

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.02.003

# 中小学数学问题提出教学的目标与原则

任红<sup>1</sup>, 张玲<sup>2</sup>

1. 成都石室中学, 成都 610041; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

**摘要:** 问题提出逐渐成为多国多学科课程、教学改革关注的焦点之一。该文从教学实践入手, 理论结合案例地探讨中小学数学问题提出教学的目标与原则。作为教学手段的问题提出, 具有促进学生知识理解、提高学生问题解决能力、激发学生创造力的功能属性与价值取向。实施问题提出教学需充分考虑开放性原则、情境性原则与合理性原则。

**关键词:** 问题提出教学; 目标与原则; 教学改革

**中图分类号:** G622.0      **文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2022)02-0022-06

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## The Objectives and Principles of Problem Posing Teaching in Primary and Secondary Schools

REN Hong<sup>1</sup>, ZHANG Ling<sup>2</sup>

1. Chengdu Shishi High School, Chengdu 610041, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

**Abstract:** Problem posing is receiving increased attention in school curricula and instruction around the globe. This article discusses the objects and principles of mathematics problem posing teaching in primary and secondary schools based on the consideration of theory and practice in problem posing teaching. Problem posing, which can be viewed as an instructional approach, contributes its potential for fostering students' understanding, problem solving skills and creativity. We should consider how to design open-ended, contextualized problem posing tasks and to reasonably use the problems posed by students.

**Key words:** problem-posing teaching; teaching objectives and principles; teaching reform

爱因斯坦曾指出提出一个问题往往比解决一个问题更重要, 因为解决问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已, 而提出新的问题、新的可能性、从新的角度看旧的问题, 却需要创造性的想象力, 标志着科学的真正进步。顾明远先生也曾强调新世纪的教育要求学生独立思考、敢想敢做、勇于创新, 不能提出问题的学生不是一个好学生。提出问题不仅仅是对自我的发掘与提升, 更是通过一个点去点亮另一个点,

收稿日期: 2021-12-10

基金项目: 2020年度国家社科基金后期资助项目(20FJKB006)。

作者简介: 任红, 高级教师, 主要从事中小学数学教育与研究。

通信作者: 张玲, 博士后。

通过一扇门去打开更多门,从而发现世界、创造世界的根本路径.一方面,培养学生未来生活学习所需要的思考和创造能力是新时代教育所需;另一方面,问题提出教育的理念,在于通过克服权威主义,使教师和学生成为教育过程的主体,通过自主探究让学生参与知识建构的过程,最大程度地将“被讲解—被接受”的状态解放为“被认知”的状态,实现学生学习能力、实践能力与创新能力的培养与解放.所以作为重要教学手段和教育目标的问题提出,有理由成为学校课程的一个重要组成部分.从关注围绕“问题解决教学”到“问题提出教学”的教育变革,有理由为满足不断升级和个性化的教育需求提供新的门径.当前,“问题提出”已经成为我国课程标准探讨的关键词之一,西南师大版小学数学教材已经开始渗透问题提出的理念.本文拟从教学实践入手,理论结合案例,对问题提出教学的目标与原则进行探讨,以期为一线教育工作者深入地认识问题提出教学提供线索与门径.

## 1 问题提出教学

问题提出教学的思想渊源,可追溯至2 000多年前孔子的启发式教学与苏格拉底的产婆术.现代意义上的问题提出教学,孕育于问题教学,即以问题为核心的教学方式.最早可追溯至公元1世纪我国古代的第一部以问题集形式呈现的数学专著——《九章算术》.作为独立的课堂教学活动,它区别于问题解决教学,但又与问题解决相依相伴.教师在课堂教学中为学生创造在具体提供的情境中提出问题的机会,并留有充足的时间让学生在所提供的信息中充分利用假设修改已有的问题的题设进而创造新问题.基于学生所提出的问题,教师再依据教学目标,合理筛选使用问题引导学生解决问题.尽管对于“问题提出教学”尚未形成统一的定论,依据学习效果框架以及问题提出的特征,宋乃庆教授等提出问题提出教学是教师结合课程教材中的教学任务和学习目标,从已知的教学条件和环境出发设计问题提出的教学任务,并通过课堂言语互动的教学过程,帮助学生深入地学习学科知识,培养学生问题解决能力和创新能力的协调发展<sup>[1-3]</sup>.具体而言,问题提出教学的目标在于帮助学生理解知识,培养学生问题意识、发现问题、解决问题能力,激发学生创造力.

## 2 问题提出教学的目标

问题提出教学的实质是在课堂上提供给学提出问题的机会,通过提出问题学习相关知识,促进学生学习和学生发展是问题提出发挥其作为教学手段属性的切实可实现的目标.其中学生学习可以概括为掌握基本知识与基本技能,而学生发展是以培养什么样的人为基准点考虑,最重要的价值导向是培养富有创造力、创新思维的人.

### 2.1 以促进学生理解知识为首要目标导向

在教学实践中,教师无论采用何种教学手段都是为了追求同一个目的,即高质量、低消耗地使学生更加便捷地学好,达到让学生接受知识、形成技能技巧的预期目的<sup>[4]</sup>.考虑是否采用新的教学手段,首个要素是这个教学手段是否契合学生所需的知识,它的直接贡献是服务于学生学习知识,所以进行问题提出教学的首要目标导向是促进学生进行知识的理解与积累.

问题提出教学对于教师的主要挑战,是如何设置问题提出教学任务,让学生在参与问题提出教学任务的过程中加深对教学任务中所蕴含的知识理解与积累.作为高认知需求的问题提出任务,它不同于简单的“记忆性任务”和“无联系的程序性任务”,需要提问者参与理解问题提出情境中的概念与关系,探究问题提出数学概念或关系的本质,提取和使用相关的知识和经验,分析任务并积极检查任务的限制条件,同时需要对自己的认知过程进行自我监控和自我调节<sup>[5]</sup>.所以对于问题提出教学任务本身而言,它具有实现学生知识理解与积累的特质.

教学方法受教育的目标、教学内容制约<sup>[6]</sup>,在“目标—内容—方法”关系链中,如何根据教学内容的本质属性,设计问题提出教学任务,达到实现促进学生知识理解与积累的目标,是教师需要考量的重要内容.下面将以问题提出教学的基本模式“教师设置问题提出任务—课堂互动—实现教学目标”为框架,给出具体的教学案例,帮助读者理解在进行问题提出教学中如何实现促进学生知识理解与积累的这一教学目标.

例 1<sup>[7]</sup> (a) 计算  $3/4 - 1/2$ ; (b) 写出一个问题来表示这个算式; (c) 画一幅图表征你的问题并解释.

[任务评析]

该任务适用于学生学完分数运算, 学生通过用问题表征分数减法来理解分数以及分数减法的意义. 教师可以通过学生提出的问题反观学生对于分数意义的理解, 此外还增加了图表征等方式来多渠道地反映学生对分数, 以及分数减法的理解.

[课堂互动] 此处省略师生具体互动过程, 附上两个互动后的表征问题的图示(图 1).

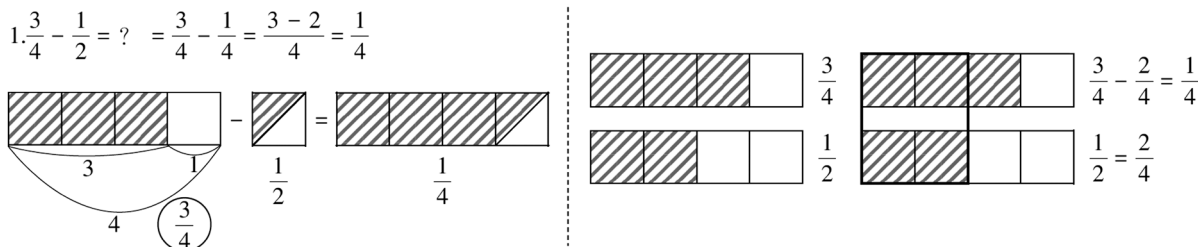


图 1 问题表征图示

问题 1: 妈妈将一块披萨分成 4 块, 给我 3 块, 吃了一半, 还剩多少?

问题 2: 妈妈将一块披萨分成 4 块, 给我 3 块. 将另一块披萨分成两块, 给妹妹一块, 请问我的披萨比妹妹多多少?

[目标达成分析]

从 Tuluk-Ucar 的调查发现, 职前教师完成第一个分数计算任务的正确率是 100%, 而完成任务二(即, 提出合适问题)的教师占比为 24%~40%. 从任务一我们无法直接观测出学生是否真正理解分数、分数减法的含义, 如果仅仅从正确率看, 我们甚至会认为职前教师已经完全掌握了分数的减法运算的技能. 但从任务二的完成情况, 可以深入剖析出职前教师对于分数、分数减法的理解状况. 而且可以发现一些不合适的问题反映出学生对于分数理解的困惑与误区. 部分被试在用问题表征算式时容易混淆参考单位, 比如在分别表征  $3/4$  和  $1/2$  时, 无法明确每个部分所指的单位 1, 而且这种混淆居多出现在用“拿走”(take-away)表征减法语义的问题中(见图 1 左). 此外, 不同情景下, 分数具有不同的意义, Kieren 教授提出了对于分数的 5 种理解方式: 部分—整体、比、商、测量和算子<sup>[8]</sup>. 从职前教师表征的问题可以发现, 他们更倾向于用整数来表示分数, 而并非将分数作为一个数. 比如, 有问题如此“妈妈将一块披萨分成四块, 给我 3 块. 妈妈将另一块披萨分成两块, 给妹妹一块. 请问我比妹妹多多少块”. 综上, 学生通过参与问题提出活动, 反思并呈现出自己是如何理解分数以及分数的减法, 教师通过学生所提问题, 分析学生对于分数与分数减法的理解程度与障碍, 采取有针对性的补救性教学, 最终帮助学生多角度理解分数及分数的减法.

## 2.2 以提高学生问题解决能力为重要目标导向

一切生活皆为问题解决<sup>[9]</sup>. 培养学生问题解决的能力对于教育者而言尤为重要, 它是学生和社会上的立身之本. 几十年来, “问题解决”一直也是各国课程改革与发展所关注的更古不变的主题之一. 而问题提出作为课程和教学研究的关注点的一个重要的动机在于它能潜在地帮助学生成为更好的问题解决者. 联结问题提出与问题解决的课程改革已经渗透在不同国家的课程标准中. 尽管问题提出并不像问题解决那般广为人所知, 但是问题提出作为提高学生问题解决能力的表现方式已经不是一个新的观点. 所以在问题提出教学中, 如何通过培养学生探究解决自己或同伴所提出的问题是问题提出教学最直接的归宿.

问题提出教学中, 教师可以设置发生在解决问题之前、之中和之后的问题提出任务<sup>[10]</sup>. 关于解决问题之后的问题提出任务, 如波利亚的问题解决四步法之最后一步, 对问题陈述或答案进行回顾与反思, 让学生解题后思考“可以提出一个相似的问题吗、能在别的什么题目中利用这个结果或者这种方法吗”等. 学生通过深度识别、判归同类或异类问题解决的心理加工过程, 反思提出新问题的结构、类别与模式, 反思问题的解决方法, 提出相似结构类别的或相同解决方法的问题, 从而加深对同类问题以及解决方法的识别与理解. 当学生再次碰到同种或相似问题时, 更容易产生联结, 触类旁通, 快速求解问题. 其次关于发生在“解决问题”之中的问题提出任务, 学生可以通过再表述问题或提出子问题来架起解决问题的桥梁, 实现解

决问题的目标. 问题解决是从问题的初始状态到目标状态的变化过程, 中间会经历若干个重新表述问题以及建立一系列更加精细的问题的状态, 达克尔认为在对原始问题连续的再表述的个性化处理中, 就会出现问题提出<sup>[11]</sup>, 以形成描述解决问题中间过程状态的问题. 有经验的、正确的问题提出, 在一定程度上缩短解决问题过程中路径试误的时间, 从而迅速有效地解决问题. 问题解决的中间状态处理得越好, 提出的子问题越好, 越有利于解决者更快更好地解决问题. 从而达到促进学生解决问题能力的目标. 面对“解决问题”之前的问题提出任务, 往往需要从给定的、人为的或自然的情境中产生问题. 人类历史上希尔伯特提出的 23 个数学问题对推动 20 世纪数学的发展起了积极的推动作用.

### 2.3 以激发学生创造力为根本目标导向

学校教育中, 创造力表现为学生对事物提出新的见解, 它不同于专业水平的创造力, 并不需要达到非凡的成就才能称其具备好的创造力<sup>[12]</sup>. 问题提出活动具备激发学生创造力的潜力, 主要表现为两个方面, 其一, 问题提出活动本身长期被看作是一种创造性思维的活动. 它需要从一堆信息中, 以新的、不同的视角, 从已有的空间到预期的空间中探索、发现、选择种种新的联系, 发现新的可能性, 提出新的问题. 以纯数学和应用数学研究为例, 研究者通常面临的是结构不良的问题或情境, 需要通过猜想或者假设、探索, 以提出一种新的可能性的问题, 从而建立已有情境与未知结果间的联结. 其二, 提出问题需要创造力. 创造力的主要成分是收敛思维与发散式思维<sup>[13]</sup>, 对应表现为对模式属性的识别与归纳, 对问题的敏感性, 构思的流畅性、灵活性与原创性, 构思结构的广度等. 这些思维属性是提出问题过程中重要的思维品质. 故而开展问题提出教学有利于发展学生的创造性思维, 为实现培养创造性人才提供方法与路径.

流畅性、灵活性和原创性作为创造性思维的主要特性, 是问题提出教学激发学生创造力的着力点. 思维的流畅性表现为学生迅速产生很多想法, 灵活性表现为学生能迅速产生不同类型或不同范畴的想法, 原创性表现为学生所产生想法的新颖性. 在数学教育领域, 一个创造性思维强的问题提出者, 可以迅速地提出很多恰当的、不同类型的、“特别”的问题. 发展学生创造性思维的流畅性、灵活性和原创性, 是相互独立但又相互依存的. 学生能产生越多问题的想法、提出更多的问题, 往往能反映学生思维的流畅性越好, 但并不是提问的数量便足以说明学生的创造性思维. 比如图 2 点图的问题提出活动中<sup>[14]</sup>, 提出 100 个关于“第  $N$  副图有几个白点(从 1~100 改变  $N$  的数字大小)”的问题的学生与提出 99 个关于“第  $N$  副图有几个白点(从 1 到 99 改变  $N$  的数字大小)”的问题的学生相比, 并不能说明前者的创造性思维比后者高. 还需从思维的灵活性层面看学生是否能产生更多不同类型、不同解答策略所需的问题. 比如在点图的例子中, 学生在提出“第  $N$  副图有几个白点”的问题之上, 还可以提出“第  $N$  副图白点和黑点点数之和是多少”“第  $N$  副图白点和黑点点数之间的关系”“用  $N$  表示出白点的点数”等求和、比例关系、规律总结的不同类型问题, 提出问题的种类越多, 往往能反映学生思维的灵活性越好. 此外, 在思维的原创性层面, 学生产生越多区别于常见种类的、新颖的问题, 预示着学生创造性思维的原创性越好. 比如, 区别于以上常规类的“某图点数问题”“某图点数和问题”“某图黑白点数关系问题”“用图数表示点数问题”, 可以逆向思维“有  $N$  个白点的是第几幅图”.

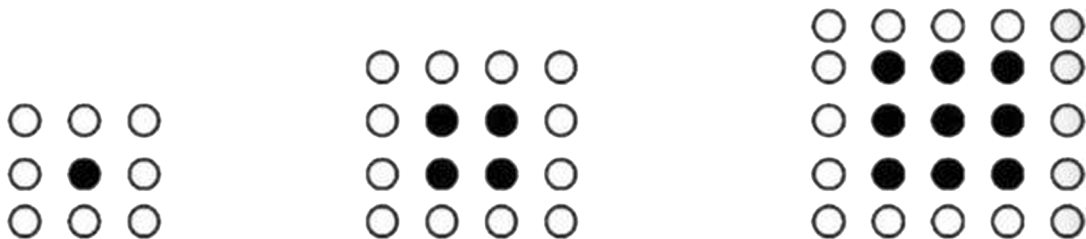


图 2 点图

## 3 问题提出教学的原则

问题提出教学以问题为引领, 强调学生在提出问题与解决所提问题的过程中实现自我知识建构, 关注学生的问题意识与创造性思维, 注重自主探究与自我建构的教学过程. 基于问题提出教学的本质与内涵,



从有效教学的视角探讨问题提出教学的原则, 落脚在教师设计问题提出教学任务时, 重点考虑如何最大化地发挥问题提出的教育价值, 实现教学目标乃至激发学生创造力的育人目标. 从可操作性层面, 实施问题提出教学需要关注以下原则:

### 3.1 开放性原则

在问题提出课堂教学中, 设计有效的教学任务, 使得既能将数学概念或知识嵌入任务中以达到学习知识和技能的基本要求之外, 还能达到发展学生创造性思维的作用, 对于教学任务的设计要求很高. 问题提出教学与问题解决教学最为本质的区别是它能提供给更多的学习机会, 所以考察问题提出教学最根本的原则是所设置的问题提出任务是否可以给学生提供更多的学习机会. 相比“ $5+4=$ \_\_\_”这种封闭性、认知需求很低的任务, 研究表明, 开放式(open-ended)任务情境, 更有利于培养学生创造性思维. 因为开放式任务可以提供学生更多思维的空间与可能性, 刺激学生对于任务情境、条件、任务目标的思考, 根据理解产生多个特定的目标和可能的多个正确的解决方案. 在下一节中将介绍一些可操作性的设置问题提出任务的策略与方法. 在此不做教学任务设计的相关赘述, 仅具体举例说明相比之下, 不同的教学任务会提供给不同程度的学习机会.

#### 例 2<sup>[15]</sup>

任务 1: 如图 3, 这个模式会继续延续. 我想要编制一些能用这个模式求解的数学问题, 以供高中或大学一年级学生求解, 请你帮我提出尽可能多的数学问题.

任务 2: 如图 3, 这个模式会继续延续. 我想要编制一些能用这个模式或者改变模式求解的数学问题, 以供高中或大学一年级学生求解, 请你帮我提出尽可能多的数学问题.

任务 1 是一道满足一定结构的数字规律题, 学生可能会提出一个类似“第  $n$  行数的和是多少”、“前  $n$  行数的和是多少”、“第  $n$  行第 2 个数是多少”、“每一行的第 1 个数之间满足什么关系”的数学问题. 这样的情景隶属于“模式”情景. 而任务 2 相比任务 1 给学生提供的思维空间更大, 学生不仅可以在满足图示模式的基础上提出数学问题, 还可以通过更改模式、更改条件, 提出更多的新的数学问题, 提供给学生更多的思考空间.

			1				
		3		5			
		7	9		11		
	13		15	17		19	
21		23		25	27		29
							.....

图 3 数列

### 3.2 情境性原则

任何学习愿望都是在一定的情景中产生的, 只有具有强烈吸引力的情景教学才能激励学生对学习的需要, 促进教学任务的实现<sup>[16]</sup>. 情景设置的方式对于激发学生学习动机的作用有着显著的差异. 同一个任务用不一样的情境引导语来表述, 其教学效果也不一样. 究其原因, 激发学生内部动机的刺激特点, 通常有新奇性、惊异、复杂性、趣味性、矛盾, 以及不确定性等. 有研究表明确定度过高的信息, 学习者的心意不致丧失均衡, 因而知性冲突较弱, 内部动机不能充分激发起来. 所以教师在设置问题提出教学任务时, 需要充分考虑情景表述的方式方法. 下面以一例说明.

#### 例 3<sup>[17]</sup>

任务 1:  $d(n)$  表示整数  $n$  的正因子. 证明, 当且仅当  $n$  为平方数时,  $d(n)$  为奇数.

任务 2: 哪一个正整数有一个奇数因子(证明你的猜想).

任务 3: 想象有  $n$  个全部关闭的锁和  $n$  个人. 假设第 1 个人独自打开每一个锁; 然后第 2 个人从第 2 号锁开始每两个锁关闭一个锁; 第 3 个人从第 3 号锁开始每 3 个锁改变 1 个锁的开合状态(也就是, 如果原来是锁住的, 那么这个人将其打开, 如果原来是打开的则将其关闭). 如果这个过程持续下去一直到所有  $n$  个人都完成一遍, 那么哪些锁是打开的?

以上 3 个问题实际上都是同一个问题, 只是用了不同的表达方式. 第 1 个问题是干巴巴的数学证明问题; 第 2 个很简洁, 只是给定了一个需要猜想的问题, 而非一个需要证明的陈述句; 第 3 个则以一种非常独特的方式提出了一个数学问题. Butts 认为第 3 种问题的呈现形式可能更容易激发学习者潜在的主动解决问题的愿望, 把问题从不同角度呈现出来, 以增加学生探索和学习的机会.

### 3.3 合理性原则

问题提出教学的首要条件是设计、改变、使用恰当的问题提出教学任务,为了最大程度地实现学生知识、技能教学目标的达成,需要注意任务的开放性特征与情境性特征.那么在问题提出教学过程中,如何合理处理学生所提出的问题,是达成教学目标需要考虑的必经之路.面对问题提出教学任务,学生可以根据自我认知体验提出不同的问题.哪些问题需要进行分析,哪些问题需要摒弃,哪些问题需要优化再处理,对于教师而言,以上是进行问题提出教学的重难点问题.如果所提问题是促进教学沿着知识建构生成的路径,那么可以引导学生重点思考该问题的解决方案.如果所提问题离知识生成目标较远,教师如何引导学生优化问题,甚至将“不合理”问题归类处理实现“变废为宝”是进行问题提出教学的艺术之处.

#### 参考文献:

- [1] 宋乃庆,张莎莎,陈婷,等.基于“问题提出”的小学数学教师主题式专业发展:理论建构与实践探索[J].数学教育学报,2021,30(1):12-18.
- [2] 许天来,蔡金法.美国数学课程中的“问题提出”——期望与挑战[J].数学教育学报,2019,28(2):18-23.
- [3] 陈婷,徐红等.小学数学教师学习运用“问题提出”进行教学的个案研究——以“用字母表示稍复杂的数量关系”为例[J].数学教育学报,2019,28(2):7-12.
- [4] 李嘉骏.教学手段须回归课堂教学实践[J].中国教育学刊,2010(4):51-53.
- [5] 张玲,宋乃庆,蔡金法.问题提出:基本蕴涵与教育价值[J].中国电化教育,2019(12):31-39.
- [6] 钟启泉.教学方法:概念的诠释[J].教育研究,2017,38(1):95-105.
- [7] TOLUK-UCAR Z. Developing Pre-Service Teachers Understanding of Fractions TProblem Posing [J]. Teaching and Teacher Education, 2009, 25(1): 166-175.
- [8] KIEREN T E. Rational and Fractional Numbers; from Quotient Fields to Recursive Understanding; Thomas E. Kieren [M] //Rational Numbers: Routledge, 1993: 59-94.
- [9] 杰伦 J G,范梅里恩伯尔,毛伟,等.论问题解决与教学促进[J].远程教育杂志,2014,32(6):103-109.
- [10] SILVER E A. On Mathematical Problem Posing [J]. For the Learning of Mathematics, 1994(4): 92-101.
- [11] KARL D. On Problem-Solving [J]. Psychological Monographs, 1945, 58(5): i-113.
- [12] BONOTTO C, DAI SANTO L. On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in Primary School [M]. New York: Springer, 2015.
- [13] BALKAL D S. Creative Ability in Mathematics [J]. Arithmetic Teacher, 1974, 21(7): 633-636.
- [14] 张玲,蔡金法.问题提出点亮学生创造性思维的火花[J].小学教学(数学版),2019(11):23-28.
- [15] 蔡金法,许天来.数学问题提出的例子、类型和内涵[J].小学教学(数学版),2019(Z1):34-40.
- [16] 沈小碚.试论“问题情景教学法”的实质及合理运用[J].课程·教材·教法,1994,14(8):19-22.
- [17] 蔡金法,姚一玲.数学“问题提出”教学的理论基础和实践研究[J].数学教育学报,2019,28(4):42-47.

责任编辑 廖坤