DOI: 10. 13718/j. cnki. xdzk. 2021. 12. 021

考虑弯曲刚度的索桥耦合系统振动特征分析

闵光云¹, 刘小会^{1,2}, 刘菊芳¹, 孙测世^{1,2}, 蔡萌琦³

1. 重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074;

2. 重庆交通大学省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室,重庆400074;

3. 成都大学 建筑与土木工程学院,成都 610106

摘要:本文建立了拉索一桥面耦合的非线性振动模型,求解了该耦合共振模型的位移响应,还考虑了弯曲刚度对 拉索位移响应的影响.首先通过哈密顿变分准则求得了拉索的振动方程,接着以动张力为媒介求得了拉索一桥面 耦合模型的振动方程,基于 Galerkin 法将该振动方程转化为常微分方程,利用多尺度法分析了该常微分方程的共 振模式,并介绍了四阶龙格-库塔(Runge-Kutta)方法的计算原理,最后通过数值算例对该微分方程进行了系统地分 析.算例分析表明:拉索面内、面外、桥面之间的耦合显著,拉索面内的振动位移远大于面外的摆动位移;针对小 直径拉索动力学分析时,可忽略弯曲刚度对拉索振动特征的影响,但针对特大直径拉索动力学分析时,需考虑弯曲 刚度对拉索振动特征的影响;对于小跨径、小张力拉索,弯曲刚度不会改变拉索共振的性质,但会使得拉索发生共 振的条件具有向左偏移的趋势,且面内偏移的趋势不明显,但面外偏移的趋势很显著;对于大跨径、大张力的拉 索,可忽略弯曲刚度对拉索发生共振条件的影响.

关键词:拉索;耦合;共振;多尺度法;位移响应
 中图分类号: 0322; U441.3
 文献标志码: A
 文章编号: 1673 - 9868(2021)12 - 0180 - 11



开放科学(资源服务)标识码(OSID):

Analysis of the Vibration Characteristics of the Cable Bridge Coupling System with Bending Stiffness Considered

MIN Guangyun¹, LIU Xiaohui^{1,2}, LIU Jufang¹, SUN Ceshi^{1,2}, CAI Mengqi³

1. School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

 State Key Laboratory of Bridge and Tunnel Engineering in Mountainous Areas, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

3. School of Architecture and Civil Engineering, Chengdu University, Chengdu 610106, China

Abstract: In this paper, a nonlinear vibration model of cable and bridge coupling is established, the displacement response of the model is solved, and the influences of bending stiffness on the displacement re-

收稿日期: 2020-08-23

基金项目:国家自然科学基金项目(51308570;51808085;51507106);重庆市研究生科研创新项目(CYS19240);重庆市创新训练项目 (S201910618016);重庆市科委基础科学与前沿技术研究项目(cstc2017jcyjAX0246);成都市国际科技合作资助项目(2020-GH02-00059-HZ).

作者简介: 闵光云,硕士研究生,主要从事柔性结构动力学分析的研究.

通信作者: 刘小会,博士,副教授.

sponse of the cable are considered. Firstly, the vibration equation of the stay-cable is obtained by the Hamiltonian variational principle. Then, the vibration equation of the cable and bridge coupling model is obtained with dynamic tension as the medium. Based on the Galerkin method, the vibration equation is transformed into an ordinary differential equation, the common vibration mode of this ordinary differential equation is analyzed with the multiple scales method, and the four-order Runge-Kutta method is described. Finally, the vibration equation is systematically analyzed with a numerical example. The results show that the coupling between in-plane and out-of-plane of cable and bridge is significant, and in-plane vibration displacement of cable is far greater than out-of-plane swing displacement of cable; that for the dynamic analysis of small-diameter cables, the influences of bending stiffness on vibration characteristics of cable analysis of large-diameter cables, the influences of bending stiffness on vibration characteristics of cable should be considered; that for small-span and small-tension cables, the bending stiffness does not change the nature of their resonance, but the conditions of resonance tend to have a left deviation, and the trend of in-plane displacement is not obvious, but the trend of out-of-plane displacement is significant; and that for the long-span and large-tension cables, the influences of bending stiffness on the condition of resonance of cable can be ignored.

Key words: cable; coupling; resonance; multiple scales method; displacement response

拉索的振动具有强烈的几何非线性特点,长时间的振动可能导致桥梁断裂、拱结构倒塌,进而造成人员伤亡、危害国民经济^[1-3].拉索的非线性动力学研究,起源于16世纪,成形于18世纪中期^[2].同时,拉索 也是应用力学学科研究的基本元素,是分析各种动力学现象的经典模型,在土木工程中,拉索可能存在面 内振动和面外摆动的耦合内共振现象^[4],也可能存在拉索一梁组合模型之间相互耦合共振的现象^[5],还可 能存在拉索一拱组合模型之间相互耦合共振的现象^[6].

20世纪末期, Irvine 系统地研究拉索的模态、频率,给出了拉索各模态之间可能发生耦合共振的条件 并提出了重要的 Irvine 系数,该参数是与拉索几何参数有关的重要参数,对拉索动力学特征分析起着尤为 重要的作用^[7].1992年, Perkins 等利用一阶摄动分析方法,研究了由参数激励和强迫激励引起的拉索面 内和面外周期运动的存在性和稳定性,分析了稳定分岔条件.结果表明,当拉索面内的自振频率与面外的 自振频率之间满足 2:1关系时,面内的稳定性会降低,面外的稳定性会增强^[8].2009年,Wang 等利用多 尺度法研究了具有多个内共振的拉索的非线性响应,得到拉索的平均方程和近似解.利用频率—响应曲线 和激励—响应曲线分析了平均方程及其稳定性,还分析了激励幅值对拉索的频率—响应曲线的影响^[9]. 2018年,Zhao等研究了双频激励下温度对悬索非线性振动特性的影响,研究发现,温度变化对软化或硬化 型弹簧的性能、响应幅值、共振范围、分支交叉和分支数目、稳态解的数目和相位都有影响^[10-11].

针对拉索的非线性振动特征分析,许多文献都忽略了弯曲刚度的影响.实际工程中,拉索的弯曲刚度 随着其直径的增大而增大,且弯曲刚度会影响拉索的自振频率,进而可能导致拉索的振动性质发生改变, 因此,研究特大直径斜拉索的振动特征时忽略弯曲刚度可能并不合理.为此,吴庆雄等推导了考虑弯曲刚 度影响的拉索面内、面外耦合振动的理论公式,接着采用有限差分法验证了该公式的正确性^[12].赵跃宇等 研究了弯曲刚度对拉索面内、面外的1阶固有频率及高阶固有频率的影响,研究结果表明,弯曲刚度对面 外固有频率的影响大于面内,弯曲刚度对固有频率的影响随着模态函数阶次的增加而增大^[13].吕建根等在 文献[13]的基础上进一步研究了弯曲刚度对拉索面内、面外内共振的影响,获得了有意义的结论^[14].

本文将桥面简化为一个质量块,建立了索桥耦合动力学模型,将该耦合动力学模型分解为一个强迫振动模型与一个参数振动模型,针对参数振动模型进行了系统的动力学分析,研究了拉索面内、面外的耦合 内共振,且进一步分析了弯曲刚度对拉索振动特征的影响,得出了一些有价值的结论,能给实际工程提供 一些理论指导.

1 索桥耦合振动模型

首先建立索桥耦合振动模型,如图1所示,图1(a)为整体模型,其可分离为一个强迫振动模型图1(b)

与一个参数振动模型图 1(c),本文的研究对象仅针对图 1(c),即只分析索桥耦合系统的参数振动.本文只考虑拉索的抗弯刚度,忽略了扭转刚度与剪切刚度对拉索振动特征的影响,且认为拉索在重力作用下的静态平衡构型为抛物线.为便于推导拉索面内、面外的耦合非线性振动方程,首先建立笛卡尔坐标系,拉索的跨径方向设为 *x* 轴, *y* 轴正方向垂直于 *x* 轴向下, *z* 轴正方向垂直于重力平面向内.



图 1 索桥耦合振动模型

图 1 中 v 表示拉索的 y 轴方向的动态位移, X 表示桥面的滑动位移, K 为桥面的刚度, C 为桥面的阻 尼, θ 为斜拉索的倾角, 且本文用 u 表示拉索 x 轴方向的动态位移, w 表示拉索 z 轴方向的动态位移. 由哈密顿变分原理可得

$$\int \delta k^{\nu} - \int \delta \prod + \int \delta w' = 0 \tag{1}$$

式(1) 中 δk^{v} 为拉索的动能, $\delta \prod$ 为拉索的势能, $\delta w'$ 为拉索所受非保守力做功.

根据式(1)可得

$$(H+\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
(2)

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
(3)

式(3) 中 H 表示拉索的初始张力, EI 为拉索的弯曲刚度, m 为拉索的单位质量, τ 为拉索的动张力, 且其表达式为

$$\tau = EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right)$$
(4)

式(4) 中 EA 为拉索的拉伸刚度.

在本文建立的参数振动模型下,动张力 τ 不仅与拉索的初始垂度等几何非线性因数有关,还与桥面的 滑动位移有关.考虑桥面的滑动位移,且忽略拉索轴向的位移,式(4)可转变为

$$\check{\tau} = \frac{EA}{l} \int_{0}^{l} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^{2} \right] + \frac{X}{l} \right) \mathrm{d}x$$
(5)

式(5) 中 l 为拉索的跨径.

将式(5)代入式(2)中可得

$$\left(H + \frac{EA}{l} \int_{0}^{l} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2} \right] + \frac{X}{l} \right) \mathrm{d}x \right) \frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}} + \frac{EA}{l} \int_{0}^{l} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2} \right] + \frac{X}{l} \right) \mathrm{d}x \frac{\partial^{2} y}{\partial x^{2}} - EI \frac{\partial^{4} v}{\partial x^{4}} = m \frac{\partial^{2} v}{\partial t^{2}}$$
(6)

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{EA}{l} \int_{0}^{l} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{X}{l} \right) \mathrm{d}x \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - EI \ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = m \ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{7}$$

拉索的振动特征主要受其一阶模态的影响,因此根据一阶模态叠加法可将动态位移 v 和 w 分别表示为

$$v(x, t) = \varphi_1(x)q_1(t)$$
(8)

$$w(x, t) = \varphi_2(x)q_2(t) \tag{9}$$

式(8)和式(9)中, φ_1 , φ_2 表示振型函数, q_1 , q_2 表示振动函数.

将式(8) 和式(9) 代入式(7) 且使用 Galerkin 法可得

$$\widetilde{\eta}_1 q_1 + \widetilde{\eta}_2 q_1^2 + \widetilde{\eta}_3 q_2^2 + \widetilde{\eta}_4 q_1^3 + \widetilde{\eta}_5 q_1 q_2^2 + \widetilde{\eta}_6 q_1 X + \widetilde{\eta}_7 X = \widetilde{\eta}_8 \widetilde{q}_1 + \widetilde{\eta}_9 \widetilde{q}_1$$

$$(10)$$

$$\hat{\vartheta}_{1}q_{2} + \hat{\vartheta}_{2}q_{1}q_{2} + \hat{\vartheta}_{3}q_{1}^{2}q_{2} + \hat{\vartheta}_{4}q_{2}^{3} + \hat{\vartheta}_{5}q_{2}X = \hat{\vartheta}_{6}q_{2} + \hat{\vartheta}_{7}q_{2}$$
(11)

式(7)中"•"为时间 t 的一阶导数,其他系数表达式为

$$\begin{split} \widetilde{\eta}_{1} &= \int_{0}^{l} H\varphi_{1}^{"}\varphi_{1} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{l}\int_{0}^{l} y'\varphi_{1}' \, \mathrm{d}x\right) y''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x - \int_{0}^{l} EI\varphi_{1}^{(4)}\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\eta}_{2} &= \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{l}\int_{0}^{l} y'\varphi_{1}' \, \mathrm{d}x\right) \varphi_{1}^{"}\varphi_{1} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{2l}\int_{0}^{l} \varphi_{1}^{'2} \, \mathrm{d}x\right) y''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\eta}_{3} &= \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{2l}\int_{0}^{l} \varphi_{2}^{'2} \, \mathrm{d}x\right) y''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \qquad \widetilde{\eta}_{4} = \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{2l}\int_{0}^{l} \varphi_{1}^{'2} \, \mathrm{d}x\right) \varphi_{1}''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\eta}_{5} &= \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{2l}\int_{0}^{l} \varphi_{2}^{'2} \, \mathrm{d}x\right) \varphi_{1}''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \qquad \widetilde{\eta}_{6} = \int_{0}^{l} \frac{EA}{l} \varphi_{1}''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\eta}_{7} &= \int_{0}^{l} \frac{EA}{l} y''\varphi_{1} \, \mathrm{d}x \qquad \widetilde{\eta}_{8} = \int_{0}^{l} m\varphi_{1}^{2} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\vartheta}_{1} &= \int_{0}^{l} H\varphi_{2}''\varphi_{2} \, \mathrm{d}x - \int_{0}^{l} EI\varphi_{2}^{(4)}\varphi_{2} \, \mathrm{d}x \qquad \widetilde{\vartheta}_{2} = \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{l}\int_{0}^{l} y'\varphi_{1}' \, \mathrm{d}x\right) \varphi_{2}''\varphi_{2} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\vartheta}_{3} &= \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{2l}\int_{0}^{l} \varphi_{1}'^{2} \, \mathrm{d}x\right) \varphi_{2}''\varphi_{2} \, \mathrm{d}x \qquad \widetilde{\vartheta}_{4} = \int_{0}^{l} \left(\frac{EA}{2l}\int_{0}^{l} \varphi_{2}'^{2} \, \mathrm{d}x\right) \varphi_{2}''\varphi_{2} \, \mathrm{d}x \\ \widetilde{\vartheta}_{5} &= \int_{0}^{l} \frac{EA}{l} \varphi_{2}''\varphi_{2} \, \mathrm{d}x \qquad \widetilde{\vartheta}_{6} = \int_{0}^{l} m\varphi_{2}^{'2} \, \mathrm{d}x$$

根据牛顿第二定律可得桥面的振动方程为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX + \frac{EA}{l} \left\{ \int_{0}^{l} y' v' \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^{2} \right] \mathrm{d}x + X \right\} = 0$$
(12)

将式(8)和式(9)代入式(12)可得

$$\tilde{v}_{1}X + \tilde{v}_{2}q_{1} + \tilde{v}_{3}q_{1}^{2} + \tilde{v}_{4}q_{2}^{2} = \tilde{v}_{5}\ddot{X} + \tilde{v}_{6}\dot{X}$$
(13)

式(13)中的系数表达式为

$$\widetilde{v}_{1} = K + \frac{EA}{l} \qquad \widetilde{v}_{2} = \frac{EA}{l} \int_{0}^{l} y' \varphi'_{1} dx$$
$$\widetilde{v}_{3} = \frac{EA}{2l} \int_{0}^{l} \varphi'_{1}^{2} dx \qquad \widetilde{v}_{4} = \frac{EA}{2l} \int_{0}^{l} \varphi'_{2}^{2} dx$$
$$\widetilde{v}_{5} = -M \qquad \widetilde{v}_{6} = -C$$

联立式(10)和式(11)与式(13)且考虑拉索的黏性阻尼可得斜拉索一桥耦合参数振动方程组,即

$$\begin{split} \widetilde{\eta}_{1}q_{1} + \widetilde{\eta}_{2}q_{1}^{2} + \widetilde{\eta}_{3}q_{2}^{2} + \widetilde{\eta}_{4}q_{1}^{3} + \widetilde{\eta}_{5}q_{1}q_{2}^{2} + \widetilde{\eta}_{6}q_{1}X + \widetilde{\eta}_{7}X = \widetilde{\eta}_{8} \ddot{q}_{1} + \widetilde{\eta}_{9} \dot{q}_{1} \\ \widetilde{\vartheta}_{1}q_{2} + \widetilde{\vartheta}_{2}q_{1}q_{2} + \widetilde{\vartheta}_{3}q_{1}^{2}q_{2} + \widetilde{\vartheta}_{4}q_{2}^{3} + \widetilde{\vartheta}_{5}q_{2}X = \widetilde{\vartheta}_{6} \ddot{q}_{2} + \widetilde{\vartheta}_{7} \dot{q}_{2} \end{split}$$
(14)
$$\widetilde{\upsilon}_{1}X + \widetilde{\upsilon}_{2}q_{1} + \widetilde{\upsilon}_{3}q_{1}^{2} + \widetilde{\upsilon}_{4}q_{2}^{2} = \widetilde{\upsilon}_{5} \ddot{X} + \widetilde{\upsilon}_{6} \dot{X}$$

式(14) 中"••"为时间 t 的二阶导数, $\tilde{\eta}_{9} = \int_{0}^{t} \xi_{v} \varphi_{2}^{2} dx$, $\tilde{\vartheta}_{7} = \int_{0}^{t} \xi_{w} \varphi_{2}^{2} dx$, $\xi_{v} \pi \xi_{w} \beta B \beta_{v} y$ 轴和z 轴方向的黏性 阻尼系数.

阻尼示数,

2 摄动分析

近几十年来,随着学者们的不断努力,非线性振动领域蓬勃发展,进一步完善了多种非线性定量 分析方法,例如多尺度法、平均法、渐进法等.多尺度法具有较高的精度,且非常适用于弱非线性系 统的振动特征分析,因此本文亦选择多尺度法^[13-17].为方便多尺度法的运用,需对公式(14)进行处 理,即将式(14)转变为

$$\begin{pmatrix}
\ddot{x}_{1} + \omega_{1}^{2}x_{1} = \varepsilon (o_{1}\dot{x}_{1} + o_{2}x_{1}^{2} + o_{3}x_{2}^{2} + o_{4}x_{1}^{3} + o_{5}x_{1}x_{2}^{2} + o_{6}x_{1}x_{3} + o_{7}x_{3}) \\
\vdots \\
\dot{x}_{2} + \omega_{2}^{2}x_{2} = \varepsilon (\nu_{1}\dot{x}_{2} + \nu_{2}x_{1}x_{2} + \nu_{3}x_{1}^{2}x_{2} + \nu_{4}x_{2}^{3} + \nu_{5}x_{2}x_{3}) \\
\vdots \\
\dot{x}_{3} + \omega_{3}^{2}x_{3} = \varepsilon (\delta_{1}\dot{x}_{3} + \delta_{2}x_{1} + \delta_{3}x_{1}^{2} + \delta_{4}x_{2}^{2})$$
(15)

式(15)中 ε为无量纲的小参数,其他系数表达式分别为

$$\omega_1^2 = -\tilde{\eta}_1/\tilde{\eta}_8, \ o_1 = -\tilde{\eta}_9/\tilde{\eta}_8, \ o_2 = \tilde{\eta}_2/\tilde{\eta}_8, \ o_3 = \tilde{\eta}_3/\tilde{\eta}_8, \ o_4 = \tilde{\eta}_4/\tilde{\eta}_8, \ o_5 = \tilde{\eta}_5/\tilde{\eta}_8, \ o_6 = \tilde{\eta}_6/\tilde{\eta}_8, \ o_7 = \tilde{\eta}_7/\tilde{\eta}_8$$
$$\omega_2^2 = -\tilde{\vartheta}_1/\tilde{\vartheta}_6, \ \nu_1 = -\tilde{\vartheta}_7/\tilde{\vartheta}_6, \ \nu_2 = \tilde{\vartheta}_2/\tilde{\vartheta}_6, \ \nu_3 = \tilde{\vartheta}_3/\tilde{\vartheta}_6, \ \nu_4 = \tilde{\vartheta}_4/\tilde{\vartheta}_6, \ \nu_5 = \tilde{\vartheta}_5/\tilde{\vartheta}_6$$
$$\omega_3^2 = -\tilde{\upsilon}_1/\tilde{\upsilon}_5, \ \delta_1 = -\tilde{\upsilon}_6/\tilde{\upsilon}_5, \ \delta_2 = \tilde{\upsilon}_2/\tilde{\upsilon}_5, \ \delta_3 = \tilde{\upsilon}_3/\tilde{\upsilon}_5, \ \delta_4 = \tilde{\upsilon}_4/\tilde{\upsilon}_5$$

将式(15)的解设为

$$\begin{cases} x_{1} = x_{11}(T_{0}, T_{1}) + \varepsilon x_{12}(T_{0}, T_{1}) + O(\varepsilon^{2}) \\ x_{2} = x_{21}(T_{0}, T_{1}) + \varepsilon x_{22}(T_{0}, T_{1}) + O(\varepsilon^{2}) \\ x_{3} = x_{31}(T_{0}, T_{1}) + \varepsilon x_{32}(T_{0}, T_{1}) + O(\varepsilon^{2}) \end{cases}$$
(16)

式(16) 中 $T_0 = t$,物理意义为时间 t 的快变化; $T_1 = \epsilon t$,物理意义为时间 t 的慢变化. x_{11}, x_{21}, x_{31} 为派生系统的周期解, x_{12}, x_{22}, x_{32} 为派生系统的修正解.

将式(16)代入式(15)并整理小参数 ε 的同次幂得到 ε[°] 次项

$$\begin{cases} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = 0 \\ D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} = 0 \\ D_0^2 x_{31} + \omega_3^2 x_{31} = 0 \end{cases}$$
(17)

 ϵ^1 次项

$$\begin{cases} D_{0}^{2}x_{12} + \omega_{1}^{2}x_{12} = -2D_{0}D_{1}x_{11} + o_{1}D_{0}x_{11} + o_{2}x_{11}^{2} + o_{3}x_{21}^{2} + o_{4}x_{11}^{3} + o_{5}x_{11}x_{21}^{2} + o_{6}x_{11}x_{31} + o_{7}x_{31} \\ D_{0}^{2}x_{22} + \omega_{2}^{2}x_{22} = -2D_{0}D_{1}x_{21} + \nu_{1}D_{0}x_{21} + \nu_{2}x_{11}x_{21} + \nu_{3}x_{11}^{2}x_{21} + \nu_{4}x_{21}^{3} + \nu_{5}x_{21}x_{31} \\ D_{0}^{2}x_{32} + \omega_{2}^{2}x_{32} = -2D_{0}D_{1}x_{31} + \delta_{1}D_{0}x_{31} + \delta_{2}x_{11} + \delta_{3}x_{11}^{2} + \delta_{4}x_{21}^{2} \end{cases}$$
(18)

式(17) 与式(18) 中, $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}.$

将式(17)的解设为

$$\begin{cases} x_{11} = A_1(T_1)\exp(i\omega_1 T_0) + cc \\ x_{21} = A_2(T_1)\exp(i\omega_2 T_0) + cc \\ x_{31} = A_3(T_1)\exp(i\omega_3 T_0) + cc \end{cases}$$
(19)

式(19)中的 cc 为共轭项, A₁, A₂, A₃ 为派生系统的振幅, *i* 为虚数单位.

将式(19)代入式(18)中可得

 $\begin{cases} D_{0}^{2}x_{12} + \omega_{1}^{2}x_{12} = \left[-2i\omega_{1}A_{1}^{'} + o_{1}A_{1}i\omega_{1} + 3o_{4}A_{1}^{2}\overline{A}_{1} + 2o_{5}A_{1}A_{2}\overline{A}_{2}\right] \exp(i\omega_{1}T_{0}) + \\ o_{2}A_{1}^{2}\exp(2i\omega_{1}T_{0}) + o_{2}A_{1}\overline{A}_{1} + o_{3}A_{2}^{2}\exp(2i\omega_{2}T_{0}) + o_{3}A_{2}\overline{A}_{2} + o_{4}A_{1}^{3}\exp(3i\omega_{1}T_{0}) + \\ o_{5}A_{1}A_{2}^{2}\exp\{i(\omega_{1} + 2\omega_{2})T_{0}\} + o_{5}A_{1}\overline{A}_{2}^{2}\exp\{i(\omega_{1} - 2\omega_{2})T_{0}\} + o_{6}A_{1}A_{3}\exp\{i(\omega_{1} + \omega_{3})T_{0}\} + \\ o_{6}A_{1}\overline{A}_{3}\exp\{i(\omega_{1} - \omega_{3})T_{0}\} + o_{7}A_{3}\exp(i\omega_{3}T_{0}) + cc \\ D_{0}^{2}x_{22} + \omega_{2}^{2}x_{22} = \left[-2i\omega_{2}A_{2}^{'} + \nu_{1}A_{2}i\omega_{2} + 2\nu_{3}A_{1}\overline{A}_{1}A_{2} + 3\nu_{4}A_{2}^{2}\overline{A}_{2} + \right]\exp(i\omega_{2}T_{0}) + \\ \nu_{2}A_{1}A_{2}\exp\{i(\omega_{1} + \omega_{2})T_{0}\} + \nu_{2}A_{1}\overline{A}_{2}\exp\{i(\omega_{1} - \omega_{2})T_{0}\} + \nu_{3}A_{1}^{2}A_{2}\exp\{i(\omega_{1} + 2\omega_{2})T_{0}\} + \\ \nu_{3}\overline{A}_{1}^{2}A_{2}\exp\{i(\omega_{2} - 2\omega_{1})T_{0}\} + \nu_{4}A_{2}^{3}\exp(3i\omega_{2}T_{0}) + \nu_{5}A_{2}A_{3}\exp\{i(\omega_{2} + \omega_{3})T_{0}\} + \\ \nu_{5}A_{2}\overline{A}_{3}\exp\{i(\omega_{2} - \omega_{3})T_{0}\} + cc \\ D_{0}^{2}x_{32} + \omega_{3}^{2}x_{32} = \left[-2i\omega_{3}A_{3}^{'} + \delta_{1}A_{3}i\omega_{3}\right]\exp(i\omega_{3}T_{0}) + \delta_{2}A_{1}\exp(i\omega_{1}T_{0}) + \\ \delta_{3}A_{1}^{2}\exp(2i\omega_{1}T_{0}) + \delta_{3}A_{1}\overline{A}_{1} + \delta_{4}A_{2}^{2}\exp(2i\omega_{2}T_{0}) + \delta_{4}A_{2}\overline{A}_{2} + cc \\ \end{cases}$

观察式(20)可知索桥耦合系统存在 $\omega_3 \approx \omega_1 \approx \omega_2(1:1:1)$ 这种共振模式,下面将基于龙格 — 库塔 (Runge-Kutta)方法来分析该系统的 1:1:1 共振.

3 龙格-库塔(Runge-Kutta)方法

龙格一库塔方法的精度高,因此被广泛地运用于工程中,由于此算法采取了较好的措施对误差进行抑制,所以其计算原理也较复杂,下面将简单介绍其计算原理.

针对一阶精度的欧拉公式有

$$y_{i+1} = y_i + hk_i \tag{21}$$

式(21) 中*h* 表示计算步长,且 y_{i+1} 的表达式完全等价于 $y(x_{i+1})$ 的 Taylor 展开式的前两项,即局部截断误 差为 $O(h^2)$.

用点 x_i 处的斜率 k_1 与点 x_{i+1} 处的斜率 k_2 的加权平均值作为平均斜率 k^* 的近似值,那么就会得到二阶精度的改进欧拉公式:

$$y_{i+1} = y_i + h(f(x_i, y_i) + f[x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)])$$
(22)

依次类推,如果在区间[x_i, x_{i+1}]内多预估几个点的斜率 k_1, k_2, \dots, k_m ,并用它们的加权平均数作为平均 斜率 k^* 的近似值,且增加计算次数,可以提高截断误差的阶,它们的误差估计可以用 $f(x_i, y_i)$ 在 x_i 处的 Taylor 展开来表示.于是可考虑用函数 $f(x_i, y_i)$ 在若干点上的函数值的线性组合来构造瑞利 — 金斯公 式,构造时要求近似公式在 $f(x_i, y_i)$ 处的 Taylor 展开式与解y(x)在 x_i 处的 Taylor 展开式的前面几项 重合,从而使瑞利 — 金斯公式达到所需要的阶数.换而言之,在[x_i, x_{i+1}]这一步内计算多个点的斜率值, 然后将其进行加权平均,再作为平均斜率 k^* 的近似值,即可构造出更高精度的计算公式,这就是龙格 — 库塔方法的原理.

一般的龙格 一 库塔方法形式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + c_1 K_1 + c_2 K_2 + \cdots + c_p K_p \\ K_1 = h f(x_i, y_i) \\ K_2 = h f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} K_1) \\ \cdots \\ K_n = h f(x_i + a_1 h, y_i + b_{21} K_1 + \cdots + b_{n-1} K_{n-1}) \end{cases}$$
(23)

式(23) 即为 p 阶龙格 一 库塔方法, 其中 a_i, b_{ij}, c_i 为待定系数

当然,学术界常用的是四阶龙格 — 库塔方法,也就是在[x_i, x_{i+1}]上用 4 个点的斜率加权平均作为平均斜率 k^{*} 的近似值,构成一系列四阶龙格 — 库塔计算公式.

令式(23) 中 p = 4, 可得四阶龙格 一 库塔方法的计算形式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + hK_3) \end{cases}$$

$$(24)$$

当选择一定的初始扰动条件,就能基于四阶龙格 — 库塔计算原理,通过 MATLAB 编程脚本程序求得索桥 耦合系统的位移响应.

4 数值算例

如果拉索的弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa,单位质量 m = 30 kg/m,跨径 l = 120 m,截面惯性矩 $I = 1.75 \times 10^{-5}$ m⁴,截面面积 A = 0.015 m²,拉索的张力 $H = 2 \times 10^{6}$ N,桥面的等效质量 $M = 6.5 \times 10^{5}$ kg,等效刚度 $K = 5 \times 10^{6}$ N/m,此时的物理参数刚好使得 $\omega_{3} \approx \omega_{1} \approx \omega_{2}$,为方便区分,设此时的 1:1:1 共振模式为模式 1.如果拉索的弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa,单位质量 m = 30 kg/m,跨径 l = 350 m,截面惯性矩 $I = 1.75 \times 10^{-5}$ m⁴,截面面积 A = 0.015 m²,拉索的张力 $H = 4 \times 10^{6}$ N,桥面的等效质量 $M = 13 \times 10^{5}$ kg,等效刚 度 $K = 5 \times 10^{6}$ N/m,此时的物理参数也刚好使得 $\omega_{3} \approx \omega_{1} \approx \omega_{2}$,为方便区分,设此时的 1:1:1 共振模式为模式 2.选择上面这两套物理参数都刚好使得 $\omega_{3} \approx \omega_{1} \approx \omega_{2}$,即索桥耦合系统之间存在 1:1:1 共振模式.

初始扰动条件为[0.01,0.01,0.01,0.01,0.01,0.01 m],忽略该系统所受阻尼,使用四阶龙格—库塔 方法可得到模式1下拉索面内、面外、桥面的位移响应曲线,如图2、图3、图4所示.

观察并对比图 2、图 3、图 4 可得知: 索桥耦合系统发生 1:1:1 共振时, 拉索面内和面外都存在一定的位移, 但面内的振动位移远大于面外的摆动位移; 能量在拉索面内、面外以及桥面之间往复传递, 且能量具有"拍"的特点;考虑弯曲刚度对拉索振动特征影响时, 拉索面内板幅为 0.186 96 m, 减少了 0.000 43 m;考虑弯曲刚度对拉 弯曲刚度对拉索振动特征影响时, 拉索面内振幅为 0.186 96 m, 减少了 0.000 43 m;考虑弯曲刚度对拉 索振动特征影响时, 拉索面外的振幅为 0.012 66 m, 不考虑弯曲刚度对拉索振动特征影响时, 拉索面外 振幅为 0.012 25 m, 减少了 0.000 41 m; 弯曲刚度会使得振幅增加, 但由于本文是考虑的小直径斜拉 索, 因此拉索面内、面外振幅值的增加较小, 但是针对特大直径拉索振动特征分析时需考虑弯曲刚度引 起的拉索振幅的变化.



图 2 模式 1 下的位移响应(考虑弯曲刚度)



图 4 模式 1 下的桥面位移响应

从图 2、图 3 得知:对于小直径拉索,弯曲刚度对拉索振幅的影响较小,但从图 2、图 3 中不能得知弯曲刚度对发生共振的条件的影响,为了更加清晰地分析弯曲刚度对拉索面内、面外发生共振的条件的影响,取图 2、图 3 中的局部数据得到图 5.

观察图 5 得知:弯曲刚度并没有改变拉索共振的性质,但拉索发生共振的条件却明显有向左偏移的趋势,且面内偏移的趋势不明显,但面外偏移的趋势很显著,即弯曲刚度对面外发生共振的条件有明显的影响.

同理,使用四阶龙格一库塔方法可得到模式2下拉索面内、面外、桥面的位移响应曲线,如图6、 图7、图8所示.

观察并对比图 6、图 7、图 8 可得知: 与模式 1 相似,模式 2 下的拉索在面内和面外都存在一定的位移, 但面内的振动位移远大于面外的摆动位移;能量在拉索面内、面外、桥面之间往复传递,且能量具有"拍" 的特点;考虑弯曲刚度对拉索振动特征影响时,拉索面内的振幅为 0.160 28 m,不考虑弯曲刚度对拉索振 动特征影响时,拉索面内振幅为 0.160 19 m,减少了 0.000 09 m;考虑弯曲刚度对拉索振动特征影响时, 拉索面外的振幅为 0.010 57 m,不考虑弯曲刚度对拉索振动特征影响时,拉索面外振幅为 0.010 56 m,减 少了 0.000 01 m;模式 2 下的弯曲刚度对振幅的影响相比模式 1 下弯曲刚度对振幅的影响小,这是因为随 着档距与张力的增加涉及到弯曲刚度项的系数值会下降,即针对张力较大的大跨越拉索振动特性分析时,















150

200





图 7 模式2下的位移响应(不考虑弯曲刚度)

 q_{3}/m

0.01

-0.01



-0.01



同理,与模式1类似,取图6、图7中的局部数据得到图9.从图9可发现:弯曲刚度几乎没有使得模 式 2 发生共振的条件左偏,这同样是因为大张力、大跨径拉索的振动方程中涉及到弯曲刚度项的系数值较 小,即可忽略大张力、大跨径拉索的弯曲刚度对其共振发生的条件的影响.



图 9 模式 2 下的局部位移响应

论 5 结

本文建立了索桥耦合动力学模型,并推导了该模型的振动方程,通过多尺度法分析了该系统存在的共 振模式,并介绍了四阶龙格一库塔方法的计算,最后通过算例分析得知:

1) 拉索面内、面外、桥面之间的耦合效应非常强烈,即能量在拉索面内、面外、桥面之间往复传递,能 量形式具有"拍"的特点,工程中应避免耦合效应的发生,从而提高结构的安全性.

2) 索桥耦合系统发生1:1:1共振时, 拉索在面内和面外都存在一定的位移, 但面内的振动位移远大 于面外的摆动位移,因系统发生共振时,面外的位移也仅为百分之几,那么对于考虑多种因素影响(如桥台 与拉索之间的相互作用、风雨激励、覆冰等)的索桥耦合系统的动力学建模,可忽略面外的摆动位移,从而 提高效率.

3) 弯曲刚度对拉索面外振幅的影响更为显著,针对小直径拉索动力学分析时,可忽略弯曲刚度对拉索 振动特征的影响,但针对特大直径拉索动力学分析时,需考虑弯曲刚度对拉索振动特征的影响.

4) 对于小跨径、小张力的拉索,弯曲刚度不会改变拉索共振的性质,但会使得拉索发生共振的条件具

50

有向左偏移的趋势,且面内偏移的趋势不明显,但面外偏移的趋势很显著.

5) 对于大跨径、大张力的拉索,因涉及到弯曲刚度项的系数值随着档距与张力会下降,即针对张力较 大的大跨越拉索振动特性分析时,可忽略弯曲刚度对拉索发生共振的条件的影响.

参考文献:

- [1] 吕建根, 王荣辉. 考虑抗弯刚度斜拉索动力学建模及频率分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(7): 169-175.
- [2] REGA G. Nonlinear Vibrations of Suspended Cables—Part I: Modeling and Analysis [J]. Applied Mechanics Reviews, 2004, 57(6): 443-478.
- [3] 杨雅勋,柴文浩,杨福利,等. 基于全寿命周期的连续刚构桥应变传感器优化布置研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2020,42(6):119-127.
- [4] 赵跃宇,王连华,陈得良,等. 斜拉索面内振动和面外摆振的耦合分析 [J]. 土木工程学报, 2003, 36(4): 65-69.
- [5] 吕建根, 王荣辉, 赵跃宇. 受梁端激励斜拉索的非线性振动响应 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2009, 31(9): 147-153.
- [6] 吕建根,赵跃宇,王荣辉. 索拱组合结构的动力建模及其内共振分析 [J]. 中南大学学报(自然科学版), 2010, 41(1): 316-321.
- [7] IRVINE H M, CAUGHEY T K. The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1974, 341(1626): 299-315.
- [8] PERKINS N C. Modal Interactions in the Non-Linear Response of Elastic Cables Under Parametric/External Excitation
 [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1992, 27(2): 233-250.
- [9] WANG L H, ZHAO Y Y. Multiple Internal Resonances and Non-Planar Dynamics of Shallow Suspended Cables to the Harmonic Excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(1-2): 1-14.
- [10] ZHAO Y Y, HUANG C H, CHEN L C, et al. Nonlinear Vibration Behaviors of Suspended Cables Under Two-Frequency Excitation with Temperature Effects [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 416: 279-294.
- [11] 赵珧冰, 黄超辉, 林恒辉, 等. 考虑温度效应的索梁面内动力学建模及特性分析 [J]. 力学季刊, 2018, 39(3): 573-579.
- [12] 吴庆雄,李 浏,陈宝春.考虑弯曲刚度的拉索面内固有振动的理论计算公式[J].工程力学,2010,27(11):9-15.
- [13] 赵跃宇,周海兵,金 波,等. 弯曲刚度对斜拉索非线性固有频率的影响 [J]. 工程力学, 2008, 25(1): 196-202.
- [14] 吕建根,康厚军.考虑弯曲刚度斜拉索面内面外内共振分析 [J].力学季刊,2016,37(3):572-580.
- [15] 纪宏伟.一个典型弹性梁方程涉及第一特征值的正解 [J].西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(1): 14-19.
- [16] 刘小会, 闵光云, 孙测世, 等. 直接法与间接法对拉索耦合内共振的影响研究 [J]. 应用力学学报, 2020, 37(3): 1088-1098, 1392.
- [17] 王 波, 蒋 敏. 轴向变速黏弹性 Poynting-Thompson 梁参数共振稳定性 [J]. 力学季刊, 2019, 40(4): 807-814.

责任编辑 汤振金