$. 条件方差及协方差函数的估计已在文献[1-6] 中有较为详细讨论. 依据

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)=E((\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X(u))((\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X(u))^{\mathrm{T}} \mid U=u)，其中 \boldsymbol{m}_X(u)=E(\boldsymbol{X}|U=u)$$

文献[7] 通过极小化拟似然函数：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{m}(u))\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{m}(u))^{\mathrm{T}}-\log(|\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)^{-1}|)]K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$$

收稿日期：2019-11-06
基金项目：福建省自然科学基金面上项目(2018J01662)；福建师范大学福清分校高级培育项目(KY2018S02).
作者简介：甘胜进，讲师，博士研究生，主要从事概率统计方面研究.

构造$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)$的估计量：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)=\left[\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)(\boldsymbol{X}_i-\hat{\boldsymbol{m}}_X(U_i))(\boldsymbol{X}_i-\hat{\boldsymbol{m}}_X(U_i))^{\mathrm{T}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)\right]^{-1}$$

其中$\boldsymbol{m}_X(u)$的 $N-W$ 核估计量为

$$\hat{\boldsymbol{m}}_X(u)=\left\{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)\boldsymbol{X}_i\right\}\left\{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)\right\}^{-1}$$

窗宽 $h>0$，$\{(\boldsymbol{X}_i,U_i)\}_{i=1}^{n}$ 为来自总体$(\boldsymbol{X},U)$的简单随机样本. 条件协方差矩阵的另外一种表示形式为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)=E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\mid U=u)-\boldsymbol{m}_X(u)\boldsymbol{m}_X(u)^{\mathrm{T}}$$

故一种显而易见的核估计量为

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)=\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)\right]^{-1}-\hat{\boldsymbol{m}}_X(u)\hat{\boldsymbol{m}}_X(u)^{\mathrm{T}}$$

虽然文献[8]也提到$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$，但并未给出其渐近性质，本文针对其大样本性质及其统计模拟展开研究.

1 估计量的大样本性质

在导出估计量的渐近性质之前，一些限制性条件十分必要，它们经常在非参数核估计中用到，尽管它们不是最弱的，但能使证明变得简便.

(C1) U 的边缘密度 $f(u)$ 具有紧支集，并且在支撑集中，$f(u)$ 显著大于 0，具有连续的二阶导数.

(C2) $E(\boldsymbol{X}_{j_1}^{k_1}\boldsymbol{X}_{j_2}^{k_2}\mid U=u)$ 存在并且在 u 点具有连续的二阶导数，其中 $j_1,j_2\in\{1,2,\cdots p\}$，$k_1,k_2\in\{0,1\}$，$k_1$ 和 k_2 可能不相同，存在某个 $\delta>0$，使得 $E(|\boldsymbol{X}_{j_1}^{k_1}\boldsymbol{X}_{j_2}^{k_2}|^{2+\delta}\mid U=u)<+\infty$.

(C3) 核密度函数 $K(v)$ 满足以下条件：$K(v)$ 有界并且关于原点对称，$K(v)\geqslant 0$，

$$\int K(v)\mathrm{d}v=1\qquad\int v^2K(v)\mathrm{d}v=\mu_2\qquad\int K(v)^2\mathrm{d}v=K_0$$

(C4) 存在常数 c 使得窗宽 $h\to 0$，$nh^5\to c$，$c>0$，当 $n\to+\infty$.

为方便起见，有必要对一些符号表示含义作如下说明：令函数 $g(u)$，$\dot{g}(u)$ 和 $\ddot{g}(u)$ 分别表示 $g(u)$ 的一阶、二阶导数，令

$$\boldsymbol{m}_X(u)=(\boldsymbol{m}_X^i(u))_{p\times l}\triangleq E(\boldsymbol{X}\,|\,U=u),\ \boldsymbol{m}_X^i(u)=E(\boldsymbol{X}_i\mid U=u)$$

$$\boldsymbol{m}_{XX}(u)=(\boldsymbol{m}_{XX}^{i,j}(u))_{p\times p}\triangleq E(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\mid U=u),\ \boldsymbol{m}_{XX}^{i,j}(u)=E(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j\mid U=u)$$

在类似于(C1)-(C4)的条件下，文献[7]得到条件协方差矩阵的核估计大样本形式：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)=\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)+\boldsymbol{B}_n+\boldsymbol{V}_n+o(h^2)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)\tag{1}$$

其中：

$$\boldsymbol{B}_n=0.5\,h^2\mu_2\{\ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)+2\dot{f}(u)f^{-1}(u)\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)\}$$

$$\boldsymbol{V}_n=\frac{1}{nhf(u)}\sum_{i=1}^{n}((\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{m}_X(U_i))(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{m}_X(U_i))^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(U_i))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$$

为导出$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$的大样本性质，给出如下引理 1.

引理 1 令 u 为 U 的支撑的内点，在条件(C1)-(C4)下

$$\sqrt{nh}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}-\boldsymbol{m}_{XX}(u)-\boldsymbol{B}_n^1\right\}\to N(0,\boldsymbol{\Sigma}_1)$$

逐点依分布收敛，其中

$$\boldsymbol{B}_n^1=\frac{h^2\mu_2}{2}\left(2\frac{\dot{f}(u)}{f(u)}\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}(u)+\ddot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}(u)\right)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1=(\sigma_{j_1,j_2}(u))_{p\times p},\ \sigma_{j_1,j_2}(u)=f^{-1}(u)K_0\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_{j_1}\boldsymbol{X}_{j_2}\mid U=u)$$

证 令

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$$

$$\hat{A}_{j_1j_2}=\frac{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_{i,j_1}\boldsymbol{X}_{i,j_2}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{\hat{f}(u)}$$

$\boldsymbol{X}_{i,j}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的第 j 个分量第 i 次观测，则有

$$\hat{A}_{j_1j_2}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u)=\frac{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_{i,j_1}\boldsymbol{X}_{i,j_2}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{\hat{f}(u)}$$

由于 $\hat{f}(u)=f(u)+o_p(1)$，故只须推导出 $\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_{i,j_1}\boldsymbol{X}_{i,j_2}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$ 的渐近分布即可. 对 A_2 进行泰勒展开

$$\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_{i,j_1}\boldsymbol{X}_{i,j_2}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)=A_1+A_2$$

$$A_1=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_{i,j_1}\boldsymbol{X}_{i,j_2}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(U_i))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$$

$$A_2=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(U_i)-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)=I_1+I_2+o_p\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(U_i-u)^2K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)\right)$$

$$I_1=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}(u)(U_i-u)K\left(\frac{U_i-u}{h}\right),\ I_2=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}(u)(U_i-u)^2K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$$

不难得到

$$E(A_1\mid U=U_i)=0,\ \mathrm{Var}(A_1)=\mathrm{Var}(E(A_1\mid U=U_i))+E(\mathrm{Var}(A_1\mid U=U_i))=$$

$$\frac{1}{nh^2}\int E((\boldsymbol{X}_{j_1}\boldsymbol{X}_{j_2}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(U_i))^2\mid U=U_i)K^2\left(\frac{U_i-u}{h}\right)f(U_i)\mathrm{d}U_i=$$

$$\frac{1}{nh^2}\int\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_{j_1}\boldsymbol{X}_{j_2}\mid U=U_i)K^2\left(\frac{U_i-u}{h}\right)f(U_i)\mathrm{d}U_i=\frac{1}{nh}\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_{j_1}\boldsymbol{X}_{j_2}\mid U=u)K_0f(u)+o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

依据条件(C2)和有界的核密度函数 $K(\cdot)$ 以及 C_r 不等式[9]，由 Liapunov's 中心极限定理可知 $\sqrt{nh}A_1\to N(0,\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_{j_1}\boldsymbol{X}_{j_2}\mid U=u)K_0f(u))$ 依分布收敛. 易知

$$E(I_1)=h^2\mu_2\dot{f}(u)\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u)+o(h^2)$$

$$\mathrm{Var}(I_1)=O\left(\frac{h}{n}\right)$$

故有

$$I_1=h^2\mu_2\dot{f}(u)\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)$$

类似以上讨论，

$$I_2=\frac{1}{2}h^2\mu_2f(u)\ddot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{XX}}^{j_1,j_2}(u)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)$$

引理得证.

值得注意的是，尽管引理 1 给出核估计量的渐近正态性，但是这没有必要，只须将估计量写成以下相

合形式：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}(u)+\boldsymbol{B}_n^1+\boldsymbol{V}_n^1+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right) \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_n^1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{XX}}(U_i))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{nhf(u)}$$

类似引理 1 过程，不难得到以下结果：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_iK\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}(u)+\boldsymbol{B}_n^2+\boldsymbol{V}_n^2+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right) \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_n^2=\frac{h^2\mu_2}{2}\left\{2\frac{\dot{f}(u)}{f(u)}\dot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{X}}(u)+\ddot{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{X}}(u)\right\}$$

$$\boldsymbol{V}_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}(U_i))K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)}{nhf(u)}$$

通过以上讨论，由(2) 式、(3) 式，根据条件(C1)-(C4) 和 C_r 不等式[9] 可得定理 1.

定理 1　令 u 为 U 的支撑的内点，在条件(C1)-(C4) 下，

$$\sqrt{nh}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)-\boldsymbol{B}_n^*)\rightarrow N(0,\ \mathrm{cov}(\boldsymbol{S}_2\mid U=u))$$

逐点依分布收敛，其中

$$\boldsymbol{B}_n^*=\boldsymbol{B}_n^1-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}(u)\boldsymbol{B}_n^{2\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}_n^{2\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}(u)$$

$$\boldsymbol{S}_2=\sqrt{nh}(\boldsymbol{V}_n^1-\boldsymbol{V}_n^2\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}(u)^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{X}}(u)\boldsymbol{V}_n^{2\mathrm{T}})$$

定理 2 给出逆协方差矩阵估计量的大样本性质.

定理 2　设 u 为协变量 U 的内点，在条件(C1)-(C4) 下，

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}\boldsymbol{B}_n^*\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right)$$

证　由定理 1，根据文献[10] 讨论，假设

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+\boldsymbol{B}_n^{**}+\boldsymbol{V}_n^{**}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right)$$

$$\boldsymbol{B}_n^{**}=O(h^2)\qquad \boldsymbol{V}_n^{**}=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)$$

依据$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)=\boldsymbol{I}$，解下列方程得到$\boldsymbol{B}_n$,$\boldsymbol{V}_n$：

$$\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)+\boldsymbol{B}_n^*+\boldsymbol{S}_2+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right)\right)\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+\boldsymbol{B}_n^{**}+\boldsymbol{V}_n^{**}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right)\right)=\boldsymbol{I}$$

左边是

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_n^*\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)\boldsymbol{B}_n^{**}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)\boldsymbol{V}_n^{**}+\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}+h^2\right)$$

故

$$\boldsymbol{B}_n^*\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)\boldsymbol{B}_n^{**}=0$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)\boldsymbol{V}_n^{**}+\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}=0$$

定理得证.

同理可得

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}=\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}-\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}\boldsymbol{V}_n\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}+o(h^2)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right)$$

2 随机模拟

借助文献[7]采用留一交叉验证拟似然函数来选择最优窗宽:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(\boldsymbol{X}_i-\hat{\boldsymbol{m}}_{-i}(u_i))\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)_{(-i)}^{-1}(\boldsymbol{X}_i-\hat{\boldsymbol{m}}_{-i}(u_i))^{\mathrm{T}}+\log(|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)_{(-i)}|)]K\left(\frac{U_i-u}{h}\right)$$

$\hat{\boldsymbol{m}}_{-i}(u_i)$,$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)_{(-i)}$ 分别是去掉第 i 个样本后的 $N-W$ 核估计量和新估计量. σ_{ij} 表示矩阵的(i, j)元素,采用 100 次蒙特卡洛模拟的偏差平均数来衡量估计量估计性能,偏差项数越多,可能的偏差越大,因此以下模拟协变量 U 为[0, 1]上的均匀分布. 由于 $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)$ 中有效参数数量为$\frac{p(p+1)}{2}$,限于篇幅,以下随机模拟选择 $p=3,4$.

模型 1 $\boldsymbol{X}|U=u\sim N_3(\boldsymbol{m}(u),\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u))$,其中 $\boldsymbol{m}(u)=\begin{pmatrix}u\\ \sin(u)\\ \mathrm{e}^u\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{XX}}(u)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \sin(u) & \cos(u) & 0\\ 2\sin(u) & 4\sin(u) & 2\cos(u)\end{pmatrix},U\sim U[0,1]$$

从表 1 中可知,协方差矩阵 6 个参数估计中,$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$ 在 σ_{11},σ_{12},σ_{22} 上要好于$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$,$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$ 在 σ_{13},σ_{23},σ_{33} 上优于$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$. 从表 2 看到,当样本容量增加时,$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}$ 在绝大部分点优于$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)^{-1}$. 从表 1、表 2 中观测到,当样本容量增加时,估计量偏差越来越趋于零,印证了定理 1、定理 2.

表 1 模型 1 下协方差矩阵的两种估计量偏差比较

σ_{ij}	$u=0.2$	$n=400$	$u=0.2$	$n=800$	$u=0.4$	$n=400$	$u=0.4$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$
σ_{11}	0.007 6	0.029 7	0.006 1	0.025 1	0.001 2	0.038 8	−0.002 3	0.027 5
σ_{12}	0.001 9	0.021 6	−0.000 5	0.016 3	−0.001 7	0.031 3	−0.007 8	0.019 0
σ_{13}	−0.046 1	0.043 0	−0.064 9	0.001 7	−0.013 3	0.062 9	−0.043 9	0.014 6
σ_{22}	0.008 4	0.019 1	0.006 1	0.016 7	0.003 7	0.028 0	−0.010 4	0.010 5
σ_{23}	−0.057 0	0.042 4	−0.056 8	0.015 6	−0.025 8	0.068 1	−0.067 1	0.007 5
σ_{33}	1.073 2	0.045 3	0.995 4	0.025 4	1.342 7	0.141 4	1.186 0	0.013 4
σ_{ij}	$u=0.6$	$n=400$	$u=0.6$	$n=800$	$u=0.8$	$n=400$	$u=0.8$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{XX}}(u)$
σ_{11}	−0.001 6	0.036 5	−0.013 7	0.016 9	−0.000 0	0.025 6	−0.010 7	0.008 3
σ_{12}	−0.003 2	0.030 6	−0.013 5	0.012 6	−0.005 0	0.020 1	−0.015 1	0.003 3
σ_{13}	0.037 7	0.070 7	−0.018 8	0.014 8	0.095 4	0.061 5	0.028 9	0.006 7
σ_{22}	0.006 6	0.031 6	−0.014 3	0.003 9	0.003 9	0.021 7	−0.011 2	−0.001 2
σ_{23}	0.008 9	0.088 0	−0.075 2	0.004 5	0.022 2	0.074 4	−0.083 9	0.000 3
σ_{33}	1.745	0.235 5	1.552 0	0.035 4	2.214 6	0.234 0	2.078 0	0.036 0

表 2　模型 1 下逆协方差矩阵两种估计量偏差比较

σ_{ij}	$u=0.2$	$n=400$	$u=0.2$	$n=800$	$u=0.4$	$n=400$	$u=0.4$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$
σ_{11}	0.000 5	−0.005 3	−0.003 7	−0.011 3	0.011 0	−0.008 1	0.005 1	−0.010 3
σ_{12}	−0.022 1	−0.012 0	−0.020 8	−0.015 2	−0.019 4	−0.020 4	−0.020 7	−0.022 5
σ_{13}	0.021 2	−0.005 4	0.025 1	0.004 7	0.009 1	−0.000 7	0.013 0	0.005 6
σ_{22}	−0.047 2	0.016 9	−0.049 6	0.000 7	−0.255 9	0.037 9	−0.253 6	0.005 5
σ_{23}	0.059 2	−0.009 0	0.056 2	−0.001 6	0.151 1	−0.013 8	0.150 6	0.000 8
σ_{33}	−0.058 3	0.005 7	−0.056 5	0.001 5	−0.085 1	0.005 2	−0.083 7	0.000 4
σ_{ij}	$u=0.6$	$n=400$	$u=0.6$	$n=800$	$u=0.8$	$n=400$	$u=0.8$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$
σ_{11}	−0.025 9	−0.000 4	−0.015 5	0.010 3	−0.806 4	0.008 4	−0.842 1	0.023 1
σ_{12}	0.217 5	−0.033 1	0.202 9	−0.036 2	2.052 2	−0.059 7	2.177 4	−0.054 7
σ_{13}	−0.076 8	0.005 1	−0.072 9	0.006 2	−0.482 2	0.010 4	−0.510 1	0.006 4
σ_{22}	−1.128 5	0.097 6	−1.171 7	0.036 3	−5.086 7	0.245 2	−5.516 3	0.132 3
σ_{23}	0.401 0	−0.027 9	0.419 7	−0.001 4	1.196 0	−0.053 8	1.293 2	−0.017 2
σ_{33}	−0.142 1	0.007 8	−0.147 6	−0.000 8	−0.281 0	0.012 4	−0.302 0	0.002 3

模型 2　$\boldsymbol{X}\mid U=u\sim N_4(\boldsymbol{m}(u),\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u))$，其中 $\boldsymbol{m}(u)=\begin{pmatrix}u^2\\ \cos(u)\\ \mathrm{e}^u\\ \ln(1+u)\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{XX}(u)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \sin(u) & \cos(u) & 0 & 0\\ 2\sin(u) & 4\sin(u) & 2\cos(u) & 0\\ 6\cos(u) & 3\sin(u) & 5\sin(u) & 4\cos(u)\end{pmatrix},\ U\sim U[0,1]$$

通过表 3 可知，除 σ_{44} 在 u 取值较小点外，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$ 估计的各参数与零的接近程度好于 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$，随着 u 取值增大，$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$ 估计量的优势越来越明显.

表 3　模型 2 下协方差矩阵的两种估计量偏差比较

σ_{ij}	$u=0.1$	$n=400$	$u=0.1$	$n=800$	$u=0.3$	$n=400$	$u=0.3$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$
σ_{11}	−0.018 4	−0.008 3	−0.030 1	−0.021 0	−0.010 2	0.003 2	−0.025 2	−0.017 0
σ_{12}	−0.005 0	0.001 7	−0.018 9	−0.013 7	−0.025 2	−0.015 2	−0.005 0	0.001 3
σ_{13}	−0.016 6	−0.000 9	−0.044 7	−0.028 7	−0.070 8	−0.054 0	−0.018 6	−0.007 2
σ_{14}	−0.208 6	−0.183 7	−0.167 3	−0.139 3	−0.132 1	−0.100 7	−0.148 8	−0.129 7
σ_{22}	0.014 2	−0.001 8	0.030 5	0.016 0	0.000 8	−0.005 9	0.019 2	0.012 2
σ_{23}	0.057 6	0.073 0	0.021 8	0.015 9	−0.006 7	−0.011 6	0.017 0	0.011 6
σ_{24}	−0.059 5	0.008 8	−0.186 7	−0.126 0	−0.170 4	−0.122 7	−0.017 7	0.016 7
σ_{33}	1.230 0	0.138 9	1.096 3	0.047 2	1.182 0	0.020 0	1.201 5	−0.014 7
σ_{34}	0.168 6	0.195 6	−0.200 3	−0.120 9	−0.411 6	−0.295 2	−0.074 2	−0.057 2
σ_{44}	−1.256 2	−1.690 1	−0.514 1	−0.777 6	−0.986 7	−1.364 3	−1.023 1	−1.219 4

续表 3

σ_{ij}	$u=0.5$	$n=400$	$u=0.5$	$n=800$	$u=0.7$	$n=400$	$u=0.7$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)$
σ_{11}	−0.020 5	−0.007 4	−0.022 8	−0.014 7	−0.018 6	−0.004 7	−0.009 0	−0.000 6
σ_{12}	−0.024 7	−0.014 5	−0.021 6	−0.014 4	−0.010 7	−0.000 2	−0.010 1	−0.002 8
σ_{13}	−0.045 5	−0.034 0	−0.019 1	−0.010 8	−0.002 1	0.010 6	−0.009 0	−5.473 2
σ_{14}	−0.054 3	−0.025 4	−0.016 0	−0.001 1	−0.038 9	−0.013 5	0.006 2	0.024 3
σ_{22}	−0.017 9	−0.022 5	−0.016 3	−0.019 0	−0.002 5	−0.006 3	−0.008 8	−0.010 2
σ_{23}	−0.090 3	−0.058 9	−0.062 5	−0.038 1	−0.095 7	−0.038 6	−0.059 6	−0.026 4
σ_{24}	−0.212 1	−0.178 9	−0.110 6	−0.083 5	−0.050 2	−0.046 1	−0.044 0	−0.033 2
σ_{33}	1.236 2	−0.178 9	1.258 7	−0.049 3	1.778 1	−0.065 9	1.772 9	−0.017 0
σ_{34}	−0.523 6	−0.579 8	−0.209 7	−0.099 8	−0.092 5	0.025 8	−0.233 1	−0.015 6
σ_{44}	−0.147 6	−0.612 3	0.743 8	0.478 6	0.806 4	0.497 6	0.717 5	0.498 9

表 4 模型 2 下逆协方差矩阵两种估计量的偏差比较

σ_{ij}	$u=0.1$	$n=400$	$u=0.1$	$n=800$	$u=0.3$	$n=400$	$u=0.3$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$
σ_{11}	0.076 7	0.090 7	0.111 7	0.121 2	0.070 2	0.115 0	0.108 6	0.136 9
σ_{12}	−0.018 6	−0.020 4	−0.021 0	−0.019 6	0.060 8	−0.020 6	0.071 1	0.004 7
σ_{13}	0.012 0	0.022 9	0.005 7	0.014 6	−0.042 1	0.028 0	−0.050 0	0.010 6
σ_{14}	−0.005 9	−0.012 4	−0.006 2	−0.011 1	−0.003 3	−0.018 6	−0.007 2	−0.018 1
σ_{22}	0.045 2	0.079 9	−0.001 1	0.020 7	−0.038 5	0.076 4	−0.071 4	0.047 3
σ_{23}	0.010 3	−0.021 9	0.014 9	−0.006 9	0.079 3	−0.015 7	0.083 8	−0.013 7
σ_{24}	0.001 1	0.001 1	0.005 0	0.004 4	−0.014 7	0.001 9	−0.018 0	−0.003 0
σ_{33}	−0.046 5	0.015 1	−0.048 5	0.006 5	−0.074 6	0.013 7	−0.077 5	0.013 6
σ_{34}	−0.000 6	−0.004 8	0.001 8	−0.001 6	0.012 5	−0.004 0	0.012 8	−0.002 6
σ_{44}	0.002 1	0.003 8	0.000 6	0.001 8	0.000 4	0.004 5	0.000 9	0.004 0
σ_{ij}	$u=0.5$	$n=400$	$u=0.5$	$n=800$	$u=0.7$	$n=400$	$u=0.7$	$n=800$
	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{XX}(u)^{-1}$
σ_{11}	−0.043 6	0.227 5	−0.136 9	0.126 9	−1.566 2	−0.012 0	−1.598 8	0.078 3
σ_{12}	0.386 4	−0.075 0	0.421 4	−0.015 7	2.788 3	0.124 2	2.798 7	−0.029 5
σ_{13}	−0.215 8	0.021 6	−0.228 5	0.002 4	−1.012 2	−0.060 6	−1.012 7	−0.011 9
σ_{14}	0.029 9	−0.025 4	0.043 5	−0.010 0	0.248 2	0.010 9	0.249 2	−0.002 2
σ_{22}	−0.582 2	0.192 1	−0.600 5	0.094 3	−4.708 3	−0.202 0	−4.670 7	0.069 1
σ_{23}	0.348 1	−0.047 1	0.347 6	−0.017 1	1.699 5	0.088 0	1.690 3	0.011 1
σ_{24}	−0.079 7	0.006 3	−0.083 9	0.001 2	−0.422 4	−0.019 7	−0.424 5	−0.003 1
σ_{33}	−0.187 8	0.018 9	−0.188 0	0.007 2	−0.602 9	−0.022 6	−0.604 1	−0.007 4
σ_{34}	0.044 4	−0.001 8	0.046 0	−0.000 2	0.150 5	0.005 1	0.152 6	0.002 5
σ_{44}	−0.007 7	0.003 8	−0.010 2	0.001 1	−0.037 1	−0.000 3	−0.038 1	0.000 0

3　结　语

本文给出动态协方差矩阵核估计量的另外一种形式，由于文献[7]给出的核估计量在每个样本点均需计算$\hat{\boldsymbol{m}}_X(U_i)$，尤其利用交叉验证选择最优窗宽时，计算格外耗时，另外其估计量的大样本性质推导极为繁琐．相比较而言，本文建议的核估计量的计算相对简单，大样本性质简单易得，并且模拟结果表明，其估计效果不比文献[7]给出估计量差．

参考文献：

[1] O'BRIEN C M. Introduction to Graphical Modelling [J]. Journal of the Royal Statistical Society：Series D (the Statistician)，1996，45(4)：531-532.

[2] RUPPERT D，WAND M P，HOLST U，et al. Local Polynomial Variance-Function Estimation [J]. Technometrics，1997，39(3)：262-273.

[3] FAN J Q，YAO Q W. Efficient Estimation of Conditional Variance Functions in Stochastic Regression [J]. Biometrika，1998，85(3)：645-660.

[4] DRTON M，PERLMAN M D. Model Selection for Gaussian Concentration Graphs [J]. Biometrika，2004，91(3)：591-602.

[5] SMITH M，KOHN R. Parsimonious Covariance Matrix Estimation for Longitudinal Data [J]. Journal of the American Statistical Association，2002，97(460)：1141-1153.

[6] LEDOIT O，WOLF M. Honey，I Shrunk the Sample Covariance Matrix [J]. The Journal of Portfolio Management，2004，30(4)：110-119.

[7] YIN J，GENG Z，LI R，et al. Nonparametric Covariance Model [J]. Statistica Sinica，2010，20：469-479.

[8] CHEN Z Q，LENG C L. Dynamic Covariance Models [J]. Journal of the American Statistical Association，2016，111(515)：1196-1207.

[9] LI Q Racine J S. Nonparametric Econometrics：Theory and Practice [M]. Princeton：Princeton University Press，2006：66-72.

[10] COOK R D，LI B. Determining the Dimension of Iterative Hessian Transformation [J]. The Annals of Statistics，2004，32(6)：2501-2531.

责任编辑　张　枸