第 44 卷第 2 期　西南大学学报（自然科学版）　2022 年 2 月
Vol. 44　No. 2　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Feb.　2022

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2022.02.009

n-强投射余可解 Gorenstein 平坦模

钟魁晨，　张翠萍

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 引入了 n-强投射余可解 Gorenstein 平坦模的概念，给出了这类模的等价条件及其性质，讨论了 n-强投射余可解 Gorenstein 平坦模与 n-强 Gorenstein 平坦模、n-强 Ding 投射模之间的关系.

关　键　词： 投射余可解 Gorenstein 平坦模；n-强 Gorenstein 平坦模；n-强 Ding 投射模

中图分类号： O153.3　　**文献标志码：** A

开放科学（资源服务）标识码（OSID）：

文 章 编 号： 1673－9868(2022)02－0076－06

n-Strongly Projectively Coresolved Gorenstein Flat Modules

ZHONG Kuichen，　ZHANG Cuiping

School of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract： The concept of n-strongly projectively coresolved Gorenstein flat modules is introduced，the equivalent conditions and properties of these modules are given，and the relations among n-strongly projectively coresolved Gorenstein flat modules，n-strongly Gorenstein flat modules and n-strongly Ding projective modules are discussed.

Key words： projectively coresolved Gorenstein flat modules；n-strongly Gorenstein flat modules；n-strongly Ding projective modules

文献[1]在左、右 Noether 环上引入了 G-维数为 0 的有限生成模. 文献[2]在任意结合环上引入了 Gorenstein 投射(内射)模的定义，推广了 G-维数为 0 的有限生成模. 文献[3]引入了强 Gorenstein 投射(内射、平坦)模，并且证明了一个模 M 是 Gorenstein 投射模当且仅当它是某个强 Gorenstein 投射模的直和因子. 文献[4]引入了 n-强 Gorenstein 投射(内射、平坦)模，并研究了这类模的一些性质. 随着人们对 Gorenstein 同调理论更为深入细致的研究，文献[5-7]引入了 Gorenstein AC 投射模、n-强 Gorenstein AC 投射模，并得出了很好的性质.

文献[8]定义了强 Gorenstein 平坦模，即 Ding 投射模. 文献[9]研究了 PGF 模，给出了这类模的一些等价刻画. 文献[10]研究了 PGF 模和 Gorenstein 平坦模、Ding 投射模之间的关系，证明了 PGF 模的类等于 Ding 投射模的类和 Gorenstein 平坦模的类的交集，给出了 PGF 模的类与 Ding 投射模的类相等的等价

收稿日期：2021－03－31

基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).

作者简介：钟魁晨，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究.

通信作者：张翠萍，副教授.

条件．文献[11]研究了强 PGF 模．文献[12]研究了强 Ding 投射模，文献[13-14]对这类模进行了深入研究，并证明了这些模类具有许多与 n-强 Gorenstein 投射模类似的性质．

受以上思想的启发，本文引入 n-强投射余可解 Gorenstein 平坦模，研究它的性质，讨论这类模与 n-强 Gorenstein 平坦模及 n-强 Ding 投射模之间的关系．

本文中的环 R 均指有单位元的结合环，模指左 R-模．设 M 是 R-模，M^+ 表示 M 的示性模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，$M^{\perp}$ 表示 M 的右正交．$pd_R(M)$，$id_R(M)$，$fd_R(M)$ 分别表示 M 的投射维数、内射维数、平坦维数．$\mathrm{P}(R)$，$\mathrm{GP}(R)$，$\mathrm{DP}(R)$ 分别表示投射模类、Gorenstein 投射模类、Ding 投射模类．

1 预备知识

定义 1[9] 如果存在投射模的正合序列

$$\cdots \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P_{-1} \longrightarrow P_0)$，且对任意内射右 R-模 I，$I \otimes_R -$ 保持以上序列正合．则称 R-模 M 是投射余可解 Gorenstein 平坦模，记 M 为 PGF 模．所有 PGF 模的类记为 $\mathrm{PGF}(R)$．

定义 2[11] 如果存在投射模的正合序列

$$\cdots \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P \longrightarrow P)$，且对任意内射右 R-模 I，$I \otimes_R -$ 保持以上序列正合．则称 R-模 M 是强 PGF 模，记 M 为 SPGF 模．所有 SPGF 模的类记为 $\mathrm{SPGF}(R)$．

定义 3[4] 设 n 是正整数．如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意投射模 P，$\mathrm{Hom}_R(-, P)$ 保持以上序列正合．则称 R-模 M 是 n-强 Gorenstein 投射模，记 M 为 n-SGP 模．所有 n-SGP 模的类记为 n-$\mathrm{SGP}(R)$．

定义 4[13] 设 n 是正整数．如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意平坦模 F，$\mathrm{Hom}_R(-, F)$ 保持以上序列正合．则称 R-模 M 是 n-强 Ding 投射模，记 M 为 n-SDP 模．所有 n-SDP 模的类记为 n-$\mathrm{SDP}(R)$．

定义 5[4] 设 n 是正整数．如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 F_i 是平坦模，且对任意内射右 R-模 I，$I \otimes_R -$ 保持以上序列正合．则称 R-模 M 是 n-强 Gorenstein 平坦模，记 M 为 n-SGF 模．所有 n-SGF 模的类记为 n-$\mathrm{SGF}(R)$．

定义 6[4] 设 n 是正整数．如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} I_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} I_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 I_i 是内射模，且对任意内射模 I，$\mathrm{Hom}_R(I, -)$ 保持以上序列正合．则称 R-模 M 是 n-强 Gorenstein 内射模，记 M 为 n-SGI 模．所有 n-SGI 模的类记为 n-$\mathrm{SGI}(R)$．

我们有

$$\mathrm{PGF}(R) \subseteq \mathrm{GP}(R) \qquad \mathrm{PGF}(R) \subseteq \mathrm{DP}(R)$$

$$\mathrm{P}(R) \subseteq 1\text{-}\mathrm{SGP}(R) \subseteq n\text{-}\mathrm{SGP}(R) \subseteq \mathrm{GP}(R)$$

$$\mathrm{P}(R) \subseteq 1\text{-}\mathrm{SDP}(R) \subseteq n\text{-}\mathrm{SDP}(R) \subseteq \mathrm{DP}(R)$$

2 主要结果

定义 7 设 n 是正整数．如果存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意内射右 R-模 I，$I\otimes_R$-保持以上序列正合. 则称 R-模 M 是 n-强投射余可解 Gorenstein 平坦模，记 M 为 n-强 PGF 模. 所有 n-强 PGF 模的类记为 n-SPGF(R).

命题 1 设 n 为正整数. 则：

(ⅰ) 每个强 PGF 模是 n-强 PGF 模；

(ⅱ) 每个 n-强 PGF 模是 PGF 模.

证 (ⅰ) 设 M 是强 PGF 模，则存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f}P\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0$$

其中 P 是投射模，且对任意内射右 R-模 I，$I\otimes_R$-保持以上序列正合. 从而有正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f\circ g}\cdots\xrightarrow{f\circ g}P\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0$$

且 $I\otimes_R$-作用后还是正合的. 故 M 是 n-强 PGF 模.

(ⅱ) 设 M 是 n-强 PGF 模，则存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射的，且对任意内射右 R-模 I，$I\otimes_R$-保持以上序列正合. 从而有正合序列

$$\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_n\circ f_0}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_n\circ f_0}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots$$

且 $I\otimes_R$-作用后仍正合. 故 M 是 PGF 模.

易得以下结论：

命题 2 设 n 是正整数，则 n-SPGF(R) 关于直和封闭.

下面给出 n-强 PGF 模的等价刻画.

定理 1 设 M 是 R-模，n 是正整数. 则以下结论等价：

(ⅰ) M 是 n-强 PGF 模；

(ⅱ) 存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意内射维数有限的 R-模 H，$H\otimes_R$-保持以上序列正合；

(ⅲ) 存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意内射右 R-模 E 和某个正整数 j，有

$$\mathrm{Tor}_{j+1}^R(E,M)=\mathrm{Tor}_{j+2}^R(E,M)=\cdots=\mathrm{Tor}_{j+n}^R(E,M)=0$$

(ⅳ) 存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意内射维数有限的右 R-模 H 和某个正整数 j，有

$$\mathrm{Tor}_{j+1}^R(H,M)=\mathrm{Tor}_{j+2}^R(H,M)=\cdots=\mathrm{Tor}_{j+n}^R(H,M)=0$$

(ⅴ) 存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且 $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Im}\, f_i$ 是 1-强 PGF 模；

(ⅵ) 存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且 $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Im}\, f_i$ 是 PGF 模；

(ⅶ) 存在 R-模的正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射维数有限的模，且 $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Im}\, f_i$ 是 1-强 PGF 模；

(viii) 存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射维数有限的模，且 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i$ 是 PGF 模.

证　(ii)$\Longrightarrow$(i)　显然.

(i)$\Longrightarrow$(ii)　由已知，存在 R-模的正合序列

$$P: 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意内射右 R-模 I，$I \otimes_R$- 保持以上序列正合.

设 $id_R(H)=m<\infty$. 当 $m=0$ 时，$H \otimes_R$- 保持以上序列正合.

假设对内射维数等于 $m-1$ 的右 R-模 K，$K \otimes_R$- 保持以上序列正合. 考虑正合序列

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

其中 E 是内射右 R-模，$id_R(K)=m-1$. 于是有复形的短正合列

$$0 \longrightarrow H \otimes_R P \longrightarrow E \otimes_R P \longrightarrow K \otimes_R P \longrightarrow 0$$

因为 $E \otimes_R P$ 和 $K \otimes_R P$ 是正合的，所以 $H \otimes_R P$ 正合.

(i)$\Longrightarrow$(iii)　由命题 1 知，M 是 PGF 模. 故对任意内射右 R-模 I，有

$$\mathrm{Tor}_{j\geqslant 1}^{R}(I, M)=0$$

所以结论成立.

(iii)$\Longrightarrow$(i)　设

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

是 R-模的正合列. 令 $K_i=\mathrm{Ker}\ f_i(i=0,\cdots,n-1)$，$K_n=M$. 对任意内射右 R-模，由维数转移可得

$$\mathrm{Tor}_i^R(I, M) \cong \mathrm{Tor}_{i+1}^R(I, K_{n-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{Tor}_{i+n-1}^R(I, K_0) \cong \mathrm{Tor}_{i+n}^R(I, M)$$

其中 i 为任意正整数. 因为

$$\mathrm{Tor}_{j+1}^R(I, M)=\cdots=\mathrm{Tor}_{j+n}^R(I, M)=0$$

所以

$$\mathrm{Tor}_1^R(I, M)=\mathrm{Tor}_1^R(I, K_{n-2})=\cdots=\mathrm{Tor}_1^R(I, K_0)=0$$

故 $I \otimes_R$- 保持以上序列正合. 所以 M 是 n-强 PGF 模.

(ii)$\Leftrightarrow$(iv) 类似 (i)$\Leftrightarrow$(iii) 的证明.

(i)$\Longrightarrow$(v)　设 M 是 n-强 PGF 模，则存在正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，且对任意内射右 R-模，$I \otimes_R$- 保持以上序列正合. 则对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\ f_i \xrightarrow{\alpha_i} P_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_n \circ f_0} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_{i+1}} P_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{Im}\ f_i \longrightarrow 0$$

且对这些正合序列作直和，得正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{n} P_i \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n} P_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i \longrightarrow 0$$

其中 $\alpha=\mathrm{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$，$f=\mathrm{diag}\{f_n, f_{n-1}, \cdots, f_1, f_0\}$. 显然

$$\mathrm{Im}\ f \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i$$

从而有正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{n} P_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i \longrightarrow 0$$

且 $I \otimes_R$- 作用上述序列仍正合. 故 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\ f_i$ 是 1-强 PGF 模.

由命题 1，(v)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(viii)，(v)$\Longrightarrow$(vii)$\Longrightarrow$(viii) 显然.

(viii)$\Longrightarrow$(i)　设有 R-模正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 的投射维数有限，且 $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Im}\, f_i$ 是 PGF 模，由文献[9]的引理 3.8 和文献[15]的命题 1.4 知，$\mathrm{Im}\, f_i$ 是 PGF 模. 又对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_{i+1} \longrightarrow P_i \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_i \longrightarrow 0$$

由文献[9]的引理 3.8 知，P_i 是 PGF 模；由文献[10]的引理 3 知，P_i 是 Ding 模；由文献[8]的引理 2.4 知，P_i 是投射模. 因为 $M \cong \mathrm{Im}\, f_n$，故 M 是 PGF 模，所以对任意内射右 R-模 I，$\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(I, M)=0$. 故 M 是 n-强 PGF 模.

显然，对任意正整数 n，强 PGF 模一定是 n-强 PGF 模，反之不成立. 注意到 n-强 PGF 模定义中的每个 $\mathrm{Im}\, f_i$ 也是 n-强 PGF 模.

以下讨论 n-强 PGF 模、n-强 Ding 投射模及 n-强 Gorenstein 平坦模之间的关系.

引理 1 $n\text{-SPGF}(R) \subseteq n\text{-SDP}(R)$.

证 设 M 是 n-强 PGF 模，则存在 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射的. 由命题 1(ⅱ) 知，M 是 PGF 模. 由文献[10]的推论 1 知，M 是 Ding 投射模，所以对任意平坦模 F，$\mathrm{Ext}_{R}^{i\geqslant 1}(M, F)=0$. 故 M 是 n-强 Ding 投射模.

命题 3 $n\text{-SPGF}(R) = n\text{-SDP}(R) \cap n\text{-SGF}(R)$.

证 设 M 是 n-强 PGF 模. 由定义，M 是 n-SGF 模. 由引理 1 知 $M \in n\text{-SDP}(R) \cap n\text{-SGF}(R)$.

反之，设 $M \in n\text{-SDP}(R) \cap n\text{-SGF}(R)$. 因为 $M \in n\text{-SDP}(R)$，所以存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模. 因为 $M \in n\text{-SGF}(R)$，所以对任意右 R-模 I，$\mathrm{Tor}_{i\geqslant 1}^{R}(I, M)=0$. 故 $I \otimes_R -$ 作用在以上正合列仍正合. 故 M 是 n-强 PGF 模.

定理 2 设 R 是环，以下结论等价：

(ⅰ) $n\text{-SDP}(R) \subseteq n\text{-SGF}(R)$；

(ⅱ) $n\text{-SDP}(R) = n\text{-SPGF}(R)$；

(ⅲ) 对任意 $M \in n\text{-SDP}(R)$，有 $M^{+} \in n\text{-SGI}(R)$；

(ⅳ) $Inj^{+} \in (n\text{-SDP}(R))^{\perp}$.

证明 由命题 3，可得 (ⅰ)⇔(ⅱ).

(ⅰ)⟹(ⅲ) 由文献[16]的定理 3.2.1 易得.

(ⅲ)⟹(ⅰ) 设 $M \in n\text{-SDP}(R)$，则存在 R-模的正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，从而有正合序列

$$0 \longrightarrow M^{+} \longrightarrow P_0^{+} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{n-1}^{+} \longrightarrow M^{+} \longrightarrow 0$$

因为 $M^{+} \in n\text{-SGI}(R)$，所以对任意内射右 R-模 I，$\mathrm{Ext}_{R}^{i\geqslant 1}(I, M^{+})=0$. 从而有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(I, M^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(I, P_0^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(I, P_{n-1}^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(I, M^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, I^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(P_0, I^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_{n-1}, I^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(M, I^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (I \otimes_R M)^{+} \arrow[r] & (I \otimes_R P_0)^{+} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (I \otimes_R P_{n-1})^{+} \arrow[r] & (I \otimes_R M)^{+} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为图中第一行正合，所以第三行正合. 从而有正合列

$$0 \longrightarrow I \otimes_R M \longrightarrow I \otimes_R P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I \otimes_R P_0 \longrightarrow I \otimes_R M \longrightarrow 0$$

故 $M \in n\text{-SGF}(R)$.

(ⅲ)⟹(ⅳ) 设 I 是内射模，M 是 n-SDP 模，因为 $\mathrm{Ext}_{R}^{1}(M, I^{+}) \cong \mathrm{Ext}_{R}^{1}(I, M^{+})$，$M^{+} \in n\text{-SGI}(R)$，所以结论成立.

(ⅳ)⟹(ⅲ) 设 M 是 n-SDP 模. 则存在 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模，从而有正合列

$$0 \longrightarrow M^+ \longrightarrow P_0^+ \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{n-1}^+ \longrightarrow M^+ \longrightarrow 0 \tag{1}$$

其中每个 $P_i{}^+$ 是内射模．设 I 是内射模，且

$$K_i = \mathrm{Ker}(P_i \longrightarrow P_{i-1}) \in n\text{-SDP}(R) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$P_{-1} = M$$

从而

$$\mathrm{Ext}_R^1(K_i, I^+) \cong \mathrm{Ext}_R^1(I, K_i^+) = 0$$

则 $\mathrm{Hom}_R(I, -)$ 保持序列(1) 正合．故 $M^+ \in n$-SGI(R)．

参考文献：

[1] AUSLANDER M，BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，1969.

[2] ENOCHS E E，JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift，1995，220(1)：611-633.

[3] BENNIS D，MAHDOU N. Strongly Gorenstein Projective，Injective，and Flat Modules [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2007，210(2)：437-445.

[4] ZHAO G Q，HUANG Z Y. n-Strongly Gorenstien Projective，Injective and Flat Modules [J]. Communication in Algebra，2011，39(8)：3044-3062.

[5] GILLESPIE J. Gorenstein Complexes and Recollements from Cotorsion Pairs [J]. Advances in Mathematics，2016，291：859-911.

[6] 王 兴，杨 刚. Gorenstein AC-投射模的函子伴随性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：101-108.

[7] 李倩倩，杨晓燕. n-强 Gorenstien AC 投射模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：36-40.

[8] DING N Q，LI Y L，MAO L X. Strongly Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，2009，86(3)：323-338.

[9] ŠAROCH J，ŠT′OVÍĈEK J. Singular Compactness and Definability for Σ-Cotorsion and Gorenstein Modules [J]. Selecta Mathematica，2020，26(2)：1-40.

[10] IACOB A. Projectively Coresolved Gorenstein Flat and Ding Projective Modules [J]. Communications in Algebra，2020，48(7)：2883-2893.

[11] 赵自红. PGF-复形与强 PGF-模(复形) [D]. 兰州：兰州理工大学，2020.

[12] XING J M. Strongly Ding Projective，Injective and Flat Modules [J]. Applied Mechanics and Materials，2011，50/51：176-179.

[13] 刘妍平. 一类特殊的 Ding-模及其性质 [D]. 兰州：西北师范大学，2013.

[14] 梁惠春，张文汇. n-强 Ding 分次模 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(4)：15-19.

[15] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2004，189(1/2/3)：167-193.

[16] ENOCHS E E，JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin：Walter de Gruyter，2000.

责任编辑　廖坤