第 43 卷第 11 期 西南大学学报(自然科学版) 2021年11月
Vol. 43 No. 11 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Nov. 2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.11.011

非负弱鞅的 Marshall 型极小值不等式的推广

冯德成， 鲁雅莉， 蔺 霞

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：利用 Hölder 不等式和弱鞅的极小值不等式，将关于弱鞅$\{S_n, n \geqslant 1\}$的 Marshall 型极小值不等式推广到形如$\{c_n g(S_n), n \geqslant 1\}$的情形，其中$\{c_n, n \geqslant 1\}$是 $\mathbb{R}$ 上不增的正数序列，$g(\cdot)$是 $\mathbb{R}$ 上的不减凸函数.

关 键 词：弱鞅；不增序列；极小值不等式

中图分类号：O211.4 **文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2021)11-0088-05

开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Generalizing the Marshall-Type Minimal Inequalities for Non-negative Demimartingales

FENG Decheng， LU Yali， LIN Xia

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: We generalize the Marshall-type minimal inequalities for the demimartingale sequence $\{S_n, n \geqslant 1\}$ to the case of $\{c_n g(S_n), n \geqslant 1\}$ by using Hölder inequality and minimal inequality for demimartingale, where $\{c_n, n \geqslant 1\}$ is a non-increasing sequence of positive numbers on $\mathbb{R}$, and $g(\cdot)$ is a non-decreasing convex function on $\mathbb{R}$.

Key words: demimartingale; non-increasing sequence; minimal inequality

1 预备知识

设$\{S_n, n \geqslant 1\}$表示定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量序列. 记$S_0 = 0$，$I(A)$是集合 A 的示性函数，$p > 0$，$p \neq 1$并且$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $\{c_n, n \geqslant 1\}$是 $\mathbb{R}$ 上不增的正数序列，$g(\cdot)$是 $\mathbb{R}$ 上的不减凸函数，记$A = \{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k g(S_k) \leqslant \varepsilon\}$，$B = \{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} g(S_k) \leqslant \varepsilon\}$，$N = \{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \leqslant \varepsilon\}$.

定义 1 设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是$L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量序列，如果对任意$1 \leqslant i \leqslant j < \infty$，有

收稿日期：2020-08-17

基金项目：国家自然科学基金项目(11861057，11761064)；甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019A-003)；西北师范大学研究生科研资助项目(2020KYZZ001113)；甘肃省优秀研究生“创新之星”项目(2021CXZX-262).

作者简介：冯德成，副教授，博士，主要从事应用概率方向研究.

通信作者：鲁雅莉，硕士研究生.

$$E[(S_j - S_i)f(S_1, \cdots, S_n)] \geqslant 0$$

则称随机变量序列$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个弱鞅(demimartingale)，其中 f 是使上述期望存在且分量不减的函数. 若进一步假设 f 是一个非负函数，则称$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个弱下鞅(demisubmartingale).

弱鞅的概念最先是由文献[1]提出的，之后很多学者对弱(下)鞅进行了研究，给出了弱(下)鞅的一些概率不等式以及这些不等式的应用[2-12].

对于零均值的平方可积随机变量 X 和任意函数 ε，有

$$P\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{EX^2}{\varepsilon^2 + EX^2}$$

文献[2]进一步推广，对任意函数 ε

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} EX_k^2}{\varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{n} EX_k^2} \tag{1}$$

其中：$EX_k = 0$，$E(X_k \mid X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}) = 0$ a. e.，$k \geqslant 2$，且 $EX_k^2 < \infty$，$k \geqslant 1$.

在上述条件下，如果令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

那么$\{S_n, n \geqslant 1\}$就是一个鞅. 文献[4]在 $E \mid X_i \mid^p < \infty$，$i \geqslant 1$，且 $p \geqslant 2$ 的条件下，将(1)式推广，对于任意 $\varepsilon > 0$，得到如下形式的 Marshall 型不等式

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E \mid S_n \mid^p}{\alpha^{1-p}\varepsilon^p + E \mid S_n \mid^p}$$

其中 α 是下列函数的最大值

$$h(x) = 1 - x + (1-x)^{2-q}x^{q-1}, \ x \in [0, 1]$$

之后，文献[5]将文献[4]中的若干结论推广到弱鞅的情形下，得到了弱鞅的 Marshall 型概率不等式. 文献[14]将文献[5]中关于非负弱鞅$\{S_n, n \geqslant 1\}$的 Marshall 型极小值不等式推广到了形如$\{g(S_n), n \geqslant 1\}$的弱鞅的情形.

受文献[5]和[14]的启发，本文将文献[5]和[14]中关于非负弱鞅$\{S_n, n \geqslant 1\}$的 Marshall 型极小值不等式推广到$\{c_n g(S_n), n \geqslant 1\}$的情形下，其中 g 是 $\mathbb{R}$ 上不减的凸函数，$\{c_n, n \geqslant 1\}$是 $\mathbb{R}$ 上不增的正数序列.

2　弱鞅的 Marshall 型极小值不等式

引理 1[13]　若 $E \mid X \mid^p < \infty$，$E \mid Y \mid^q < \infty$，则

$$E \mid XY \mid \leqslant (E \mid X \mid^p)^{\frac{1}{p}} (E \mid Y \mid^q)^{\frac{1}{q}}, \ p > 1 \tag{2}$$

$$E \mid XY \mid \geqslant (E \mid X \mid^p)^{\frac{1}{p}} (E \mid Y \mid^q)^{\frac{1}{q}}, \ 0 < p < 1 \tag{3}$$

引理 2[15]　设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个非负弱鞅，$g(\cdot)$是一个不减的凸函数，使得 $g(0) = 0$，且对任意的 $n \geqslant 1$，有 $Eg(S_n) < \infty$. $\{c_n, n \geqslant 1\}$是一个不增的正数序列，那么对任意 $n \geqslant 1$，$\varepsilon > 0$，有

$$\varepsilon P\{\min_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k g(S_k) \leqslant \varepsilon\} \geqslant c_n E[g(S_n) I(\min_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k g(S_k) \leqslant \varepsilon)] \tag{4}$$

引理 3　设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个非负弱鞅，$g(\cdot)$是一个不减的凸函数，使得 $g(0) = 0$. 若 $0 < p < 1$，使得对任意的 $n \geqslant 1$，有 $Eg(S_n) < \infty$. $\{c_n, n \geqslant 1\}$是一个不增的正数序列，那么对任意 $n \geqslant 1$，$\varepsilon > 0$，有

$$c_n[P(A)(1-P(A))^q + P(A)^q(1-P(A))]^{\frac{1}{q}} [E(g(S_n))^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$(\varepsilon + c_n\int_{\Omega-A} g(S_n)\mathrm{d}P - c_n\int_A g(S_n)\mathrm{d}P)P(A) \tag{5}$$

证 记 $Y = I_A$,运用 Hölder 不等式(3) 和引理 2,可以得到

$$\begin{aligned}
& c_n(E\mid Y-EY\mid^q)^{\frac{1}{q}}[E(g(S_n))^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant c_nE\mid g(S_n)(Y-EY)\mid = \\
& c_n[\int_{\Omega-A}\mid(I_A-P(A))g(S_n)\mid \mathrm{d}P + \int_A \mid(I_A-P(A))g(S_n)\mid \mathrm{d}P] = \\
& c_n[P(A)\int_{\Omega-A}g(S_n)\mathrm{d}P + (1-P(A))\int_A g(S_n)\mathrm{d}P] \leqslant \\
& P(A)\varepsilon - P(A)c_n\int_A g(S_n)\mathrm{d}P + P(A)c_n\int_{\Omega-A}g(S_n)\mathrm{d}P = \\
& P(A)(\varepsilon - c_n\int_A g(S_n)\mathrm{d}P + c_n\int_{\Omega-A}g(S_n)\mathrm{d}P)
\end{aligned} \tag{6}$$

由于

$$E\mid Y-EY\mid^q = P(A)(1-P(A))^q + P(A)^q(1-P(A))$$

原命题得证.

定理 1 设 $\{S_n, n\geqslant 1\}$ 是一个非负弱鞅,$\{c_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上不增的正数序列,$g(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上不减的凸函数,且 $g(0)=0$. 若存在 $0<p<1$,使得对于任意 $n\geqslant 1$,均有 $E[c_ng(S_n)]<\infty$,那么对于任意 $\varepsilon>0$ 有

$$P(A) = P\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} c_kg(S_k)\leqslant\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{1+M_1} \tag{7}$$

$$\frac{1}{1+M_2} \leqslant P(A) \leqslant \frac{1}{1+M_1},\ P(A)>0 \tag{8}$$

其中 M_1, M_2 是下面方程的正解,且 $M_1\leqslant M_2$,

$$x^q = (\beta-1)x+\beta,\ x\in(0,+\infty) \tag{9}$$

其中

$$\beta = \frac{(\varepsilon+c_nEg(S_n))^q}{c_n^q(E(g(S_n))^p)^{\frac{q}{p}}}$$

证 显然,当 $P(A)=P\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}c_kg(S_k)\geqslant\varepsilon\}=0$ 时,(7) 式显然成立. 下面考虑当 $P(A)>0$ 时的情况.

当 $P(A)>0$ 时,通过引理 3 可以得到:

$$\begin{aligned}
& c_n^q[P(A)(1-P(A))^q + P(A)^q(1-P(A))][E(g(S_n))^p]^{\frac{q}{p}} \leqslant \\
& (\varepsilon + c_n\int_{\Omega-A}g(S_n)\mathrm{d}P + c_n\int_A g(S_n)\mathrm{d}P)^qP(A)^q
\end{aligned}$$

两边同时除以 $P(A)^q$,有

$$c_n^q\left[P(A)\left(\frac{1-P(A)}{P(A)}\right)^q + (1-P(A))\right][E(g(S_n))^p]^{\frac{q}{p}} \leqslant (\varepsilon + c_n\int_{\Omega-A}g(S_n)\mathrm{d}P + c_n\int_A g(S_n)\mathrm{d}P)^q$$

即有

$$c_n^q\left[P(A)\left(\frac{1-P(A)}{P(A)}\right)^q + (1-P(A))\right](E(g(S_n))^p)^{\frac{q}{p}} \leqslant (\varepsilon + c_nEg(S_n))^q$$

从而有

$$P(A)\left(\frac{1-P(A)}{P(A)}\right)^q + (1-P(A)) \leqslant \frac{(\varepsilon+c_nEg(S_n))^q}{c_n^q(E(g(S_n))^p)^{\frac{q}{p}}}$$

令 $x_0 = \dfrac{1-P(A)}{P(A)}$,则有

$$P(A)=\frac{1}{1+x_0}$$

因此有

$$\frac{x_0^q}{1+x_0}+\frac{x_0}{1+x_0}\leqslant\beta$$

即有

$$x_0^q\leqslant\beta(1+x_0)-x_0=x_0(\beta-1)+\beta \tag{10}$$

因为 $0<p<1$ 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由 Hölder 不等式和弱鞅的非负性可得

$$Eg(S_n)^p\leqslant[E(g(S_n)^p)^{\frac{1}{p}}]^p=(Eg(S_n))^p$$

不难发现

$$\beta=\frac{(\varepsilon+c_nEg(S_n))^q}{c_n^q(E(g(S_n))^p)^{\frac{q}{p}}}=\frac{c_n^{-q}(E(g(S_n))^p)^{-\frac{q}{p}}}{(\varepsilon+c_nEg(S_n))^{-q}}\leqslant$$

$$\frac{c_n^{-q}(Eg(S_n))^{-q}}{(\varepsilon+c_nEg(S_n))^{-q}}<1,\ q<0,\ \varepsilon>0$$

因此，我们可以通过满足 $M_1\leqslant M_2$ 的 M_1 和 M_2 得到方程(9) 的正解. 又因为 $x_0=\frac{1-P(A)}{P(A)}$ 满足(10) 式且 $q<0$，$\beta<1$，因此(8) 式得证. 特别地，如果 $M_1=M_2$，那么有

$$P(A)=\frac{1}{1+x_0}=\frac{1}{1+M_1}$$

若在定理 1 中，令 $c_n\equiv1$，那么就有以下推论 1.

推论 1　设$\{S_n,n\geqslant1\}$是一个非负弱鞅，$g(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上不减的凸函数，且 $g(0)=0$. 若存在 $0<p<1$，使得对于任意 $n\geqslant1$，均有 $E[g(S_n)]^p>0$，那么对于任意 $\varepsilon>0$ 有

$$P(B)=P\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}g(S_k)\leqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{1+M_1}$$

$$\frac{1}{1+M_2}\leqslant P(B)\leqslant\frac{1}{1+M_1},\ P(B)>0$$

其中 M_1,M_2 是方程(9) 的正解，且 $M_1\leqslant M_2$,其中

$$\beta=\frac{(\varepsilon+Eg(S_n))^q}{(E(g(S_n))^p)^{\frac{q}{p}}}$$

若在定理 1 中，取 $c_n\equiv1$，$g(x)=x$，则又有以下推论 2.

推论 2　设$\{S_n,n\geqslant1\}$是一个非负弱鞅，若存在 $0<p<1$，使得对于任意 $n\geqslant1$，均有 $ES_n^p>0$，那么对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$P(N)=P\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{1+M_1}$$

$$\frac{1}{1+M_2}\leqslant P(N)\leqslant\frac{1}{1+M_1},\ P(N)>0$$

其中 M_1,M_2 是方程(9) 的正解，且 $M_1\leqslant M_2$,其中 $\beta=\frac{(\varepsilon+ES_n)^q}{(ES_n^p)^{\frac{q}{p}}}$.

注　推论 1 是文献[14] 中的定理 3.1，推论 2 是文献[5] 中的定理 2.2，因此本文中的定理 1 是文献[14] 中定理 3.1 和文献[5] 中定理 2.2 的推广.

参考文献:

[1] NEWMAN C M, WRIGHT A L. Associated Random Variables and Martingale Inequalities [J]. Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete, 1982, 59(3): 361-371.

[2] MARSHALL A W. A One-Sided Analog of Kolmogorov's Inequality [J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1960, 31(2): 483-487.

[3] HU S H, WANG X J, YANG W Z, et al. The Hàjek-Rènyi-Type Inequality for Associated Random Variables [J]. Statistics & Probability Letters, 2009, 79(7): 884-888.

[4] MU J Y, MIAO Y. Generalizing the Marshall's Inequality [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2011, 40(15): 2809-2817.

[5] HU S H, WANG XH, YANG W Z, et al. Some Inequalities for Demimartingales and N-Demimartingales [J]. Statistics & Probability Letters, 2012, 82(2): 232-239.

[6] CHRISTOFIDES T C. U-Statistics on Associated Random Variables [J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2004, 119(1): 1-15.

[7] DAI P P, SHEN Y, HU S H, et al. Some Results for Demimartingales and N-Demimartingales [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014(1): 1-12.

[8] PRAKASA RAO B L S. On some Maximal Inequalities for Demisubmartingales and N-Demisub Martingales [J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2007, 8(4): 112.

[9] PRAKASA RAO B L S. Remarks on Maximal Inequalities for Non-Negative Demisubmartingales [J]. Statistics & Probability Letters, 2012, 82(7): 1388-1390.

[10] 胡舒合,杨文志,王学军,等.关于N-弱鞅和弱鞅不等式的一个注记[J].系统科学与数学,2010,30(8):1052-1058.

[11] WANG X H, WANG X J. Some Inequalities for Conditional Demimartingales and Conditional N-Demimartingales [J]. Statistics & Probability Letters, 2013, 83(3): 700-709.

[12] WANG J F. MaximalInequalities for Associated Random Variables and Demimartingales [J]. Statistics & Probability Letters, 2004, 66(3): 347-354.

[13] 林正炎,白志东.概率不等式[M].北京:科学出版社,2007.

[14] 冯德成,王　英,李琴社.弱(下)鞅的一类Marshall型不等式[J].四川师范大学学报(自然科学版),2018,41(4):495-499.

[15] 冯德成,张　潇,周　霖.弱鞅的一类极小值不等式[J].山东大学学报(理学版),2017,52(8):65-69.

责任编辑　张　枸