DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.12.008

形式三角矩阵半环的自同构与反自同构

张源野，　谭宜家

福州大学 数学与计算机科学学院，福州 350108

摘要：研究了形式三角矩阵半环 Tri(R, M, S) 的自同构和反自同构. 证明了：半环 Tri(R, M, S) 的任一自同构可由半环 R,S 的自同构和(R, S)-双半模 M 的一个半线性自同构来表示；半环 Tri(R, M, S) 的任一反自同构可由半环 R 到 S 的一个反同构、S 到 R 的一个反同构和(R, S)-双半模 M 的一个半线性反自同构来表示.

关　键　词：自同构；反自同构；半环；形式三角矩阵半环；半模

中图分类号：O151.21　　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2021)12-0067-07　　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Automorphisms and Opposite Automorphisms of Formal Triangular Matrix Semi-rings

ZHANG Yuanye,　TAN Yijia

College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China

Abstract: The automorphisms and the opposite automorphisms of a formal triangular matrix semi-ring Tri(R, M, S) are studied in this paper. It is proved that any automorphism of the semi-ring Tri(R, M, S) can be expressed by an automorphism of the semi-ring R and an automorphism of the semi-ring S and a half-linear automorphism of the (R, S)-bi-semimodule M and that any opposite automorphism of Tri(R, M, S) can be expressed by an opposite isomorphism of R onto S and an opposite isomorphism of S onto R and a half-linear opposite automorphism of the (R, S)-bi-semimodule M.

Key words: automorphism; opposite automorphism; semi-ring; formal triangular matrix semi-ring; semi-module

半环理论是代数理论研究的一个重要内容，应用很广泛[1-4]. 半环上的自同构和反自同构是半环理论中的最基本的研究内容之一. 对于自同构，文献[5]证明了交换环上严格上三角矩阵代数的自同构可以表示成一个对角自同构、一个中心自同构和一个内自同构的乘积；文献[6-11]研究了矩阵环和矩阵代数的导子和自同构. 文献[12]探讨了形式三角矩阵环的导子和自同构. 文献[13]研究了形式三角矩阵

收稿日期：2020-10-04
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11971111)；福建省自然科学基金面上项目(2016J01012).
作者简介：张源野，硕士研究生，主要从事应用数学的研究.
通信作者：谭宜家，教授.

环的反自同构.

本文在上述基础上进一步研究形式三角矩阵半环的自同构和反自同构，所得结果拓广了文献[12-13]的重要结论.

定义1[1]　一个半环是一个代数系统$(R,+,\cdot)$，其中$(R,+)$是一个带有恒等元0的交换幺半群，$(R,\cdot)$是一个带有恒等元1_R的幺半群，乘法对加法满足左右分配律. 同时，对于任意$a\in R$，$0a=a0=0$. $0\neq 1_R$，元素$0,1_R$分别称为半环R的零元和单位元.

设R是一个半环，如果对于任意$a,b\in R$，由$a+b=0$可推出$a=b=0$，则称R为零和自由半环[1]或反环[14-15]. 设$a\in R$，如果果$a^2=a$，则称a为一个幂等元. 显然0,1都是幂等元，称为平凡幂等元.

设$(R,+,0)$是一个交换幺半群，$a\in R$，如果存在$b\in R$，使得$a+b=0$，则称a为一个可反元，此时b称为a的一个反元. 不难验证，如果元素a有一个反元，那么这个反元是唯一的，a的反元记为$-a$. 设$a,b\in R$，且b是可反元，我们定义$a-b=a+(-b)$. 不难验证，对于半环R中的任意元a,b，如果b是可反元，那么$a(-b)=-ab$，$(-b)a=-ba$. 显然，一个半环R是一个环当且仅当R的每一个元都是可反元；R是零和自由半环当且仅当R中只有零元是可反元.

半环是相当丰富的. 例如，每一个带有单位元的环是一个半环；每一个布尔代数、每一个有界分配格都是半环，并且是零和自由的；整数环$\mathbb{Z}$(有理数域$\mathbb{Q}$，实数域$\mathbb{R}$)的正锥$\mathbb{Z}^0$($\mathbb{Q}^0$，$\mathbb{R}^0$)是一个零和自由半环；Max-Plus代数$(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\max,+)$是一个零和自由半环.

定义2[1]　半环R上的一个左半模(简称左R-半模)是一个交换幺半群$(M,+,0)$，并且存在一个映射$R\times M\longrightarrow M$，$(r,m)\longmapsto rm$，满足：对于任意$r,r'\in R$，$m,m'\in M$，均有

(a) $r(m+m')=rm+rm'$；

(b) $(r+r')m=rm+r'm$；

(c) $(rr')m=r(r'm)$；

(d) $1_Rm=m$；

(e) $r0=0=0m$.

类似地，可定义半环S的右S-半模. 一个交换幺半群$(M,+)$如果既是左R-半模又是右S-半模，并且$\forall a\in R$，$m\in M$，$b\in S$，均有$(am)b=a(mb)$，则称M为(R,S)-双半模.

定义3　设R,S是两个半环，$\varphi:R\longrightarrow S$是一个映射. 如果$\varphi$是一个双射，并且对于任意$x,y\in R$，均有$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$，则称$\varphi$为$R$到$S$的一个同构映射；如果$\varphi$是一个双射，并且对于任意$x,y\in R$，均有$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，$\varphi(xy)=\varphi(y)\varphi(x)$，则称$\varphi$为$R$到$S$的一个反同构映射. 半环$R$到自身的一个同构映射称为$R$的一个自同构；半环$R$到自身的一个反同构映射称为$R$的一个反自同构.

注1　如果φ是半环R到S的一个同构映射(或反同构映射)，那么$\varphi(0)=0$，$\varphi(1_R)=1_S$.

定义4　设R,S是两个半环，M是(R,S)-双半模，φ_R,φ_S分别是R,S的自同构，$f:M\longrightarrow M$是一个映射. 如果f是双射，并且对于任意$r\in R$，$m,m'\in M$，$s\in S$，均有$f(m+m')=f(m)+f(m')$，$f(rms)=\varphi_R(r)f(m)\varphi_S(s)$，则称$f$为双半模$M$的一个$(\varphi_R,\varphi_S)$-半线性自同构.

定义5　设R,S是两个半环，M是(R,S)-双半模，φ_R,φ_S分别是R到S，S到R的同构，$f:M\longrightarrow M$是一个映射. 如果f是双射，并且对于任意$r\in R$，$m,m'\in M$，$s\in S$，均有$f(m+m')=f(m)+f(m')$，$f(rms)=\varphi_S(s)f(m)\varphi_R(r)$，则称$f$为双半模$M$的一个$(\varphi_R,\varphi_S)$-半线性反自同构.

定义6　设R,S是两个半环，M是(R,S)-双半模，则集合

$$\mathrm{Tri}(R,M,S)=\left\{\begin{pmatrix} r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\,\middle|\, r\in R,m\in M,s\in S\right\}$$

在通常的矩阵加法和乘法下构成一个半环，称之为形式三角矩阵半环.

注2　在定义6中，当R,S是环时，半环$\mathrm{Tri}(R,M,S)$就是形式三角矩阵环[16].

定理 1　设 R,S 是两个半环，并且所有幂等元是平凡的，M 为非零的(R, S)- 双半模，φ 是形式三角矩阵半环 $\mathrm{Tri}(R, M, S)$ 到自身的一个映射. 那么 φ 是 $\mathrm{Tri}(R, M, S)$ 的一个自同构当且仅当存在 R 的一个自同构 φ_R、S 的一个自同构 φ_S、(R, S)- 双半模 M 的一个(φ_R, φ_S)- 半线性自同构 f 以及 M 中的一个可反元 m_0，使得对于任意$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{Tri}(R, M, S)$，均有

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \varphi_R(r) & \varphi_R(r)m_0 - m_0\varphi_S(s) + f(m) \\ 0 & \varphi_S(s) \end{pmatrix} \tag{1}$$

证　充分性　通过直接验证可得 φ 是半环 $\mathrm{Tri}(R, M, S)$ 的一个自同构.

必要性　设 φ 是半环 $\mathrm{Tri}(R, M, S)$ 的任一自同构. 对于任意 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y} \in \mathrm{Tri}(R, M, S)$，设

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} r + r' & m + m' \\ 0 & s + s' \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{XY} = \begin{pmatrix} rr' & rm' + ms' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}$$

再设

$$\varphi(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(r, m, s) & f_{12}(r, m, s) \\ 0 & \varphi_{22}(r, m, s) \end{pmatrix}$$

那么，由

$$\varphi(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \varphi(\boldsymbol{X}) + \varphi(\boldsymbol{Y}) \qquad \varphi(\boldsymbol{XY}) = \varphi(\boldsymbol{X})\varphi(\boldsymbol{Y})$$

得

$$\begin{gathered}\varphi\left(\begin{pmatrix} r + r' & m + m' \\ 0 & s + s' \end{pmatrix}\right) = \\ \begin{pmatrix} \varphi_{11}(r, m, s) + \varphi_{11}(r', m', s') & f_{12}(r, m, s) + f_{12}(r', m', s') \\ 0 & \varphi_{22}(r, m, s) + \varphi_{22}(r', m', s') \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\varphi\left(\begin{pmatrix} rr' & rm' + ms' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}\right) = \\ \begin{pmatrix} \varphi_{11}(r, m, s)\varphi_{11}(r', m', s') & \varphi_{11}(r, m, s)f_{12}(r', m', s') + f_{12}(r, m, s)\varphi_{22}(r', m', s') \\ 0 & \varphi_{22}(r, m, s)\varphi_{22}(r', m', s') \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{3}$$

下面分 3 步来完成必要性的证明.

步骤 1　证明 $\varphi_{11}(1_R, 0, 0) = 1_R$，$\varphi_{11}(0, 0, 1_S) = 0$，$\varphi_{22}(1_R, 0, 0) = 0$，$\varphi_{22}(0, 0, 1_S) = 1_S$，$f_{12}(1_R, 0, 0)$ 是 M 中的可反元.

用 φ 作用于

$$\begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(1_R, 0, 0)^2 & \varphi_{11}(1_R, 0, 0)f_{12}(1_R, 0, 0) + f_{12}(1_R, 0, 0)\varphi_{22}(1_R, 0, 0) \\ 0 & \varphi_{22}(1_R, 0, 0)^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

所以

$$\varphi_{11}(1_R, 0, 0) = \varphi_{11}(1_R, 0, 0)^2 \qquad \varphi_{22}(1_R, 0, 0) = \varphi_{22}(1_R, 0, 0)^2$$

由于半环 R,S 的幂等元都是平凡的，所以 $\varphi_{11}(1_R, 0, 0) = 0$ 或 $\varphi_{11}(1_R, 0, 0) = 1_R$，$\varphi_{22}(1_R, 0, 0) = 0$ 或

$\varphi_{22}(1_R, 0, 0)=1_S$.

如果 $\varphi_{11}(1_R, 0, 0)=0$，$\varphi_{22}(1_R, 0, 0)=0$，那么由(4)式，得 $\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，这与 φ 是半环 Tri(R, M, S) 的自同构相矛盾.

如果 $\varphi_{11}(1_R, 0, 0)=0$，$\varphi_{22}(1_R, 0, 0)=1_S$，那么由(4)式，得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & f_{12}(1_R, 0, 0)\\ 0 & 1_S\end{pmatrix} \tag{5}$$

用 φ 作用于 $\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1_R & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & \varphi_{11}(1_R, m, s)f_{12}(1_R, 0, 0)+f_{12}(1_R, m, s)\\ 0 & \varphi_{22}(1_R, m, s)\end{pmatrix} \tag{6}$$

比较(5)式与(6)式，得

$$\varphi_{22}(1_R, m, s)=1_S$$

再用 φ 作用于 $\begin{pmatrix}1_R & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_R & m\\ 0 & s\end{pmatrix}$，得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & f_{12}(1_R, 0, 0)\varphi_{22}(1_R, m, s)\\ 0 & \varphi_{22}(1_R, m, s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & f_{12}(1_R, 0, 0)\\ 0 & 1_S\end{pmatrix} \tag{7}$$

比较(5)式与(7)式，得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

这与 φ 是半环 Tri(R, M, S) 的自同构相矛盾.

因此 $\varphi_{11}(1_R, 0, 0)=1_R$. 于是

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1_R & f_{12}(1_R, 0, 0)\\ 0 & \varphi_{22}(1_R, 0, 0)\end{pmatrix}$$

类似可证 $\varphi_{22}(0, 0, 1_S)=1_S$，于是

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1_S\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(0, 0, 1_S) & f_{12}(0, 0, 1_S)\\ 0 & 1_S\end{pmatrix}$$

用 φ 作用于 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1_S\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\varphi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(0, 0, 1_S) & f_{12}(0, 0, 1_S)+f_{12}(1_R, 0, 0)\\ 0 & \varphi_{22}(1_R, 0, 0)\end{pmatrix}$$

于是

$$\varphi_{11}(0, 0, 1_S)=0 \qquad \varphi_{22}(1_R, 0, 0)=0 \qquad f_{12}(0, 0, 1_S)+f_{12}(1_R, 0, 0)=0$$

设 $f_{12}(1_R, 0, 0)=m_0$，则 m_0 是 M 中的可反元，并且 $f_{12}(0, 0, 1_S)=-m_0$.

步骤 2 证明分别存在半环 R，S 的自同构 φ_R，φ_S，使得对于任意 $r\in R$，$m\in M$，$s\in S$，均有

$$\varphi_{11}(r, m, s)=\varphi_R(r) \qquad \varphi_{22}(r, m, s)=\varphi_S(s)$$

用 φ 作用于 $\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_R & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，并利用

$$\varphi_{11}(1_R, 0, 0)=1_R \qquad \varphi_{22}(1_R, 0, 0)=0 \qquad f_{12}(1_R, 0, 0)=m_0$$

可得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \varphi_{11}(r, m, s) & \varphi_{11}(r, m, s)m_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$\varphi_{11}(r, 0, 0)=\varphi_{11}(r, m, s) \qquad \varphi_{22}(r, 0, 0)=0$$
$$f_{12}(r, 0, 0)=\varphi_{11}(r, m, s)m_0$$

类似可证

$$\varphi_{22}(0, 0, s)=\varphi_{22}(r, m, s),\ f_{12}(0, 0, s)=-m_0\varphi_{22}(r, m, s),\ \varphi_{11}(0, 0, s)=0$$

从 $\varphi_{11}(r, 0, 0)=\varphi_{11}(r, m, s)$，$\varphi_{22}(0, 0, s)=\varphi_{22}(r, m, s)$ 看出，$\varphi_{11}(r, m, s)$ 与 m，s 无关，$\varphi_{22}(r, m, s)$ 与 r，m 无关.

现将 $\varphi_{11}(r, m, s)$ 和 $\varphi_{22}(r, m, s)$ 分别记为 $\varphi_R(r)$ 和 $\varphi_S(s)$，则可得两个映射 $\varphi_R: R \longrightarrow R$ 和 $\varphi_S: S \longrightarrow S$，同时

$$f_{12}(r, 0, 0)=\varphi_R(r)m_0 \qquad f_{12}(0, 0, s)=-m_0\varphi_S(s) \tag{8}$$

下证映射 $\varphi_R: R \longrightarrow R$ 和 $\varphi_S: S \longrightarrow S$ 分别是半环 R 与 S 的自同构.

由(2)式与(3)式，得

$$\varphi_R(r+r')=\varphi_R(r)+\varphi_R(r') \qquad \varphi_S(s+s')=\varphi_S(s)+\varphi_S(s')$$
$$\varphi_R(rr')=\varphi_R(r)\varphi_R(r') \qquad \varphi_S(ss')=\varphi_S(s)\varphi_S(s')$$

对于任意 $r, r' \in R$，当 $r \neq r'$ 时，有

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq \varphi\left(\begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

即

$$\begin{pmatrix} \varphi_R(r) & \varphi_R(r)m_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \varphi_R(r') & \varphi_R(r')m_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

那么 $\varphi_R(r) \neq \varphi_R(r')$，所以 φ_R 是单射.

因为 φ 是形式三角矩阵半环 $\mathrm{Tri}(R, M, S)$ 的一个自同构，所以对于任意 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Tri}(R, M, S)$，总有 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{Tri}(R, M, S)$，使得 $\varphi(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}$. 因此 $\forall r' \in R$，总有 $r \in R$，使得 $\varphi_R(r)=r'$，所以 φ_R 是满射，从而 φ_R 是双射.

类似可证 φ_S 是双射. 因此映射 $\varphi_R: R \longrightarrow R$ 和 $\varphi_S: S \longrightarrow S$ 分别是半环 R 与 S 的自同构.

步骤 3　证明存在 (R, S)- 双半模 M 的一个 (φ_R, φ_S)- 半线性自同构 f，使得对于任意 $r \in R$，$m \in M$，$s \in S$，均有

$$f_{12}(r, m, s)=\varphi_R(r)m_0-m_0\varphi_S(s)+f(m)$$

由(2)式和(8)式，得

$$f_{12}(r, m, s)=f_{12}(r, 0, 0)+f_{12}(0, m, 0)+f_{12}(0, 0, s)=\varphi_R(r)m_0-m_0\varphi_S(s)+f_{12}(0, m, 0)$$

记 $f_{12}(0, m, 0)=f(m)$，则可得映射 $f: M \longrightarrow M$，此时

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \varphi_R(r) & \varphi_R(r)m_0-m_0\varphi_S(s)+f(m) \\ 0 & \varphi_S(s) \end{pmatrix}$$

下证 f 是 M 的一个 (φ_R, φ_S)- 半线性自同构.

用 φ 作用于等式

$$\begin{pmatrix} 0 & m+m' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & m' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得

$$f(m+m')=f(m)+f(m')$$

再用 φ 作用于等式

$$\begin{pmatrix}0 & rms\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}$$

得

$$f(rms)=\varphi_R(r)f(m)\varphi_S(s)$$

对于任意 $m,m'\in M$，当 $m\neq m'$ 时，有

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}0 & m\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\neq\varphi\left(\begin{pmatrix}0 & m'\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

则 $f(m)\neq f(m')$，所以 f 是单射. 对任意 $m'\in M$，存在$\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\in \mathrm{Tri}(R,M,S)$，使得

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & m'\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}\varphi_R(r) & \varphi_R(r)m_0-m_0\varphi_S(s)+f(m)\\ 0 & \varphi_S(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & m'\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可得

$$\varphi_R(r)=0 \qquad \varphi_S(s)=0 \qquad f(m)=m'$$

所以 f 是满射，从而 f 为(R,S)-双半模 M 的一个(φ_R,φ_R)-半线性自同构.

综上所述，必要性得证.

注 3 在定理1中，当 R,S 是两个环，M 为(R,S)-双模时，可得文献[12]的定理2.

定理 2 设 R,S 是两个半环，并且所有幂等元是平凡的，M 为非零的(R,S)-双半模，φ 是形式三角矩阵半环 $\mathrm{Tri}(R,M,S)$ 到自身的一个映射. 那么 φ 是 $\mathrm{Tri}(R,M,S)$ 的一个反自同构当且仅当存在 R 到 S 的一个反同构 φ_R、S 到 R 的一个反同构 φ_S、(R,S)-双半模 M 的一个(φ_R,φ_S)-半线性反自同构 f 以及 M 中的一个可反元 m_0，使得对于任意$\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\in\mathrm{Tri}(R,M,S)$，均有

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\varphi_S(s) & \varphi_S(s)m_0-m_0\varphi_R(r)+f(m)\\ 0 & \varphi_R(r)\end{pmatrix} \tag{9}$$

证 类似于定理1，从略.

注 4 在定理2中，当 $R=S$ 是环，M 为(R,S)-双模时，可得文献[13]的定理.

定义 7 设 M 是一个半模. 如果 $\forall m,m'\in M$，由 $m+m'=0$ 可推出 $m=m'=0$，则称 M 为零和自由半模.

由定义7知，一个半模 M 是零和自由的当且仅当 M 只有零元是可反元.

由定理1和定理2得：

定理 3 设 R,S 是两个半环，并且所有幂等元是平凡的，M 为非零的(R,S)-双半模，且是零和自由的，φ 是形式三角矩阵半环 $\mathrm{Tri}(R,M,S)$ 到自身的一个映射. 那么

(i) φ 是 $\mathrm{Tri}(R,M,S)$ 的一个自同构当且仅当存在 R 的一个自同构 φ_R、S 的一个自同构 φ_S、(R,S)-双半模 M 的一个(φ_R,φ_S)-半线性自同构 f，使得对于任意$\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\in\mathrm{Tri}(R,M,S)$，均有

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}r & m\\ 0 & s\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\varphi_R(r) & f(m)\\ 0 & \varphi_S(s)\end{pmatrix} \tag{10}$$

(ⅱ) φ 是 Tri(R，M，S) 的一个反自同构当且仅当存在 R 到 S 的一个反同构 φ_R、S 到 R 的一个反同构 φ_S、(R，S)-双半模 M 的一个(φ_R，φ_S)-半线性反自同构 f，使得对于任意 $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in$ Tri(R，M，S)，均有

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \varphi_S(s) & f(m) \\ 0 & \varphi_R(r) \end{pmatrix} \tag{11}$$

参考文献：

[1] GOLAN J S. Semirings and Their Applications [M]. London：Kluwer Academic Publishers，1999.

[2] 欧启通. 差半环的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(5)：9-13.

[3] 王爱法. 满足某些恒等式的半环上的格林关系 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(12)：67-73.

[4] 周　敏. 半环的 L-模糊理想的范畴性质 [J]. 高校应用数学学报(A 辑)，2017，32(3)：321-331.

[5] CAO Y A，WANG J T. A Note on Algebra Automorphisms of Strictly Upper Triangular Matrices Over Commutative Rings [J]. Linear Algebra and its Applications，2000，311(1/2/3)：187-193.

[6] JΦNDRUP S. The Group of Automorphisms of Certain Subalgebras of Matrix Algebras [J]. Journal of Algebra，1991，141(1)：106-114.

[7] JΦNDRUP S. Automorphisms and Derivations of Upper Triangular Matrix rings [J]. Linear Algebra and its Applications，1995，221：205-218.

[8] KEZLAN T P. A Note on Algebra Automorphisms of Triangular Matrices Over Commutative Rings [J]. Linear Algebra and its Applications，1990，135：181-184.

[9] CHEN M X，CHEN Q H. The Automorphisms of Triangular Algebras [J]. 数学杂志，2010，30(4)：587-594.

[10] 张　波. 可换环上一类不可解矩阵代数的自同构 [J]. 吉林师范大学学报(自然科学版)，2013，34(4)：68-70.

[11] 王路群，刘绍武. 交换环上矩阵代数的自同构群中心 [J]. 黑龙江大学自然科学学报，1994，11(4)：1-5.

[12] 谢乐平，曹佑安. 形式三角矩阵环的导子和自同构 [J]. 数学杂志，2006，26(2)：165-170.

[13] 谢乐平. 形式三角矩阵环的反自同构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(4)：612-615.

[14] TAN Y J. On Nilpotency of Matrices Over Antirings [J]. Linear Algebra and its Applications，2010，433(8/9/10)：1541-1554.

[15] 尹娇娇，邵　勇，韩　金. 反环上的 e-可逆矩阵 [J]. 山东大学学报(理学版)，2020，55(4)：67-73.

[16] KRYLOV P，TUGANBAEV A. Formal Matrices [M]. Cham：Springer International Publishing，2017.

责任编辑　廖　坤