DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2022.02.010

$2K_1 \cup I_n$ 的匹配等价图类

高尚，　马海成

青海民族大学 数学与统计学院，西宁 810007

摘要：匹配多项式是一种组合计数多项式，与图的特征多项式、色多项式等有许多联系．对于无圈图，它等于特征多项式；对于一般图，它是该图路树的特征多项式的一个因式．每个图都有一个匹配多项式，但一个匹配多项式所确定的图不一定是唯一的，即不同构的图可能共享一个匹配多项式．如果一个图的匹配多项式唯一确定这个图，则称这个图是匹配唯一的．如果两个不同构的图拥有相同的匹配多项式，则称这两个图是匹配等价的．自提出匹配等价的概念以来，虽然已经有了许多研究，但对于给定的图 G，想要完全刻画出它的匹配等价图类仍是十分困难的．本文在前人的研究基础之上，通过组合计数和数学归纳法计算了 $2K_1 \cup I_n$ 的匹配等价图的个数，并且利用组合分析的方法刻画了 $2K_1 \cup I_n$ 以及它的补图的匹配等价图类．

关 键 词：匹配多项式；匹配等价；匹配唯一

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2022)02-0082-07　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

The Class of Matching Equivalent Graphs of $2K_1 \cup I_n$

GAO Shang，　MA Haicheng

School of Mathematics and Statistics，QinghaiMinzu University，Xining 810007，China

Abstract：The matching polynomial is a kind of combinatorial counting polynomial，which has many relations with the characteristic polynomial and the chromatic polynomial of the graph. For a acyclic graph，it is equal to the characteristic polynomial；for a general graph，it is a factor of the characteristic polynomial of the path tree of the graph. Every graph has a matching polynomial，but the graph determined by a matching polynomial is not necessarily unique，that is，different graphs may share the same matching polynomial. If the matching polynomial of a graph uniquely determines the graph，then the graph is said to be matching unique. If two graphs have the same matching polynomial，then the two graphs are said to be matching equivalent. Since the concept of matching equivalence as proposed，it is very difficult to characterize the class of matching equivalent graphs for a given graph G. On the basis of previous studies，the

收稿日期：2021-01-19

基金项目：国家自然科学基金项目(11561056，11661066)；青海省自然科学基金项目(2016-ZJ-914)；青海民族大学研究生创新项目(07M2021001).

作者简介：高尚，硕士研究生，主要从事组合数学的研究.

通信作者：马海成，教授.

number of matching equivalent graphs of $2K_1 \cup I_n$ calculated by using combination counting and mathematical induction, and the classes of matching equivalent graphs of $2K_1 \cup I_n$ and its complement graphs recharacterized by using combination analysis.

Key words: matching polynomial; matching equivalence; matching unique

本文仅考虑有限无向的简单图．设G是一个n阶图，G的一个匹配是指G的一个生成子图，它的每一个分支是孤立边或者孤立点，k-匹配是指其中有k条边的匹配．文献[1]定义了图G的匹配多项式为

$$\mu(G, x)=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k p(G, k)x^{n-2k}$$

这里，$p(G, k)$是G的所有k-匹配的数目，并且约定$p(G, 0)=1$．在文中为了方便，将$\mu(G, x)$简记为$\mu(G)$．若图G和H有$\mu(G, x)=\mu(H, x)$，则称图G和H是匹配等价的，记为$G\sim H$．设G是一个图，以$[G]$表示图G的匹配等价图的集合，以$\sigma(G)$表示集合$[G]$的元的个数，即$|[G]|$．若$\sigma(G)=1$，称图G是匹配唯一的．

以K_1表示一个孤立点．以$P_n(n\geqslant 2)$和$C_n(n\geqslant 3)$分别表示有n个点的路和圈．以$Q(m, n)$表示圈C_{m+1}的一个点与P_{n+1}的一个端点粘接后得到的图．以$T_{i,j,k}$表示只有1个3度点、3个1度点，且这个3度点到3个1度点的距离分别为i, j, k的树．以$I_n(n\geqslant 6)$表示路P_{n-4}的两个端点分别粘接一个P_3的2度点后得到的图．以$K_{1,4}$表示有5个点的星图．以$\overline{G}$表示图G的补图．文中没有定义的概念和术语参见文献[2]．

匹配多项式是图的一种组合计数多项式，它带有图的许多信息，在物理和化学上有着极其重要的应用[3-8]．文献[9-10]提供了一些与匹配多项式相关的研究结果．文献[11-12]虽然给出了匹配最大根小于等于2的图，以及这些图的补图匹配等价的一种规律，然而对于给定的图G，完全刻画集合$[G]$是很困难的．文献[13]确定了集合$[P_m]$，$[K_1\cup C_m]$，$[\overline{P_m}]$和$[\overline{K_1\cup C_m}]$，文献[14]确定了集合$[K_1\cup P_m]$和$[\overline{K_1\cup P_m}]$，文献[15]确定了集合$[2K_1\cup P_m]$和$[\overline{2K_1\cup P_m}]$，文献[16]确定了集合$[K_1\cup I_m]$和$[\overline{K_1\cup I_m}]$．在本文中，我们计算$2K_1\cup I_n$的匹配等价图的个数，并确定集合$[2K_1\cup I_m]$，进而确定集合$[\overline{2K_1\cup I_m}]$．

文献[14]的定理1给出了$K_1\cup P_m$的匹配等价图类．为了方便，我们将与$K_1\cup P_m$的匹配等价的图的集合记为Φ_1，则$|\Phi_1|=\sigma(K_1\cup P_m)$．

文献[15]的定理1和定理2给出了$2K_1\cup P_m$的匹配等价图类．通过观察我们发现，除了$m+1=3\times 2^{n-1}(n\geqslant 3)$的情形外，$2K_1\cup P_m$的每一个匹配等价图包含且仅包含一个路分支．而当$m+1=3\times 2^{n-1}(n\geqslant 3)$时，$2K_1\cup P_m$的匹配等价图中含有$Q(2, 1)$分支的等价图是：$Q(2, 1)\cup H$，$H\in\Delta_4$，其中的每一个$H$有且恰有两个不同的路分支．用$\Phi_2$表示$2K_1\cup P_m$的每一个匹配等价图中删去一条路分支后得到的图的集合．于是

$$|\Phi_2|=\begin{cases}\sigma(2K_1\cup P_m)+2n-3 & m+1=3\times 2^{n-1}, n\geqslant 3\\ \sigma(2K_1\cup P_m) & \text{否则}\end{cases}$$

为了方便，本文用$\sigma(G, H)$表示图G的所有匹配等价图中含有分支H的等价图的个数．

引理 1　(i)　若$m+1=3\times 2^{n-1}$对某个正整数n成立，则

$$\sigma(3K_1\cup P_m, P_2)=\begin{cases}1 & n=1\\ 2 & n=2\\ \binom{n+1}{3}+2 & n\geqslant 3\end{cases}$$

$$\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2 \cup P_3)=\begin{cases}0 & n \leqslant 2 \\ \binom{n-1}{2}+1 & n \geqslant 3\end{cases}$$

(ii) 若 $m+1$ 的最大奇因数不是 3，则 $\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2)=0$.

证 (i) $H \sim 3K_1 \cup P_m$，H_1 是 H 的连通分支，使得

$$M_1(H_1)=M_1(P_m) \qquad H=H_1 \cup H_2$$

对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，结论明显. 当 $n=2$ 时，由文献[16]的引理 2，3 和 4 得，$H_1=P_5, C_3, T_{1,1,1}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1, 3K_1 \cup P_2, 2K_1 \cup P_2$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_5, P_2)=0+1+1=2$$

$$\sigma(3K_1 \cup P_5, P_2 \cup P_3)=0+0+0=0$$

当 $n=3$ 时，由文献[16]的引理 2，3 和 4 得，$H_1=P_{11}, C_6, T_{1,1,4}, Q(2,1), T_{1,2,2}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1$，$3K_1 \cup P_5, 2K_1 \cup P_5, 2K_1 \cup P_3 \cup P_5, 2K_1 \cup P_3 \cup C_3$，由文献[16]的引理 10 得

$$\sigma(3K_1 \cup P_{11}, P_2)=0+2+2+2+0=6$$

$$\sigma(3K_1 \cup P_{11}, P_2 \cup P_3)=0+0+0+2+0=2$$

当 $n \geqslant 4$ 时，由文献[16]的引理 2，3 和 4 得，$H_1=P_m, C_{m_2+1}, T_{1,1,m_2-1}(m_2+1=3 \times 2^{n-2})$，相应地，$H_2 \sim 3K_1, 3K_1 \cup P_{m_2}, 2K_1 \cup P_{m_2}$，由文献[16]的引理 10 得

$$\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2)=0+\binom{n}{3}+2+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}+2$$

$$\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2 \cup P_3)=0+\binom{n-2}{2}+1+n-2=\binom{n-1}{2}+1$$

(ii) 按 $m+1$ 的最大奇因数是 1，9，15 或其他奇数分以下(a)—(d) 4 种情形.

设 $H \sim 3K_1 \cup P_m$，H_1 是 H 的连通分支，使得

$$M_1(H_1)=M_1(P_m) \qquad H=H_1 \cup H_2$$

(a) $m+1=2^{n+1}$. 当 $n=1$ 时，$\sigma(3K_1 \cup P_3, P_2)=0$，假设结论对 $m_2+1=2^n$ 成立，且对 n 用数学归纳法，$H_1=P_m, C_{m_2+1}, T_{1,1,m_2-1}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1, 3K_1 \cup P_{m_2}, 2K_1 \cup P_{m_2}$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2)=0+0+0=0$$

(b) $m+1=9 \times 2^{n-1}$. 当 $n=1$ 时，$\sigma(3K_1 \cup P_8, P_2)=0$. 当 $n=2$ 时，$H_1=P_{17}, C_9, T_{1,1,7}, T_{1,2,3}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1, 3K_1 \cup P_8, 2K_1 \cup P_8, 2K_1 \cup C_3 \cup P_8$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_{17}, P_2)=0+0+0+0=0$$

假设结论对 $m_2+1=9 \times 2^{n-2}$ 成立，且对 n 用数学归纳法，$H_1=P_m, C_{m_2+1}, T_{1,1,m_2-1}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1$，$3K_1 \cup P_{m_2}, 2K_1 \cup P_{m_2}$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2)=0+0+0=0$$

(c) $m+1=15 \times 2^{n-1}$. 当 $n=1$ 时，$\sigma(3K_1 \cup P_{14}, P_2)=0$. 当 $n=2$ 时，$H_1=P_{29}, C_{15}, T_{1,1,13}, T_{1,2,4}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1, 3K_1 \cup P_{14}, 2K_1 \cup P_{14}, 2K_1 \cup C_3 \cup P_{14}$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_{29}, P_2)=0+0+0+0=0$$

假设结论对 $m_2+1=15 \times 2^{n-2}$ 成立，且对 n 用数学归纳法，$H_1=P_m, C_{m_2+1}, T_{1,1,m_2-1}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1$，$3K_1 \cup P_{m_2}, 2K_1 \cup P_{m_2}$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_m, P_2)=0+0+0=0$$

(d) $m+1=2^{n-1}(2k+1)$，$k(\neq 0,1,4,7)$ 为整数. 当 $n=1$ 时，$\sigma(3K_1 \cup P_{2k}, P_2)=0$. 假设结论对 $m_2+1=2^{n-2}(2k+1)$ 成立，且对 n 用数学归纳法，$H_1=P_m, C_{m_2+1}, T_{1,1,m_2-1}$，相应地，$H_2 \sim 3K_1$，

$3K_1 \cup P_{m_2}$，$2K_1 \cup P_{m_2}$，则

$$\sigma(3K_1 \cup P_m,\ P_2) = 0 + 0 + 0 = 0$$

引理 2　若 $m+1 = 3 \times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则 $3K_1 \cup P_m$ 的匹配等价图中含有分支 P_2 的图是下面的图：

(i)　$n=1$ 时，$3K_1 \cup P_2$；

(ii)　$n=2$ 时，$3K_1 \cup P_2 \cup C_3$，$2K_1 \cup P_2 \cup T_{1,1,1}$；

(iii)　$n \geqslant 3$ 时，$3K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$；

$2K_1 \cup P_2 \cup T_{1,1,1} \cup C_6 \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$，…，$2K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_{12} \cup \cdots \cup T_{1,1,3\times 2^{n-2}-2}$；

$K_1 \cup P_2 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,1,4} \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$，…，$K_1 \cup P_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_{12} \cup \cdots \cup T_{1,1,3\times 2^{n-3}-2} \cup T_{1,1,3\times 2^{n-2}-2}$；

$P_2 \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,1,4} \cup T_{1,1,10} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$，…，$P_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_{12} \cup \cdots \cup T_{1,1,3\times 2^{n-4}-2} \cup T_{1,1,3\times 2^{n-3}-2} \cup T_{1,1,3\times 2^{n-2}-2}$；

$2K_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup Q(2,1) \cup C_3 \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$；

$K_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup Q(2,1) \cup T_{1,1,1} \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$，…，$K_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup Q(2,1) \cup C_3 \cup C_{12} \cup \cdots \cup T_{1,1,3\times 2^{n-2}-2}$；

$P_2 \cup P_3 \cup Q(2,1) \cup T_{1,1,1} \cup T_{1,1,10} \cup \cdots \cup C_{3\times 2^{n-2}}$，…，$P_2 \cup P_3 \cup Q(2,1) \cup C_3 \cup C_{12} \cup \cdots \cup T_{1,1,3\times 2^{n-3}-2} \cup T_{1,1,3\times 2^{n-2}-2}$.

证　由文献[16]的引理 2,3 和 4 得，这些图均等价于 $3K_1 \cup P_m$，且含有分支 P_2. 对 $n \geqslant 3$，它们可以分为仅含一条路分支 P_2 的 4 类：不含 T-形树分支的 1 张图；含 1 个 T-形树分支的 $n-1$ 张图；含 2 个 T-形树分支的 $\binom{n-1}{2}$ 张图；含 3 个 T-形树分支的 $\binom{n-1}{3}$ 张图. 以及含有两条路分支 $P_2 \cup P_3$ 的 3 类：不含 T-形树分支的 1 张图；含 1 个 T-形树分支的 $n-2$ 张图；含 2 个 T-形树分支的 $\binom{n-2}{2}$ 张图. 共 $\binom{n+1}{3}+2$ 张图. 由引理 1 得，图的个数也等于 $\sigma(3K_1 \cup P_m,\ P_2)$.

引理 3　若 $m \geqslant 2$ 是整数，$\sigma(3K_1 \cup P_m,\ 2P_2) = 0$，$\sigma(3K_1 \cup P_m,\ P_2 \cup P_4) = 0$.

证　由引理 1 和引理 2，结果显然.

为了方便，用 Φ_3 表示 $3K_1 \cup P_m$ 的含有分支 P_2 的所有匹配等价图中删去 P_2 后得到的图的集合，即引理 2 中的每张图删去 P_2 后得到的图的集合，则 $|\Phi_3| = \sigma(3K_1 \cup P_m,\ P_2)$. 用 Φ_4 表示 $3K_1 \cup P_m$ 的含有分支 $P_2 \cup P_3$ 的所有匹配等价图中删去 $P_2 \cup P_3$ 后得到的图的集合，即引理 2 中的每张图删去 $P_2 \cup P_3$ 后得到的图的集合，则 $|\Phi_4| = \sigma(3K_1 \cup P_m,\ P_2 \cup P_3)$.

为了找到 $2K_1 \cup I_m (m \geqslant 6)$ 的匹配等价图类，按 $m-3$ 所含最大奇因数是 1,3,9,15 或其他奇数分为 5 类.

定理 1　(i)　若 $m-3 = 2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\sigma(2K_1 \cup I_m) = \binom{n+2}{3} + n$$

此时 $2K_1 \cup I_m$ 的匹配等价图分为两类：含 I-形分支的是 $I_t \cup H_2$，$H_2 \in \Phi_2$，这样的图共有 $\binom{n+1}{3}+n$ 张；含 $K_{1,4}$-形分支的是 $K_{1,4} \cup H_2$，$H_2 \in \Phi_1$，这样的图共有 $\binom{n+1}{2}$ 张.

(ii)　若 $m-3 = 2^{n-1}(2k+1)$ 对某对正整数 n，$k(\neq 1,4,7)$ 成立，则

$$\sigma(2K_1 \cup I_m) = \binom{n+2}{3} + n$$

此时 $2K_1 \cup I_m$ 的匹配等价图分为两类：含 I-形分支的是 $I_t \cup H_2$，$H_2 \in \Phi_2$，这样的图共有 $\binom{n+1}{3}+n$ 张；

含 $K_{1,4}$-形分支的是 $K_{1,4}\cup H_2$，$H_2\in\Phi_1$，这样的图共有 $\binom{n+1}{2}$ 张.

(iii) 若 $m-3=9\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\sigma(2K_1\cup I_m)=\begin{cases}2 & n=1\\ \binom{n+2}{3}+2n+1 & n\geqslant 2\end{cases}$$

此时 $2K_1\cup I_m$ 的匹配等价图分为两类：含 I-形分支的是 $I_t\cup H_2$，$H_2\in\Phi_2$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n\geqslant 2$ 时，这样的图共有 $\binom{n+1}{3}+2n$ 张；含 $K_{1,4}$-形分支的是 $K_{1,4}\cup H_2$，$H_2\in\Phi_1$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n\geqslant 2$ 时，这样的图共有 $\binom{n+1}{2}+1$ 张.

(iv) 若 $m-3=15\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\sigma(2K_1\cup I_m)=\begin{cases}2 & n=1\\ \binom{n+2}{3}+2n+2 & n\geqslant 2\end{cases}$$

此时 $2K_1\cup I_m$ 的匹配等价图分为两类：含 I-形分支的是 $I_t\cup H_2$，$H_2\in\Phi_2$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n\geqslant 2$ 时，这样的图共有 $\binom{n+1}{3}+2n+1$ 张；含 $K_{1,4}$-形分支的是 $K_{1,4}\cup H_2$，$H_2\in\Phi_1$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n\geqslant 2$ 时，这样的图共有 $\binom{n+1}{2}+1$ 张.

(v) 若 $m-3=3\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\sigma(2K_1\cup I_m)=\begin{cases}4 & n=1\\ 10 & n=2\\ \binom{n+1}{2}+3\binom{n+1}{3}+\binom{n-1}{2}+6n+1 & n\geqslant 3\end{cases}$$

此时 $2K_1\cup I_m$ 的匹配等价图分为5类：含 I-形分支的是 $I_t\cup H_2$，$H_2\in\Phi_2$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n=2$ 时有3张图，当 $n\geqslant 3$ 时有 $\binom{n+1}{3}+6n-7$ 张图；含 $K_{1,4}$-形分支的是 $K_{1,4}\cup H_2$，$H_2\in\Phi_1$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n=2$ 时有3张图，当 $n\geqslant 3$ 时有 $\binom{n+1}{2}+3$ 张图；含 $Q(2,2)$-形分支的是 $Q(2,2)\cup H_2$，$H_2\in\Phi_3$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n=2$ 时有2张图，当 $n\geqslant 3$ 时有 $\binom{n+1}{3}+2$ 张图；含 $Q(3,1)$-形分支的是 $Q(3,1)\cup H_2$，$H_2\in\Phi_3$，当 $n=1$ 时有1张图，当 $n=2$ 时有2张图，当 $n\geqslant 3$ 时有 $\binom{n+1}{3}+2$ 张图；含 $T_{1,3,3}$-形分支的是 $T_{1,3,3}\cup H_2$，$H_2\in\Phi_4$，当 $n=1$ 时有0张图，当 $n=2$ 时有0张图，当 $n\geqslant 3$ 时有 $\binom{n-1}{2}+1$ 张图.

证 设 $H\sim 2K_1\cup I_m$，由 $M_1(H)=2$ 及文献[16]的引理2(2)知，H 必有一连通分支 $H_1\in\Omega_2$，$H=H_1\cup H_2$.

(i) 分以下3种情形：

(a) 若 $H_1=I_t(t\geqslant 6)$，则

$$2K_1\cup I_m\sim H=I_t\cup H_2$$

两边并 P_{m-4}，利用文献[16] 的引理 13(8) 得

$$P_{m-4}\cup 2K_1\cup I_m\sim P_{m-4}\cup I_t\cup H_2\sim P_{t-4}\cup I_m\cup H_2$$

则

$$2K_1\cup P_{m-4}\sim P_{t-4}\cup H_2$$

由文献[15] 的定理 1 和定理 2 知，这样的 $H_2\in\Phi_2$.

(b) 若 $H_1=K_{1,4}$，则

$$2K_1\cup I_m\sim H=K_{1,4}\cup H_2$$

两边并 $P_{m-4}\cup P_2$，利用文献[16] 的引理 13(7),(8) 得

$$P_{m-4}\cup P_2\cup 2K_1\cup I_m\sim P_{m-4}\cup P_2\cup K_{1,4}\cup H_2\sim P_{m-4}\cup K_1\cup I_6\cup H_2\sim K_1\cup P_2\cup I_m\cup H_2$$

则

$$K_1\cup P_{m-4}\sim H_2$$

由文献[14] 的定理 1 知，这样的 $H_2\in\Phi_1$.

(c) 若 $H_1=Q(2,2)$,$Q(3,1)(\sim Q(2,2))$,$T_{2,2,2}(\sim P_2\cup Q(2,2))$,$T_{1,3,3}(\sim P_3\cup Q(2,2))$,$T_{1,2,5}(\sim P_4\cup Q(2,2))$，均可设

$$2K_1\cup I_m\sim H=Q(2,2)\cup H_2$$

两边并 $K_1\cup P_{m-4}$，利用文献[16] 的引理 13(3),(8) 得

$$3K_1\cup P_{m-4}\cup I_m\sim K_1\cup P_{m-4}\cup Q(2,2)\cup H_2\sim P_{m-4}\cup I_6\cup H_2\sim P_2\cup I_m\cup H_2$$

则

$$3K_1\cup P_{m-4}\sim P_2\cup H_2.$$

由引理 1(ⅱ) 知，这样的 H_2 不存在.

(ⅱ)—(ⅳ) 的证明与 (ⅰ) 类似，略.

(ⅴ)　分以下 7 种情形：

(a) 若 $H_1=I_t(t\geqslant 6)$，与 (ⅰ) 的情形(a) 类似，这样的 $H_2\in\Phi_2$.

(b) 若 $H_1=K_{1,4}$，与 (ⅰ) 的情形(b) 类似，这样的 $H_2\in\Phi_1$.

(c) 若 $H_1=Q(2,2)$，则

$$2K_1\cup I_m\sim H=Q(2,2)\cup H_2$$

与 (ⅰ) 的情形(c) 类似，可得到

$$3K_1\cup P_{m-4}\sim P_2\cup H_2$$

由引理 2 知，这样的 $H_2\in\Phi_3$.

(d) 若 $H_1=Q(3,1)$，由 $Q(3,1)\sim Q(2,2)$，与情形(c) 类似，这样的 $H_2\in\Phi_3$.

(e) 若 $H_1=T_{1,3,3}$，由文献[16] 的引理 13(5) 得

$$2K_1\cup I_m\sim H=T_{1,3,3}\cup H_2\sim P_3\cup Q(2,2)\cup H_2$$

与 (ⅰ) 的情形(c) 类似，可得到

$$3K_1\cup P_{m-4}\sim P_2\cup P_3\cup H_2$$

由引理 1 和引理 2 知：当 $n\leqslant 2$ 时，这样的 H_2 不存在；当 $n\geqslant 3$ 时，这样的 $H_2\in\Phi_4$.

(f) 若 $H_1=T_{2,2,2}$. 由文献[16] 的引理 13(4) 得

$$2K_1\cup I_m\sim H=T_{2,2,2}\cup H_2\sim P_2\cup Q(2,2)\cup H_2$$

与 (ⅰ) 的情形(c) 类似，可得到

$$3K_1\cup P_{m-4}\sim 2P_2\cup H_2$$

由引理 3 知，这样的 H_2 不存在.

(g) 若 $H_1 = T_{1,2,5}$，由文献[16]的引理 13(6)得

$$2K_1 \cup I_m \sim H = T_{1,2,5} \cup H_2 \sim P_4 \cup Q(2, 2) \cup H_2$$

与(i)的情形(c)类似，可得到

$$3K_1 \cup P_{m-4} \sim P_2 \cup P_4 \cup H_2$$

由引理 3 知，这样的 H_2 不存在.

推论 1 对于定理 1 所述的每一种情形，$\overline{2K_1 \cup I_m}$ 的匹配等价图是定理 1 所述的那些图的补图.

证 由文献[16]的引理 14，结论显然.

参考文献:

[1] GODSIL C D, GUTMAN I. On the Theory of the Matching Polynomial [J]. Journal of Graph Theory, 1981, 5(2): 137-144.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2008.

[3] KUNZ H. Location of the Zeros of the Partition Function for Some Classical Lattice Systems [J]. Physis Letters A, 1970, 32(5): 311-312.

[4] HOSOYA H. Topological Index, a Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons [J]. Bulletin of the Chemical Society of Japan, 1971, 44(9): 2332-2339.

[5] FARRELL E J. An Introduction to Matching Polynomials [J]. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 1979, 27(1): 75-86.

[6] JERRUM M. Two-Dimensional Monomer-Dimer Systems Are Computationally Intractable [J]. Journal of Statistical Physis, 1987, 48(1/2): 121-134.

[7] DONG F M. A New Expression for Matching Polynomials [J]. Discrete Mathematics, 2012, 312(4): 803-807.

[8] GUTMAN I, WAGNER S. The Matching Energy of a Graph [J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160(15): 2177-2187.

[9] 唐保祥，任韩. 2 类图完美对集数的计算公式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(10)：13-15.

[10] 刘寅，王鼎. 完全图 K_{2^n} 的边传递循环覆盖 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(2)：90-94.

[11] 马海成. 匹配最大根小于 2 的图的匹配等价类 [J]. 系统科学与数学，2003，23(3)：337-342.

[12] 马海成. 匹配最大根小于等于 2 的图的匹配等价 [J]. 数学学报，2006，49(6)：1355-1360.

[13] 马海成. 两类图的匹配等价类 [J]. 数学研究，2000，33(2)：218-222.

[14] 马海成. 点并路的匹配等价图类 [J]. 青海师范大学学报(自然科学版)，2003，19(1)：6-8，13.

[15] 解承玲，马海成. 两个点并路的匹配等价图类 [J]. 山东大学学报(理学版)，2021，56(1)：29-34.

[16] 马海成. $K_1 \cup I_n$ 的匹配等价图类 [J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2005，41(5)：127-130.

责任编辑 廖坤