DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.12.011

与高阶 Schrödinger-型算子相关的变分算子在 Herz-型空间的有界性

王晓燕[1]，赵 凯[2]

1. 青岛黄海学院 数学教学部，山东 青岛 266427；2. 青岛大学 数学与统计学院，山东 青岛 266071

摘要：设 $\mathscr{L}=(-\Delta)^2+V^2$ 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 5)$ 上的高阶 Schrödinger-型算子，其中非负位势 V 属于反向 Hölder 类 $RH_q\left(q>\dfrac{n}{2}\right)$. 记 $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ 为与高阶 Schrödinger-型算子 $\mathscr{L}$ 生成的热半群相关的变分算子，基于此类变分算子在 L^q 空间上有界的结果，应用 Herz-型 Hardy 空间的原子分解理论，以及 Schrödinger-型算子的性质，进行不等式的估计，证明了 $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ 是从 Herz-型 Hardy 空间到 Herz 空间的有界算子，也是 Morrey-Herz 空间上的有界算子.

关 键 词：变分算子；Schrödinger-型算子；Herz-型空间；有界性

中图分类号：O174.2 **文献标志码**：A

文 章 编 号：1673－9868(2021)12－0088－07 开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Boundedness of the Variation Operators Associated with High-Order Schrödinger-Type Operators on the Herz-Type Spaces

WANG Xiaoyan[1]， ZHAO Kai[2]

1. *Department of Mathematics, Qingdao Huanghai University, Qingdao Shandong 266427, China*;
2. *School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China*

Abstract: Let $\mathscr{L}=(-\Delta)^2+V^2$ be a high-order Schrödinger-type operator in $\mathbb{R}^n(n\geqslant5)$, where V is a non-negative potential satisfying the reverse Hölder inequality. Suppose that $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ is the variation operator associated with the high-order Schrödinger operator. Based on the boundedness of the variation operators on L^q spaces, and using the atomic decomposition of Herz-type Hardy spaces and the properties of the Schrödinger-type operators, the inequalities are estimated. The boundedness of the variation operators associated with the Schrödinger-type operators from Herz-type Hardy spaces into the Herz spaces is proved. The boundedness of the variation operators on Morrey-Herz spaces is also obtained.

Key words: variation operator; Schrödinger-type operator; Herz-type space; boundedness

---

收稿日期：2020－12－10

基金项目：山东省自然科学基金项目(ZR2020MA004)；国家自然科学基金项目(11471176，11871293).

作者简介：王晓燕，副教授，主要从事调和分析及其应用的研究.

通信作者：赵 凯，教授.

$\mathbb{R}^n$ 上的 Herz- 型空间和奇异积分算子及其交换子有界性的问题自 20 世纪 90 年代中后期以来得到了迅猛发展[1-9]. 微分算子的空间理论和奇异积分算子理论在 21 世纪取得了丰硕的成果，与微分算子相关的变分算子也受到了许多学者的关注[10-16]. 最近，文献[17] 讨论了 $\mathbb{R}^n$($n \geqslant 5$) 上的与高阶 Schrödinger- 型算子相关的一类变分算子在 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 空间的有界性问题，并得到了这类变分算子在一类与微分算子相关的 Morrey 空间上的有界性.

对于这类与高阶 Schrödinger- 型算子 $\mathscr{L}$ 生成的热半群相关的变分算子在函数空间上有界性的研究，我们的目的主要是建立此类变分算子在 Herz- 型空间上的有界性.

设非负位势 V 属于反向 Hölder 类 RH_q，$q > \dfrac{n}{2}$. $\mathbb{R}^n$($n \geqslant 5$) 上的微分算子 $\mathscr{L}=(-\Delta)^2+V^2$ 称为高阶 Schrödinger- 型算子，其中 Δ 是调和算子. 由算子 $\mathscr{L}$ 生成的热半群 $\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}$ 定义为

$$\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}} f(x)=\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{B}_t(x, y) f(y) \mathrm{d} y \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ t>0$$

这里热半群 $\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}$ 的核 $\mathscr{B}_t(x, y)$ 满足(其中 C 和 c_1 为常数)

$$|\mathscr{B}_t(x, y)| \leqslant C t^{-\frac{n}{4}} \mathrm{e}^{-c_1|x-y|^{\frac{4}{3}} t^{-\frac{1}{3}}} \tag{1}$$

定义 1[17]　设$\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$是正的单调减的趋于 0 的数列，令 $\rho>2$，与高阶 Schrödinger- 型算子 $\mathscr{L}$ 生成的热半群相关的变分算子定义为

$$V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}) f(x)=\sup_{t_i \rightarrow 0}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}|\mathrm{e}^{-t_i \mathscr{L}} f(x)-\mathrm{e}^{-t_{i+1} \mathscr{L}} f(x)|^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{2}$$

这里的上确界取遍所有正的单调减的趋于 0 的数列$\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

定义

$$\gamma(x)=\sup \left\{r>0: \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x, r)} V(y) \mathrm{d} y \leqslant 1\right\} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

引理 1[18]　设 $V \in RH_{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$，则存在常数 C 和 $k_0>1$，使得对于所有的 $x, y \in \mathbb{R}^n$，有

$$\frac{1}{C} \gamma(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\gamma(x)}\right)^{-k_0} \leqslant \gamma(y) \leqslant C \gamma(x)\left(1+\frac{|x-y|}{\gamma(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}} \tag{3}$$

特别地，当 $|x-y|<C\gamma(x)$ 时，$\gamma(x) \sim \gamma(y)$.

引理 2[17]　对任意 $N \in \mathbb{N}$，存在正常数 C, c_2 和 c_3，使得对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和 $0<t<\infty$，有：

(i) $|\mathscr{B}_t(x, y)| \leqslant C t^{-\frac{n}{4}}\left(1+\dfrac{\sqrt{t}}{\gamma^2(x)}+\dfrac{\sqrt{t}}{\gamma^2(y)}\right)^{-N} \mathrm{e}^{-c_2|x-y|^{\frac{4}{3}} t^{-\frac{1}{3}}}$；

(ii) $\left|\dfrac{\partial}{\partial t} \mathscr{B}_t(x, y)\right| \leqslant C t^{-\frac{n}{4}-1}\left(1+\dfrac{\sqrt{t}}{\gamma^2(x)}+\dfrac{\sqrt{t}}{\gamma^2(y)}\right)^{-N} \mathrm{e}^{-c_3|x-y|^{\frac{4}{3}} t^{-\frac{1}{3}}}$.

引理 3[17]　设 $V \in RH_{q_0}(\mathbb{R}^n)$，其中 $q_0 \in\left(\dfrac{n}{2}, \infty\right)$，$n \geqslant 5$，则对于 $\rho>2$，存在常数 $C>0$，使得

$$\|V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}) f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad f \in L^q(\mathbb{R}^n),\ 1<q<\infty \tag{4}$$

对于整数 k，记 $B_k=\{x \in \mathbb{R}^n:|x-x_0|<2^k\}$，$C_k=B_k \backslash B_{k-1}$，$\chi_k=\chi_{C_k}$. 有关齐型 Herz空间以及齐型 Herz- 型 Hardy 空间的概念和主要结论如下：

定义 2[2]　令 $-\infty<\alpha<\infty$，$0<p<\infty$，$0<q \leqslant \infty$. 则空间 $\mathbb{R}^n$ 上的齐型 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)=\{f \in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^n \backslash\{0\}):\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)}<\infty\}$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)}=\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k \alpha p}\|f \chi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

齐型 Herz-Hardy 空间定义为

$$H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)=\{f\in S'(\mathbb{R}^n):Gf\in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\}$$

其中 $Gf(x)=\sup\limits_{\varphi\in A_N}|\varphi_\nabla^*(f)|$，而 $A_N=\{\varphi\in S(\mathbb{R}^n):\sup\limits_{|\alpha|,|\beta|\leqslant N}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|\leqslant 1\}$，$N>n$.

定义 3[2]　令 $1<q<\infty$，$n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)\leqslant\alpha<\infty$，$s\geqslant\left[\alpha+n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)\right]$，$[\cdot]$ 表示取整函数. 若 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $a(x)$ 满足以下条件：

(ⅰ) $\operatorname{supp} a\subset B(x_0,r)$，$r>0$；

(ⅱ) $\|a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant|B(x_0,r)|^{-\frac{\alpha}{n}}$；

(ⅲ) $\int x^\sigma a(x)\mathrm{d}x=0$，$|\sigma|\leqslant s$.

则称 $a(x)$ 为中心 (α,q)- 原子.

引理 4[2]　设 $1<q<\infty$，$0<p<\infty$，令 $n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)\leqslant\alpha<\infty$. 则 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在原子列 $\{a_j\}$ 和数列 $\{\lambda_j\}$，使得 $f=\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}\lambda_j a_j$，且 $\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p<\infty$，其中 a_j 是支在球 B_j 上的中心 (α,q)- 原子. 进一步有

$$\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}^p=\inf\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p\right\}\tag{5}$$

这里的下确界取遍 f 的所有分解.

定义 4[3]　设 $\alpha\in\mathbb{R}$，$0<p<\infty$，$1<q<\infty$，$0\leqslant\lambda<\infty$，$\mathbb{R}^n$ 上的齐型 Morrey-Herz 空间 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ 定义为

$$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}):\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}<\infty\}$$

其中

$$\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{\nu\in\mathbb{Z}}2^{-\nu\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\nu}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

定理 1　设 $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ 是与高阶 Schrödinger- 型算子 $\mathscr{L}$ 相关的由(2)式定义的变分算子，令 $0<p<\infty$，$1<q<\infty$. 若 $V\in RH_{q_0}(\mathbb{R}^n)$，其中 $q_0\in\left(\dfrac{n}{2},\infty\right)$，$n\geqslant 5$，$\rho>2$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)\leqslant\alpha<N+n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ 时，变分算子 $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ 是从 Herz-Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 到 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子.

定理 2　设 $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ 是与高阶 Schrödinger- 型算子 $\mathscr{L}$ 相关的由(2)式定义的变分算子，令 $0<p<\infty$，$1<q<\infty$，$0<\lambda<\infty$. 若 $V\in RH_{q_0}(\mathbb{R}^n)$，其中 $q_0\in\left(\dfrac{n}{2},\infty\right)$，$n\geqslant 5$，$\rho>2$，则当 $\alpha<\lambda+n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ 时，变分算子 $V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})$ 是 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子.

定理 1 的证明　对任意 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$，由原子分解理论知，存在原子列 $\{a_j\}$ 和数列 $\{\lambda_j\}$，使得

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\lambda_j a_j(x)$$

其中 a_j 是中心 (α,q)- 原子，$\operatorname{supp} a_j\subset B_j$，且

$$\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\inf\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

则

$$\|V_\rho(e^{-t\mathscr{L}})f\|^p_{\dot K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\|(V_\rho(e^{-t\mathscr{L}})f)\chi_l\|^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\Big\{\sum_{j=-\infty}^{l+2}|\lambda_j|\,\|(V_\rho(e^{-t\mathscr{L}})a_j)\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big\}^p+$$

$$C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\Big\{\sum_{j=l+3}^{\infty}|\lambda_j|\,\|(V_\rho(e^{-t\mathscr{L}})a_j)\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big\}^p=I_1+I_2$$

对于 I_2，分为 $0<p\leqslant 1$ 和 $1<p<\infty$ 两种情况进行讨论：

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由引理 3、Jensen 不等式以及原子的大小条件，有

$$I_2\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\sum_{j=l+3}^{\infty}|\lambda_j|^p\|a_j\|^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\sum_{j=l+3}^{\infty}|\lambda_j|^p|B_j|^{-\frac{p\alpha}{n}}=C\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p\sum_{l=-\infty}^{j-3}2^{(l-j)\alpha p}=C\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p$$

当 $1<p<\infty$ 时，由引理 3、Hölder 不等式和原子的大小条件，可得

$$I_2\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\Big\{\sum_{j=l+3}^{\infty}|\lambda_j|^p\|a_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big\}^p\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\Big\{\sum_{j=l+3}^{\infty}|\lambda_j|^p2^{\frac{(l-j)\alpha p}{2}}\Big\}\Big\{\sum_{j=l+3}^{\infty}2^{\frac{(l-j)\alpha p'}{2}}\Big\}^{\frac{p}{p'}}\leqslant$$

$$C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=l+3}^{\infty}|\lambda_j|^p2^{\frac{(l-j)\alpha p}{2}}\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p\sum_{l=-\infty}^{j-3}2^{\frac{(l-j)\alpha p}{2}}\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p$$

对于 I_1，注意到 $j\leqslant l+2$，$x\in C_l$，$y\in B_j$，则 $x\in\mathbb{R}^n\backslash 2B_j$，$|x-y|\geqslant\frac{1}{2}|x-x_0|$. 因此，分成 $|x-x_0|\leqslant\gamma(x_0)$ 和 $|x-x_0|>\gamma(x_0)$ 两种情况讨论.

当 $|x-x_0|\leqslant\gamma(x_0)$ 时，由引理 2 知

$$V_\rho(e^{-t\mathscr{L}})(a_j)(x)\leqslant\sup_{t_i\to 0}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{B}_{t_i}(x,y)-\mathscr{B}_{t_{i+1}}(x,y))a_j(y)\mathrm{d}y\Big|^\rho\Big)^{\frac{1}{\rho}}\leqslant$$

$$C\sup_{t_i\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_{t_{i+1}}^{t_i}\Big|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\Big|\mathrm{d}t\mathrm{d}y\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_0^\infty\Big|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\Big|\mathrm{d}t\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_0^{|x-x_0|^4}\Big|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\Big|\mathrm{d}t\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_{|x-x_0|^4}^{\infty}\Big|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\Big|\mathrm{d}t\mathrm{d}y\Big)\leqslant$$

$$C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_0^{|x-x_0|^4}t^{-\frac{n}{4}-1}e^{-c_3(|x-x_0|t^{-\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}t\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_{|x-x_0|^4}^{\infty}t^{-\frac{n}{4}-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\Big)\leqslant$$

$$C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\int_0^{|x-x_0|^4}t^{-\frac{n}{4}-1}\Big(\frac{t^{\frac{1}{3}}}{|x-x_0|^{-\frac{4}{3}}}\Big)^{\frac{3(n+4)}{4}}\mathrm{d}t\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n}|x-x_0|^{-n}|a_j(y)|\mathrm{d}y\Big)\leqslant$$

$$C|x-x_0|^{-n}\Big(1+\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\Big)^{-N_1}\int_{\mathbb{R}^n}|a_j(y)|\mathrm{d}y$$

所以，由 Hölder 不等式以及原子的大小条件，得

$$\|V_\rho(e^{-t\mathscr{L}})(a_j)\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\Big\{\int_{C_l}|x-x_0|^{-nq}\Big(1+\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\Big)^{-qN_1}\Big(\int_{B_j}|a_j(y)|\mathrm{d}y\Big)^q\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$C\Big\{\int_{C_l}|x-x_0|^{-nq}\Big(1+\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\Big)^{-qN_1}\Big(\int_{B_j}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{q}{q'}}\Big(\int_{B_j}|a_j(y)|^q\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$C2^{-(l-j)n\left(1-\frac{1}{q}\right)}2^{-(l-j)N_1}\|a_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C2^{-(l-j)\left(n\left(1-\frac{1}{q}\right)+N_1\right)}2^{-j\alpha}$$

从而

$$I_1\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2^{l\alpha p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{l+2}|\lambda_j|2^{-(l-j)\left(n\left(1-\frac{1}{q}\right)+N_1\right)}2^{-j\alpha}\Big)^p$$

取 $N_1 > \alpha - n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$，则当 $0 < p \leqslant 1$ 时，由 Jensen 不等式有

$$I_1 \leqslant C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{l+2} |\lambda_j|^p 2^{-(l-j)\left(N_1 + n\left(1-\frac{1}{q}\right) - \alpha\right)p} \leqslant$$

$$C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \sum_{l=j-2}^{+\infty} 2^{-(l-j)\left(N_1 + n\left(1-\frac{1}{q}\right) - \alpha\right)p} \leqslant C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p$$

当 $1 < p < \infty$ 时，由 Hölder 不等式可得

$$I_1 \leqslant C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{j=-\infty}^{l+2} |\lambda_j|^p 2^{-(l-j)\left(N_1 + n\left(1-\frac{1}{q}\right) - \alpha\right)\frac{p}{2}}\Big)\Big(\sum_{j=-\infty}^{l+2} 2^{-(l-j)\left(N_1 + n\left(1-\frac{1}{q}\right) - \alpha\right)\frac{p'}{2}}\Big)^{\frac{p}{p'}} \leqslant$$

$$C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \sum_{l=j-2}^{+\infty} 2^{-(l-j)\left(N_1 + n\left(1-\frac{1}{q}\right) - \alpha\right)\frac{p}{2}} \leqslant C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p$$

当 $|x - x_0| > \gamma(x_0)$ 时，由定义 1 和引理 2，并应用(3)式，得

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|^4}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\right| \mathrm{d}t &\leqslant C\int_{|x-x_0|^4}^{+\infty} t^{-\frac{n}{4}-1}\left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\gamma^2(x)}\right)^{-N_2} \mathrm{e}^{-c_3\left(|x-x_0|t^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}} \mathrm{d}t \leqslant \\
& C\left(1 + \frac{|x-x_0|^2}{\gamma^2(x)}\right)^{-N_2} |x-x_0|^{-n} \leqslant \\
& C\left(1 + c_0^{-1}\left(\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^2 \left(1 + \frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{\frac{-2k_0}{k_0+1}}\right)^{-N_2} |x-x_0|^{-n} \leqslant \\
& C\left(1 + \frac{|x-x_0|}{\gamma^2(x_0)}\right)^{-N_3} |x-x_0|^{-n}
\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $N_3 = \left[\frac{N_2(k_0-1)}{k_0+1}\right]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{|x-x_0|^4} \left|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\right| \mathrm{d}t &\leqslant C\int_0^{\gamma^4(x_0)} t^{-\frac{n}{4}-1} \mathrm{e}^{-c_3\left(|x-x_0|t^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}} \mathrm{d}t + \int_{\gamma^4(x_0)}^{|x-x_0|^4} t^{-\frac{n}{4}-1} \mathrm{e}^{-c_3\left(|x-x_0|t^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}} \mathrm{d}t \leqslant \\
& C\int_{\left(\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{\frac{4}{3}}}^{+\infty} |x-x_0|^{-n} u^{\frac{3n}{4}-1} \mathrm{e}^{-c_3 u} \mathrm{d}u + C\gamma^{-n-4}(x_0)\mathrm{e}^{-c_3\left(\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{\frac{4}{3}}} |x-x_0|^4 \leqslant \\
& C|x-x_0|^{-n}\mathrm{e}^{-c\left(\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{\frac{4}{3}}} + C|x-x_0|^{-n}\mathrm{e}^{-c_3\left(\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{n+4} \leqslant \\
& C\left(1 + \frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{-N_4} |x-x_0|^{-n}
\end{aligned} \tag{7}$$

选择适当的 N_2, N_4 为同一个 N，使得(6)式和(7)式同时成立，且 $N > \alpha - n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$，则有

$$\begin{aligned}
\| V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})(a_j)\chi_l \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leqslant C\left\{\int_{C_l} |x-x_0|^{-nq}\left(1 + \frac{|x-x_0|}{\gamma(x_0)}\right)^{-qN}\left(\int_{B_j} |a_j(y)| \mathrm{d}y\right)^q \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \\
& C 2^{-(l-j)\left(n\left(1-\frac{1}{q}\right)+N\right)} 2^{-j\alpha}
\end{aligned}$$

同理，可以得到

$$I_1 \leqslant C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{j=-\infty}^{l+2} |\lambda_j| 2^{-(l-j)\left(N + n\left(1-\frac{1}{q}\right) - \alpha\right)}\Big)^p \leqslant C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p$$

因此

$$\| V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})f \|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| f \|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}$$

至此，完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明　对任意 $f \in M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$，令 $f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f\chi_j(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x)$. 则有

$$\|V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^p=\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\|(V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}))f\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \leqslant$$

$$C\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\left\{\sum_{j=-\infty}^{l+2}\|(V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}))f_j\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right\}^p+$$

$$C\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\left\{\sum_{j=l+3}^{+\infty}\|(V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}}))f_j\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right\}^p=J_1+J_2$$

对于 J_2，由引理 3，即变分算子的 L^q 有界性，有

$$J_2\leqslant C\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\Big(\sum_{j=l+3}^{\infty}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big)^p$$

再由不等式

$$\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant 2^{-j\alpha}\left\{\sum_{i=-\infty}^{j}2^{i\alpha p}\|f_i\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant 2^{j(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \tag{8}$$

并注意到 $\alpha>\lambda$，可以得到

$$J_2\leqslant C\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\Big(\sum_{j=l+3}^{\infty}2^{j(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\Big)^p\leqslant$$

$$C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^p\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\lambda p}\Big(\sum_{j=l+3}^{\infty}2^{(j-l)(\lambda-\alpha)}\Big)^p\leqslant$$

$$C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^p\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\lambda p}\leqslant$$

$$C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^p$$

对于 J_1，同样有 $j\leqslant l+2$，$x\in C_l$，$y\in B_j$，则 $x\in\mathbb{R}^n\backslash 2B_j$，$|x-y|\geqslant\frac{1}{2}|x-x_0|$. 因此

$$V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})(f_j)(x)\leqslant C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(y)|\int_0^{|x-x_0|^4}\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(y)|\int_{|x-x_0|^4}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_t(x,y)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\Big)\leqslant$$

$$C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(y)|\int_0^{|x-x_0|^4}t^{-\frac{n}{4}-1}(|x-x_0|^{-\frac{4}{3}}t^{\frac{1}{3}})^{\frac{3(n+4)}{4}}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(y)|\int_{|x-x_0|^4}^{\infty}t^{-\frac{n}{4}-1}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\Big)\leqslant$$

$$C|x-x_0|^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j(y)|\,\mathrm{d}y$$

所以得到

$$\|V_\rho(\mathrm{e}^{-t\mathscr{L}})(f_j)\chi_l\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\left\{\int_{C_l}|x-x_0|^{-nq}\Big(\int_{B_j}|f_j(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^q\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$C2^{-(l-j)n\left(1-\frac{1}{q}\right)}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

这样

$$J_1\leqslant C\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\Big(\sum_{j=l+3}^{\infty}2^{-(l-j)n\left(1-\frac{1}{q}\right)}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\Big)^p$$

同样，再由不等式(8)，并注意到 $\alpha<\lambda+n\left(1-\frac{1}{q}\right)$，得

$$J_1\leqslant C\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\alpha p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{l+2}2^{-(l-j)n\left(1-\frac{1}{q}\right)}2^{j(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}\Big)^p\leqslant$$

$$C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)}^p\sup_{v\in\mathbb{Z}} 2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v} 2^{l\lambda p}\Big(\sum_{j=-\infty}^{l+2}2^{-(l-j)\left(\lambda+n\left(1-\frac{1}{q}\right)-\alpha\right)}\Big)^p\leqslant$$

$$C\|f\|^p_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\sup_{v\in\mathbb{Z}}2^{-v\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{v}2^{l\lambda p}\leqslant C\|f\|^p_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

这就完成了定理2的证明.

参考文献:

[1] LU S Z, YANG D C. The Weighted Herz-Type Hardy Spaces and Its Applications [J]. Science in China, 1995, 38(6): 662-673.

[2] LU S Z, YANG D C, HU G E. Herz Type Spaces and Their Applications [M]. Beijing: Science Press, 2008.

[3] LU S Z, XU L F. Boundedness of Rough Singular Integral Operators on the Homogeneous Morrey-Herz Spaces [J]. Hokkaido Mathematical Journal, 2005, 34(2): 299-314.

[4] 李 睿, 陶双平. 多线性奇异积分算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(10): 62-67.

[5] 陶双平, 刘钰琦. 变量核齐次分数次积分在 Morrey 空间上的估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(12): 52-58.

[6] 周 盼, 周 疆. 多线性分数次积分算子在 Morrey 型空间上新的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(12): 74-80.

[7] 郭庆栋, 周 疆. 分数次 Hardy 算子的交换子在 Lipschitz 空间上的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(8): 41-47.

[8] 赵 欢, 周 疆. 带变量核的分数次积分交换子在变指数 Herz-Morrey 空间上的有界性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(6): 11-16.

[9] 张振荣, 赵 凯. 非齐度量测度空间上广义分数次积分算子交换子的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(8): 88-96.

[10] DUONG X, YAN L X. Duality of Hardy and BMO Spaces Associated with Operators with Heat Kernel Bounds [J]. Journal of the American Mathematical Society, 2005, 18(4): 943-973.

[11] DUONG X T, YAN L X. New Function Spaces of BMO Type, the John-Niremberg Inequality, Interpolation, and Applications [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2005, 58(10): 1375-1420.

[12] JIANG R J, YANG D C. New Orlicz-Hardy Spaces Associated with Divergence Form Elliptic Operators [J]. Journal of Functional Analysis, 2010, 258(4): 1167-1224.

[13] HOFMANN S, LU G Z, MITREA D, et al. Hardy Spaces Associated to Non-Negative Self-Adjoint Operators Satisfying Davies-Gaffney Estimates [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2011, 214(1007): 78.

[14] CAO J, LIU Y, YANG D C. Hardy Spaces $H^1_L(\mathbb{R}^n)$ Associated to Schrödinger Type Operators $(-\Delta)^2+V^2$ [J]. Houston Journal of Mathematics, 2010, 36(4): 1067-1095.

[15] LIU Y, DONG J F. Some Estimates of Higher Order Riesz Transform Related to Schrödinger Type Operators [J]. Potential Analysis, 2009, 32(1): 41-55.

[16] LIU Y, ZHANG J, SHENG J L, et al. Some Estimates for Commutators of Riesz Transform Associated with Schrödinger Type Operators [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2016, 66(1): 169-191.

[17] LIU S Y, ZHANG C. Boundedness of Variation Operators Associated with the Heat Semigroup Generated by the High Order Schrödinger Type Operators [J]. Acta Mathematical Scientia, 2020, 40(5): 1215-1228.

[18] SHEN Z W. L^p Estimates for Schrödinger Operators with Certain Potentials [J]. Annales De I'Institut, 1995, 45(2): 513-546.

责任编辑 廖 坤