DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.12.009

三角矩阵环上的广义 Gorenstein 投射模

关菡青，　杨　刚

兰州交通大学 数理学院，兰州 730070

摘要：设 $\Lambda=\begin{pmatrix}A & M\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 是三角矩阵环，其中 A,B 是环，M 是 A-B 双模. 本文引入了 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 模类，其中 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 分别是包含投射 A-模和投射 B-模的类，并给出了三角矩阵环上 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein 投射模的刻画，由此推广和统一了三角矩阵环上 Gorenstein 投射模和 Ding 投射模的一些结果.

关 键 词：投射模；Ding 投射模；$\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein 投射模；强相容

中图分类号：O154.2　　**文献标志码**：A　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673－9868(2021)12－0074－07

Generalized Gorenstein Projective Modules Over Triangular Matrix Rings

GUAN Hanqing，　YANG Gang

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let $\Lambda=\begin{pmatrix}A & M\\ 0 & B\end{pmatrix}$ be a triangular matrix ring, where A and B are rings, and M is a A-B bimodule. In this paper, the class $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ of Λ-modules are introduced, where $\mathscr{X}$ *and* $\mathscr{Y}$ are classes that contain projective A-modules and projective B-modules, respectively, and a characterization of $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein projective modules over triangular matrix rings are given, thus generalizing and unifying some results of Gorenstein projective modules and Ding projective modules over triangular matrix rings.

Key words: projective modules; Ding projective modules; $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein projective module; strongly compatible

Gorenstein 同调代数起源于 20 世纪 60 年代，是由 Auslander 和 Bridger 等人的相关研究成果发展而来. 作为有限生成模的推广，文献[1]引入了双边 Noether 环上 G-维数为 0 的模. 20 世纪 90 年代，文献[2]推广了 Auslander 和 Bridger 的结果，引入了任意环上 Gorenstein 投(内)射模和 Gorenstein 平坦模的概念.

收稿日期：2021－01－11

基金项目：国家自然科学基金项目(11561039，11761045)；兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”基金资助项目；甘肃省自然科学基金项目(17JR5RA091，18JR3RA113).

作者简介：关菡青，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

2010 年，文献[3]引入了环 R 上 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模的概念，其中 $\mathscr{X}$ 是指包含所有投射左 R-模的模类，统一了环 R 上的一些 Gorenstein 同调模类.

三角矩阵环作为一种非交换环，在环论以及代数的同调理论中都扮演了重要的角色. 这一类环通常被用来构造反例，使得代数上的模理论变得更加丰富和具体. 近年来，三角矩阵环以及其上的模受到了越来越多的关注，许多学者对于三角矩阵环上的模及其同调性质进行了研究，得到了一些有趣的结果. 设 $\Lambda = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是三角矩阵环，其中 A，B 是环，M 是左 A 右 B 双模. 文献[4]给出了三角矩阵环上投(内)射模的刻画. 文献[5]研究了三角矩阵 Artin 代数上 Gorenstein 投射模的结构. 文献[6]给出了三角矩阵环上 Ding 投(内)射模的刻画.

受上述结论的启发，本文引入了三角矩阵环上的 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-模类，其中 $\mathscr{X}$ 是包含所有投射左 A-模的模类，$\mathscr{Y}$ 是包含所有投射左 B-模的模类. 由此给出了 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein 投射模的刻画，推广和统一了三角矩阵环上的许多广义 Gorenstein 同调模类，如投射模类、Gorenstein 投射模类、Ding 投射模类及其性质刻画等.

1　准备知识

设 A 是环. 本文以 A-Mod 表示左 A-模范畴. 无特别声明，所有的模均指左模.

令 $\Lambda = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是三角矩阵环. 由文献[5]可知，Λ-模为三元组 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\phi}$，当 ϕ 显然时可简记为 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，其中 $X \in A$-Mod，$Y \in B$-Mod，$\phi: M \otimes_B Y \longrightarrow X$ 是 A-模同态. Λ-模 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\phi}$ 与 $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}_{\phi'}$ 间的 Λ-同态为形如 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ 的二元组，其中 $f \in \mathrm{Hom}_A(X, X')$，$g \in \mathrm{Hom}_B(Y, Y')$，并且满足以下交换图：

$$\begin{tikzcd} M \otimes_B Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g"] & X \arrow[d, "f"] \\ M \otimes_B Y' \arrow[r, "\phi'"] & X' \end{tikzcd}$$

Λ-模的序列 $0 \longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$ 是正合序列当且仅当 A-模的序列 $0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow 0$ 和 B-模的序列 $0 \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_3 \longrightarrow 0$ 是正合序列.

定义 1[7]　设 A 是环. 如果 $\boldsymbol{P}$ 是正合序列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \longrightarrow \cdots$$

其中每个 P^i 是投射 A-模，并且对任意投射 A-模 P'，$\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}, P')$ 是正合序列，则称序列 $\boldsymbol{P}$ 为完全 A-投射分解. 如果存在完全投射分解 $\boldsymbol{P}$ 使得 $M \cong \mathrm{Ker}\, d^0$，则称 A-模 M 是 Gorenstein 投射模.

定义 2[8-9]　设 A 是环. 如果存在 A-模的正合序列

$$\cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} P^0 \xrightarrow{f^0} P^1 \xrightarrow{f^1} \cdots$$

其中每个 P_i 和 P^i 是投射 A-模，$M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \longrightarrow P^1)$，并且对任意平坦 A-模 F，$\mathrm{Hom}_A(-, F)$ 作用以上正合序列后仍得到正合序列，则称 A-模 M 是 Ding 投射模.

定义 3[3]　设 $\mathscr{X}$ 是 A-模构成的类，且包含所有的投射 A-模. 如果存在 A-模的正合序列

$$\cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} P^0 \xrightarrow{f^0} P^1 \xrightarrow{f^1} \cdots$$

其中每个 P_i 和 P^i 是投射 A-模，$M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \longrightarrow P^1)$，并且对任意 $X \in \mathscr{X}$，$\mathrm{Hom}_A(-, X)$ 作用以上正合序列后仍得到正合序列，则称 A-模 M 是 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模，该正合序列为 A-模 M 的 $\mathscr{X}$-完全投射分解. 以下将 $\mathscr{X}$-Gorenstein 投射模类简记为 $\mathscr{G}(\mathscr{X})$.

定义 4　设 M 是 A-模，$\mathscr{X}$ 是包含所有投射 A-模的类. 定义 M 的 $\mathscr{X}$-分解维数为

$$\mathscr{X}\text{-pd}_A M = \inf\{n \geqslant 0: \text{存在正合序列 } 0 \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\text{，使得每个 } X_i \in \mathscr{X}\}$$

注意到，若 $\text{pd}_A M < \infty$，则有 $\mathscr{X}\text{-pd}_A M < \infty$.

2 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein 投射模

令 $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 Λ-模. 由文献[4]知 M 是投射 Λ-模当且仅当 M_2 是投射 B-模，$M_2/\text{Im}\,\varphi^M$ 是投射 A-模，且 φ^M 是单态射. 由文献[7]知 M 是平坦 Λ-模当且仅当 M_2 是平坦 B-模，$M_2/\text{Im}\,\varphi^M$ 是平坦 A-模，且 φ^M 是单态射. 作为投射 Λ-模和平坦 Λ-模的推广，以下引入 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 模类：

定义 5 设 $\mathscr{X}$ 是包含所有投射 A-模的类，$\mathscr{Y}$ 是包含所有投射 B-模的类. 令

$$\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \left\{ \begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix}_{\phi} : \phi \text{ 是单的 } A\text{-同态，Coker } \phi \in \mathscr{X} \text{ 且 } H \in \mathscr{Y} \right\}$$

显然 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是包含所有投射 Λ-模的类. 由定义 4，如果存在 Λ-模的正合列

$$\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} P^{-1} \\ Q^{-1} \end{pmatrix}_{\phi^{-1}} \xrightarrow{\delta^{-1}} \begin{pmatrix} P^0 \\ Q^0 \end{pmatrix}_{\phi^0} \xrightarrow{\delta^0} \begin{pmatrix} P^1 \\ Q^1 \end{pmatrix}_{\phi^1} \longrightarrow \cdots$$

其中每个 $\begin{pmatrix} P^i \\ Q^i \end{pmatrix}_{\phi^i}$ 是投射 Λ-模，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\varphi} \cong \text{Ker}\,\delta^0$，并且对任意 $\begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix}_{\phi} \in \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，$\text{Hom}_R\left(-, \begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix}_{\phi}\right)$ 作用以上正合序列后仍得到正合序列，则称 Λ-模 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\varphi}$ 是 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein 投射 Λ-模. 以下将 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein 投射 Λ-模类记为 $\mathscr{G}(\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$.

定义 6[6] 定义以下函子：

(a) $\boldsymbol{p}: A\text{-Mod} \times B\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}$，对任意的对象$(N_1, N_2) \in A\text{-Mod} \times B\text{-Mod}$，令 $\boldsymbol{p}(N_1, N_2) = \begin{pmatrix} N_1 \oplus (M \otimes_B N_2) \\ N_2 \end{pmatrix}$，对任意态射$(f_1, f_2) \in A\text{-Mod} \times B\text{-Mod}$，令 $\boldsymbol{p}(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} f_1 \oplus (1_M \otimes_B f_2) \\ f_2 \end{pmatrix}$；

(b) $\boldsymbol{q}: \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod} \times B\text{-Mod}$，对任意的对象 $\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{q}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = (N_1, N_2)$，对任意态射 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \Lambda\text{-Mod}$，令 $\boldsymbol{q}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = (f_1, f_2)$.

显然 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是伴随对.

注 1 以下结论成立：

(i) 若 $\mathscr{X}$ 为投射 A-模的类，$\mathscr{Y}$ 为投射 B-模的类，则 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 恰为投射 Λ-模的类，此时 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein 投射 Λ-模就是 Gorenstein 投射 Λ-模；

(ii) 若 $\mathscr{X}$ 为平坦 A-模的类，$\mathscr{Y}$ 为平坦 B-模的类，则 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 恰为平坦 Λ-模的类，此时 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein 投射 Λ-模就是 Ding 投射 Λ-模；

(iii) 既然 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 包含所有的投射 Λ-模，那么每个 $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein 投射 Λ-模是 Gorenstein 投射 Λ-模.

定义 7 设 M 是 A-B 双模. 如果 M 满足以下两个条件：

(W1) 若 $\boldsymbol{Q}'$ 是投射 B-模的正合列，则 $M \otimes_B \boldsymbol{Q}'$ 正合；

(W2) 对任意 $Y \in \mathscr{Y}$，$\mathscr{X}\text{-pd}_A(M \otimes_B Y) < \infty$.

则称 M 是强相容的.

引理 1 设 M 是 A-B 双模. 以下结论等价：

(i) M 满足条件(W2)；

(ii) 若 $\boldsymbol{P}$ 是 A-模范畴中的 $\mathscr{X}$-完全投射分解，则对任意 $Y \in \mathscr{Y}$，有 $\text{Hom}_A(\boldsymbol{P}, M \otimes_B Y)$ 正合；

(iii) 对任意的 $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X})$，$Y \in \mathscr{Y}$，有 $\text{Ext}_A^1(G, M \otimes_B Y) = 0$；

(iv) 对任意的 $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X})$，$Y \in \mathscr{Y}$，有 $\text{Ext}_A^i(G, M \otimes_B Y) = 0$，$i \geqslant 1$.

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)　设序列 $\boldsymbol{P}$ 是 A-模的 $\mathscr{X}$-完全投射分解

$$\boldsymbol{P}=\cdots\longrightarrow P^{-1}\xrightarrow{d^{-1}}P^{0}\xrightarrow{d^{0}}P^{1}\xrightarrow{d^{1}}\cdots$$

则对任意 $X\in\mathscr{X}$，$\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},X)$ 是正合序列. 由 (i) 知，存在 A-模的正合列

$$0\longrightarrow X_n\longrightarrow X_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_1\longrightarrow X_0\longrightarrow M\otimes_B Y\longrightarrow 0$$

其中 $X_i\in\mathscr{X}$，$0\leqslant i\leqslant n$. 用 $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},-)$ 作用得到正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},X_n)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},X_0)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},M\otimes_B Y)\longrightarrow 0$$

因为 $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},X_i)$ 正合，故 $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P},M\otimes_B Y)$ 正合.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(i) 显然.

引理 2[5]　设 $0\longrightarrow Y\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Z\longrightarrow 0$ 是 A-模的正合列，$Y\xrightarrow{c^{-1}}C^0\xrightarrow{c^0}C^1\longrightarrow\cdots$ 是 A-模的复形，$0\longrightarrow Z\xrightarrow{d^{-1}}D^0\xrightarrow{d^0}D^1\longrightarrow\cdots$ 是 A-模的正合列. 若对任意 $i\geqslant 0$，有 $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Ker}\,d^i,C^i)=0$，则存在 A-同态 $\partial^{-1}=\begin{pmatrix}d^{-1}g\\ \sigma^{-1}\end{pmatrix}:X\longrightarrow D^0\oplus C^0$ 和 $\partial^i=\begin{pmatrix}d^i & 0\\ \sigma^i & c^i\end{pmatrix}:D^i\oplus C^i\longrightarrow D^{i+1}\oplus C^{i+1}(\sigma^i:D^i\longrightarrow C^{i+1})$，$i\geqslant 0$，使得

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{\partial^{-i}}D^0\oplus C^0\xrightarrow{\partial^0}D^1\oplus C^1\xrightarrow{\partial^1}\cdots\longrightarrow D^i\oplus C^i\xrightarrow{\partial^i}\cdots$$

是 A-模的复形，即有以下列正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "c^{-1}"] \arrow[d, "f"] & C^0 \arrow[r, "c^0"] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & C^1 \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\partial^{-1}"] \arrow[d, "g"] & D^0\oplus C^0 \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[d, "(\mathrm{id},0)"] & D^1\oplus C^1 \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{id},0)"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d] & D^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & D^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

特别地，中间行正合当且仅当上行正合.

定理 1　设 M 是强相容的 A-B 双模，$\Lambda=\begin{pmatrix}A & M\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 是三角矩阵环，$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_{\varphi}$ 是 Λ-模. 则以下结论等价：

(i) $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_{\varphi}\in\mathscr{G}(\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$；

(ii) $\varphi:M\otimes_B Y\longrightarrow X$ 是单态射，$Y\in\mathscr{G}(\mathscr{Y})$ 且 $\mathrm{Coker}\,\varphi\in\mathscr{G}(\mathscr{X})$.

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)　设 $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_{\varphi}\in\mathscr{G}(\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$. 则存在 Λ-模的正合列

$$\boldsymbol{L}=\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}P^{-1}\oplus(M\otimes_B Q^{-1})\\ Q^{-1}\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}\xrightarrow{\binom{\partial^{-1}}{d'^{-1}}}\begin{pmatrix}P^{0}\oplus(M\otimes_B Q^{0})\\ Q^{0}\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}\xrightarrow{\binom{\partial^{0}}{d'^{0}}}\begin{pmatrix}P^{1}\oplus(M\otimes_B Q^{1})\\ Q^{1}\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}\xrightarrow{\binom{\partial^{1}}{d'^{1}}}\begin{pmatrix}P^{2}\oplus(M\otimes_B Q^{2})\\ Q^{2}\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}\longrightarrow\cdots$$

其中 $\begin{pmatrix}P^i\oplus(M\otimes_B Q^i)\\ Q^i\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}$ 是投射 Λ-模，$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_{\varphi}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}\partial^0\\ d'^0\end{pmatrix}$，并且对任意 $\begin{pmatrix}N\\ H\end{pmatrix}_{\phi}\in\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，$\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix}N\\ H\end{pmatrix}_{\phi}\right)$ 是正合序列. 故有投射 B-模的正合序列

$$\mathbf{Q}=\cdots\longrightarrow Q^{-1}\xrightarrow{d'^{-1}}Q^{0}\xrightarrow{d'^{0}}Q^{1}\xrightarrow{d'^{1}}\cdots$$

其中 $Y\cong\mathrm{Ker}\,d'^{0}$. 同时有 A-模的正合序列

$$\mathbf{V}=\cdots\longrightarrow P^{-1}\oplus(M\otimes_{B}\mathbf{Q}^{-1})\xrightarrow{\partial^{-1}}P^{0}\oplus(M\otimes_{B}\mathbf{Q}^{0})\xrightarrow{\partial^{0}}P^{1}\oplus(M\otimes_{B}\mathbf{Q}^{1})\xrightarrow{\partial^{1}}\cdots$$

其中 $X\cong\mathrm{Ker}\,\partial^{0}$. 任取 Λ-态射 $\begin{pmatrix}\partial^{i}\\ d'^{i}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}P^{i}\oplus(M\otimes_{B}\mathbf{Q}^{i})\\ \mathbf{Q}^{i}\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}\longrightarrow\begin{pmatrix}P^{i+1}\oplus(M\otimes_{B}\mathbf{Q}^{i+1})\\ \mathbf{Q}^{i+1}\end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}}$，则有交换图

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_B Q^i \arrow[r, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes_B d'^i"] & P^i\oplus(M\otimes_B Q^i) \arrow[d, "\partial^i"] \\
M\otimes_B Q^{i+1} \arrow[r, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & P^{i+1}\oplus(M\otimes_B Q^{i+1})
\end{tikzcd}$$

故 $\partial^{i}=\begin{pmatrix}d^{i}&0\\ \sigma^{i}&\mathrm{id}\otimes_{B}d'^{i}\end{pmatrix}$，其中 $\sigma^{i}:P^{i}\longrightarrow M\otimes_{B}\mathbf{Q}^{i+1}$，$i\geqslant 0$. 令

$$\mathbf{P}=\cdots\longrightarrow P^{-1}\xrightarrow{d^{-1}}P^{0}\xrightarrow{d^{0}}P^{1}\longrightarrow\cdots$$

易知每个 P^{i} 是投射 A-模. 则有复形的正合列 $0\longrightarrow M\otimes_{B}\mathbf{Q}\xrightarrow{\binom{0}{1}}\mathbf{V}\xrightarrow{(1,\,0)}\mathbf{P}\longrightarrow 0$，其中 $\mathbf{V}$ 正合. 由于 M 强相容，易知 $M\otimes_{B}\mathbf{Q}$ 正合，因此 $\mathbf{P}$ 正合. 于是有列正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M\otimes_B Y \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M\otimes_B Q^0 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes_B d'^0"] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & M\otimes_B Q^1 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes_B d'^1"] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "g"] & P^0\oplus(M\otimes_B Q^0) \arrow[r, "\partial^0"] \arrow[d, "(\mathrm{id},0)"] & P^1\oplus(M\otimes_B Q^1) \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[d, "(\mathrm{id},0)"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\,\varphi \arrow[d] & P^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & P^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

其中第一行和第二行是正合序列. 由五引理知 φ: $M\otimes_{B}X\longrightarrow Y$ 是单射. 根据蛇引理可以得到正合列

$$0\longrightarrow M\otimes_{B}Y\xrightarrow{\phi}X\xrightarrow{\pi}\mathrm{Ker}\,d^{0}\xrightarrow{\pi'}\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}\otimes_{B}d'^{1})\longrightarrow\mathrm{Im}\,\partial^{1}\longrightarrow\mathrm{Im}\,d^{1}\longrightarrow 0$$

而 $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}\otimes_{B}d'^{1})\longrightarrow\mathrm{Im}\,\partial^{1}$ 是单射，故连接同态 $\pi'=0$，因此 π 是满射，于是 $\mathrm{Ker}\,d^{0}\cong\mathrm{Coker}\,\varphi$. 对任意 $X'\in\mathscr{X}$，显然 $\begin{pmatrix}X'\\ 0\end{pmatrix}\in\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. 由函子 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是伴随对知 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}X'\\ 0\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_{A}(\mathbf{P},X')$，于是 $\mathrm{Hom}_{A}(\mathbf{P},X')$ 正合，故 $\mathbf{P}$ 是 A-模的 $\mathscr{X}$-完全投射分解，因此 $\mathrm{Coker}\,\varphi\cong\mathrm{Ker}\,d^{0}\in\mathscr{G}(\mathscr{X})$.

对任意的 $Y'\in\mathscr{Y}$，显然 $\begin{pmatrix}M\otimes_{B}Y'\\ Y'\end{pmatrix}\in\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，且有正合列

$$0\longrightarrow\begin{pmatrix}M\otimes_{B}Y'\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}M\otimes_{B}Y'\\ Y'\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0\\ Y'\end{pmatrix}\longrightarrow 0$$

用 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{L},-)$ 作用后得到正合列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}M\otimes_{B}Y'\\ 0\end{pmatrix}\right)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}M\otimes_{B}Y'\\ Y'\end{pmatrix}\right)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}0\\ Y'\end{pmatrix}\right)\longrightarrow 0$$

由函子 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是伴随对知 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}M\otimes_{B}Y'\\ 0\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_{A}(\mathbf{P},M\otimes_{B}Y')$. 由于 M 强相容，由引理 1 得 $\mathrm{Hom}_{A}(\mathbf{P},M\otimes_{B}Y')$ 正合. 故 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}0\\ Y'\end{pmatrix}\right)$ 正合. 由 $\mathrm{Hom}_{\Lambda}\left(\mathbf{L},\begin{pmatrix}0\\ Y'\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_{B}(\mathbf{Q},Y')$ 可得 $\mathrm{Hom}_{B}(\mathbf{Q},Y')$ 正合，故 $\mathbf{Q}$ 是 B-模的 $\mathscr{Y}$-完全投射分解. 因此 $Y\cong\mathrm{Ker}\,d'^{0}\in\mathscr{G}(\mathscr{Y})$.

(ii)$\Longrightarrow$(i)　由 (ii) 知 $Y \in \mathscr{G}(\mathscr{Y})$，故有 B- 模的正合序列

$$\boldsymbol{Q}' = \cdots \longrightarrow Q^{-1} \xrightarrow{d'^{-1}} Q^0 \xrightarrow{d'^0} Q^1 \xrightarrow{d'^1} \cdots$$

其中每个 Q^i 投射，$Y \cong \operatorname{Ker} d'^0$，并且对任意 $Y' \in \mathscr{Y}$，$\operatorname{Hom}_B(\boldsymbol{Q}', Y')$ 是正合序列. 而 M 是强相容的，可得 $M \otimes_B \boldsymbol{Q}'$ 正合. 特别地得到正合列

$$0 \longrightarrow M \otimes_B Y \longrightarrow M \otimes_B Q^0 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_B d'^0} M \otimes_B Q^1 \longrightarrow \cdots$$

由于 $\operatorname{Coker} \varphi \in \mathscr{G}(\mathscr{X})$，故有 A- 模的正合序列

$$\boldsymbol{P}' = \cdots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

其中每个 P^i 投射，$\operatorname{Coker} \varphi \cong \operatorname{Ker} d^0$，并且对任意 $X' \in \mathscr{X}$，$\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{P}', X')$ 是正合序列. 因此有正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} \varphi \longrightarrow P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \longrightarrow \cdots$$

因为 $\operatorname{Ker} d^i \in \mathscr{G}(\mathscr{X})$，$\mathscr{Y}$ 包含所有的投射 B- 模，由引理 1 可知对任意的 $i \geqslant 1$，有 $\operatorname{Ext}_A^1(\operatorname{Ker} d^i, M \otimes_B Q^i) = 0$. 而 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_\varphi \in \Lambda\text{-Mod}$ 且 φ 是单射，故有正合列 $0 \longrightarrow M \otimes_B Y \xrightarrow{\varphi} X \longrightarrow \operatorname{Coker} \varphi \longrightarrow 0$. 由引理 2 可以得到正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow P^0 \oplus (M \otimes_B Q^0) \xrightarrow{\partial^0} P^1 \oplus (M \otimes_B Q^1) \longrightarrow \cdots$$

其中 $\partial^i = \begin{pmatrix} d^i & 0 \\ \sigma^i & \mathrm{id} \otimes_B d'^i \end{pmatrix}$，$\sigma^i: P^i \longrightarrow M \otimes_B Q^i$，$i \geqslant 0$，使得下图可交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \otimes_B Y \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M \otimes_B Q^0 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes_B d'^0"] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & M \otimes_B Q^1 \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & P^0 \oplus (M \otimes_B Q^0) \arrow[r, "\partial^0"] & P^1 \oplus (M \otimes_B Q^1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对偶地可以得到以下行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M \otimes_B Q^{-2} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes_B d'^{-2}"] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & M \otimes_B Q^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] & M \otimes_B Y \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \oplus (M \otimes_B Q^{-2}) \arrow[r, "\partial^{-2}"] & P^{-1} \oplus (M \otimes_B Q^{-1}) \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

综上所述，可以得到投射 Λ- 模的正合列

$$\boldsymbol{L} = \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} P^{-1} \oplus (M \otimes_B Q^{-1}) \\ Q^{-1} \end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}} \xrightarrow{\binom{\partial^{-1}}{d'^{-1}}} \begin{pmatrix} P^0 \oplus (M \otimes_B Q^0) \\ Q^0 \end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}} \xrightarrow{\binom{\partial^0}{d'^0}} \begin{pmatrix} P^1 \oplus (M \otimes_B Q^1) \\ Q^1 \end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}} \xrightarrow{\binom{\partial^1}{d'^1}} \begin{pmatrix} P^2 \oplus (M \otimes_B Q^2) \\ Q^2 \end{pmatrix}_{\binom{0}{\mathrm{id}}} \longrightarrow \cdots$$

其中 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_\varphi \cong \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \partial^0 \\ d'^0 \end{pmatrix}$.

设 $\begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix}_\phi \in \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. 则有 Λ- 模的正合列 $0 \longrightarrow \begin{pmatrix} M \otimes_B H \\ H \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix}_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{Coker} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$，根据定义知 ϕ 是单射，$\operatorname{Coker} \phi \in \mathscr{X}$ 且 $H \in \mathscr{Y}$. 用 $\operatorname{Hom}_\Lambda(\boldsymbol{L}, -)$ 作用上序列后得到正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L}, \begin{pmatrix} M \otimes_B H \\ H \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L}, \begin{pmatrix} N \\ H \end{pmatrix}_\phi\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L}, \begin{pmatrix} \operatorname{Coker} \phi \\ 0 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow 0$$

用 $\operatorname{Hom}_\Lambda(\boldsymbol{L}, -)$ 作用正合列 $0 \longrightarrow \begin{pmatrix} M \otimes_B H \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{1}{0}} \begin{pmatrix} M \otimes_B H \\ H \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{0}{1}} \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} \longrightarrow 0$ 后得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} M\otimes_B H \\ 0\end{pmatrix}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} M\otimes_B H \\ H\end{pmatrix}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} 0 \\ H\end{pmatrix}\right) \longrightarrow 0$$

由 $\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} 0 \\ H\end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_B(\boldsymbol{Q}', H)$，可得 $\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} 0 \\ H\end{pmatrix}\right)$ 正合. 而

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} M\otimes_B H \\ 0\end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}', M\otimes_B H)$$

可得 $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}', M\otimes_B H)$ 正合. 所以 $\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} M\otimes_B H \\ H\end{pmatrix}\right)$ 正合. 由函子 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是伴随对知 $\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} \mathrm{Coker}\ \phi \\ 0\end{pmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{P}', \mathrm{Coker}\ \phi)$. 所以 $\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\boldsymbol{L},\begin{pmatrix} N \\ H\end{pmatrix}_\phi\right)$ 正合. 因此 $\boldsymbol{L}$ 是 Λ-模的 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-完全投射分解，即证得 $\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}_\varphi \in \mathscr{G}(\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$.

由定理1容易得到以下结论:

推论1[5-6]

(i) 设 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是有限生成投射 Λ-模的类，Λ 是 Artin 代数. 有限生成 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein 投射 Λ-模就是 Gorenstein 投射 Λ-模. 特别地，若 M_B 和 $_AM$ 是有限生成的，并且其投射维数有限，则有限生成 Λ-模 $\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}_\varphi$ 是 Gorenstein 投射模当且仅当 $\varphi: M\otimes_B Y \longrightarrow X$ 是单态射，Y 是 Gorenstein 投射 B-模且 $\mathrm{Coker}\ \varphi$ 是 Gorenstein 投射 A-模.

(ii) 设 $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是平坦 Λ-模的类. $\Phi(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein Λ-模就是 Ding 投射 Λ-模. 特别地，若 M_B 和 $_AM$ 的平坦维数有限，则 $\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}_\varphi$ 是 Ding 投射 Λ-模当且仅当 $\varphi: M\otimes_B Y \longrightarrow X$ 是单态射，Y 是 Ding 投射 B-模且 $\mathrm{Coker}\ \varphi$ 是 Ding 投射 A-模.

参考文献:

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1969.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Gorenstein Projective Modules [J]. Methematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.

[3] BENNIS D, OUARGHI K. $\mathscr{X}$-Gorenstein Projective Modules [J]. International Mathematical Forum, 2010, 5(10): 487-491.

[4] HAGHANY A, VARADARAJAN K. Study of Modules Over Formal Triangular Matrix Rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 147(1): 41-58.

[5] ZHANG P. Gorenstein-Projective Modules and Symmetric Recollements [J]. Journal of Algebra, 2013, 388: 65-80.

[6] MAO L X. Ding Modules and Dimensions Over Formal Triangular Matrix Rings [EB/OL]. [2020-12-25]. http://arXiv preprint arXiv: 1912.06968, 2019.

[7] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/2/3): 167-193.

[8] DING N, LI Y, MAO L X. Strongly Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 86(3): 323-338.

[9] FOSSUM R M, GRIFFITH P A, REITEN I. Trivial Extensions of Abelian Categories: Homological Algebra of Trivial Extensions of Abelian Catergories with Applications to Ring Theory [M]. New York: Springer, 2006.

责任编辑 廖 坤