第 44 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2022 年 2 月
Vol. 44　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2022

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.02.011

一类分数阶奇异椭圆方程无穷多解的存在性

吴卓伦，　商彦英

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：本文研究一类带有分数阶 Sobolev-Hardy 临界指数的奇异椭圆方程，通过$(PS)_c^*$ 条件克服了紧性缺失，利用对偶喷泉定理证明了该方程无穷多解的存在性.

关　键　词：分数阶 Laplacian 算子；Sobolev-Hardy 临界指数；对偶喷泉定理；$(PS)_c^*$ 条件；奇异椭圆方程

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673－9868(2022)02－0089－07

Existence of Infinite Solutions for Fractional Singular Elliptic Equations

WU Zhuolun，　SHANG Yanying

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we studiedy a class of singular elliptic equations with fractional Sobolev-Hardy critical exponents. We overcome the lack of compactness by using the $(PS)_c^*$ condition, and proved the existence of infinite solutions of the equation by using the dual fountain theorem.

Key words: fractional Laplacian operator; Sobolev-Hardy critical index; dual fountain theorem; $(PS)_c^*$ condition; singular elliptic equation

本文中，我们研究如下问题：

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \gamma \dfrac{u}{|x|^{2s}} = \dfrac{|u|^{2_s^*(\alpha)-2}u}{|x|^{\alpha}} + \lambda g(x, u) & x \in \Omega\backslash\{0\} \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ 是具有光滑边界的有界区域，$0 < s < 1$，$0 \leqslant \alpha < 2s < N$，$0 \leqslant \gamma < \gamma_H =$

收稿日期：2021－04－13

基金项目：国家自然科学基金项目(11971393).

作者简介：吴卓伦，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：商彦英，副教授.

$4^s \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{N+2s}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{N-2s}{4}\right)}$，$2_s^*(\alpha)=\dfrac{2(N-\alpha)}{N-2s}$ 是 Sobolev-Hardy 临界指数，$2_s^*(0)=2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}$ 是 Sobolev 临界指数，λ 是正参数.

近年来，带有 Sobolev-Hardy 临界指数的奇异椭圆方程受到广泛关注. 当 $s=1$ 时，方程即是整数阶方程，文献[1-3] 利用山路引理得到了这类整数阶方程存在正解，文献[4] 利用极大极小值原理得到了其变号解. 文献[5-6] 在 $g(x, u)$ 满足关于 u 是奇函数的条件下，得到了这类整数阶方程无穷多解的存在性.

当 $0<s<1$ 时，关于分数阶方程解的存在性可参见文献[7-8]. 文献[9] 得到了这类分数阶方程多解的存在性. 文献[10] 在以下条件(G) 成立时，得到了 Sobolev 临界分数阶 p-Laplacian 方程无穷多解的存在性：

(G) 存在 $d_1, r_0>0$，$\tau>\dfrac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-p}$，使得 $g(x, u)^\tau \leqslant d_1\left(\dfrac{1}{p} g(x, u)-G(x, u)\right)$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 $\|u\| \geqslant r_0$ 成立.

条件(G) 保证了 PS 序列的有界性. 我们在文献[10] 的基础上，考虑了分数阶椭圆方程在 Sobolev-Hardy 临界情况下无穷多解的存在性. 在 Sobolev-Hardy 临界情况下不需要条件(G) 也能证明 PS 序列有界. 本文通过文献[11] 的方法，在没有条件(G) 的情况下，证明了能量泛函在某一范围内满足 $(PS)_{c^*}$ 条件，运用对偶喷泉定理，得到了方程(1) 存在无穷多个弱解.

本文中，非线性项 $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足以下条件：

(g_1) $\lim\limits_{|t| \rightarrow \infty} \dfrac{g(x, t)}{t^{2_s^*(\alpha)-1}}=0$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立；

(g_2) $\lim\limits_{|t| \rightarrow 0} \dfrac{g(x, t)}{t}=+\infty$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立；

(g_3) $g(x,-t)=-g(x, t)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \Omega$ 成立.

我们用 $H^s(\Omega)$ 表示分数阶 Sobolev 空间[12]，其范数定义为

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}=\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d} x \mathrm{d} y\right)^{\frac{1}{2}}$$

泛函空间为

$$X_0^s(\Omega)=\{u \in H^s(\Omega): \text{当 } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \text{ 时，} u=0 \text{ 几乎处处成立.}\}$$

记空间的范数为

$$\|u\|_{X_0^s(\Omega)}=\left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d} x \mathrm{d} y-\gamma \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} \mathrm{d} x\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\gamma<\gamma_h$ 时，Sobolev-Hardy 最佳常数[13] 定义为

$$\Lambda_{\gamma, s, \alpha}=\inf _{u \in X_0^s(\Omega) \backslash\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d} x \mathrm{d} y-\gamma \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} \mathrm{d} x}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d} x\right)^{\frac{2}{2_s^*(\alpha)}}} \tag{2}$$

方程(1) 对应的能量泛函为

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_{\Omega} \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d} x-\lambda \int_{\Omega} G(x, u) \mathrm{d} x$$

方程的解与泛函的临界点一一对应. 本文中用 C, C_i 表示各种正常数.

我们的主要结果如下：

定理 1　假设条件$(g_1)-(g_3)$成立，则存在$\lambda^*>0$，对任意$\lambda\in(0,\lambda^*)$，方程(1)有无穷多个弱解$\{u_k\}\subset X_0^s(\Omega)$，满足：$J(u_k)<0$，且当$k\to+\infty$时，$J(u_k)\to 0$.

引理 1[14]　假设$\{u_n\}\subset X_0^s(\Omega)$是一个有界序列，当$2<p_n\leqslant 2_s^*(\alpha)(p_n\to 2_s^*(\alpha)，n\to\infty)$时，存在一个子列(仍记为$\{u_n\}$)满足：

(i)　在$L^2(\Omega)$中，$\dfrac{u_n}{x}\rightharpoonup\dfrac{u}{x}$；

(ii)　当$n\to\infty$时，$\displaystyle\int_\Omega\frac{|u_n|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{|u_n-u|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\to\int_\Omega\frac{|u|^2}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x$；

(iii)　当$n\to\infty$时，对任意的$v\in X_0^s(\Omega)$，$\displaystyle\int_\Omega\frac{|u_n|^{p_n-2}}{|x|^\alpha}u_n v\mathrm{d}x\to\int_\Omega\frac{|u|^{2_s^*(\alpha)-2}}{|x|^\alpha}uv\mathrm{d}x$.

引理 2[15](对偶喷泉定理)　设X是Banach空间，满足$J\in C^1(X,\mathbb{R})$是偶泛函，$X_j(j=1,2,\cdots)$为X上的一维子空间，且$X=\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}X_j}$，记$Y_k=\bigoplus_{j=1}^{k}X_j$，$Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty}X_j}$，$k$为自然数，如果存在$k_0>0$，对任意的$k\geqslant k_0$，存在$\rho_k>r_k>0$，使得以下条件成立：

(B_1)　$a_k=\inf\limits_{u\in Z_k}J(u)\geqslant 0$；

(B_2)　$b_k=\max\limits_{u\in Y}J(u)<0$；

(B_3)　$d_k=\inf\limits_{u\in Z_k}J(u)\to 0(k\to\infty)$；

(B_4)　对任意的$c\in[d_{k_0},0)$，J满足$(\mathrm{PS})_c^*$条件.

则J有一个临界点序列$\{u_k\}$，且$J(u_k)<0\ (k=1,2,\cdots)$，$J(u_k)\to 0(k\to+\infty)$.

J满足$(\mathrm{PS})_c^*$条件是指：对于X中所有满足$n_j\to\infty$时，$u_{n_j}\in Y_{n_j}$，$J(u_{n_j})\to c$，$J|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j})\to 0$的序列$\{u_{n_j}\}$，都包含一个收敛的子序列，且收敛到$J$的临界点.

引理 3　假设g满足条件(g_1)，则存在常数$C>0$，使得

$$G(x,u)-\frac{1}{2}g(x,u)u\leqslant C+|u|^{2_s^*(\alpha)}\tag{3}$$

证　由条件(g_1)可以得到

$$g(x,u)u=o(|u|^{2_s^*(\alpha)})\qquad G(x,u)=o(|u|^{2_s^*(\alpha)})\qquad |u|\to\infty$$

所以

$$|g(x,u)u|\leqslant C_1+|u|^{2_s^*(\alpha)}\qquad |G(x,u)|\leqslant C_2+\frac{1}{2}|u|^{2_s^*(\alpha)}$$

记

$$C=\frac{1}{2}C_1+C_2$$

则(3)式成立.

引理 4　假设条件(g_1)成立，则对任意的$\beta_0>0$，存在$\lambda^*>0$，使得对任意$\lambda\in(0,\lambda^*)$，J都满足$(\mathrm{PS})_c^*$条件，其中$c\in\left(-\infty,\dfrac{2s-\alpha}{2(N-\alpha)}\Lambda_{\gamma,s,\alpha}^{\frac{N-\alpha}{2s-\alpha}}-\beta_0\right)$.

证　设$\{e_j\}$是$X_0^s(\Omega)$中的一组标准规范正交基，$X_j=Re_j$，$Y_k=\bigoplus_{j=1}^{k}X_j$，序列$\{u_{n_j}\}\subset X_0^s(\Omega)$，使得$u_{n_j}\in Y_{n_j}$，$J(u_{n_j})\to c$，$J|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j})\to 0(n_j\to\infty)$，对任意$v\in X_0^s(\Omega)$，都有

$$\langle J'(u_{n_j}),v\rangle\to 0\qquad n_j\to\infty\tag{4}$$

首先证明$\{u_n\}$在$X_0^s(\Omega)$中有界. 对充分大的n_j，有

$$J(u_{n_j})=\frac{1}{2}\|u_{n_j}\|^2-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}\int_\Omega\frac{|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega G(x,u_{n_j})\mathrm{d}x=c+o(1) \tag{5}$$

$$\langle J'(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle=\|u_{n_j}\|^2-\int_\Omega\frac{|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega g(x,u_{n_j})u_{n_j}\mathrm{d}x=o(1)\|u_{n_j}\| \tag{6}$$

由(5)式和(6)式可知

$$J(u_{n_j})-\frac{1}{2}\langle J'(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}\right)\int_\Omega\frac{|u_n|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\left[G(x,u_{n_j})-\frac{1}{2}g(x,u_{n_j})u_{n_j}\right]\mathrm{d}x=$$

$$c+o(1)\|u_{n_j}\|$$

因为 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界区域，所以存在常数 $C_0>0$，使得 $\Omega\subset B(0,C_0)$，且

$$\int_\Omega\frac{|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{C_0^\alpha}\int_\Omega|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}\mathrm{d}x \tag{7}$$

由(3)式和(7)式可得

$$\left(\frac{2s-\alpha}{2\,C_0^\alpha(N-\alpha)}-\lambda\right)\int_\Omega|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}\mathrm{d}x\leqslant\lambda C|\Omega|+o(1)\|u_{n_j}\|$$

因此，当 $\lambda\in\left(0,\dfrac{2s-\alpha}{2\,C_0^\alpha(N-\alpha)}\right)$ 时，有

$$\|u_{n_j}\|_{2_s^*(\alpha)}^{2_s^*(\alpha)}\leqslant C_3+o(1)\|u_{n_j}\| \tag{8}$$

由条件(g_1)可得

$$G(x,u_{n_j})-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}g(x,u_{n_j})u_{n_j}\leqslant C_4+|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}$$

因为

$$J(u_{n_j})-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}\langle J'(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}\right)\|u_n\|^2-\lambda\int_\Omega\left[G(x,u_{n_j})-\frac{1}{2}g(x,u_{n_j})u_{n_j}\right]\mathrm{d}x=$$

$$c+o(1)\|u_{n_j}\|$$

所以

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}\right)\|u_{n_j}\|^2\leqslant\lambda\|u_{n_j}\|_{2_s^*(\alpha)}^{2_s^*(\alpha)}+\lambda C_4|\Omega|+c+o(1)$$

故

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*(\alpha)}\right)\|u_{n_j}\|^2\leqslant\lambda\|u_{n_j}\|_{2_s^*(\alpha)}^{2_s^*(\alpha)}+C_5+o(1)$$

结合(8)式可得

$$\|u_{n_j}\|^2\leqslant C_6\|u_{n_j}\|+C_7$$

故$\{u_n\}$在 $X_0^s(\Omega)$ 中有界.

再证明在 $X_0^s(\Omega)$ 中 $u_n\to u$.

由以上证明知$\{u_n\}$在 $X_0^s(\Omega)$ 中有界，所以存在子序列$\{u_{n_j}\}$，使得在 $X_0^s(\Omega)$ 中 $u_{n_j}\rightharpoonup u$.

根据 Vitali 定理和引理 1，有

$$u_{n_j}\to u \qquad x\in L^\gamma(\Omega),\ 1<\gamma<2_s^*$$

$$u_{n_j} \to u \qquad \text{a. e. } x \in \Omega$$

$$\int_\Omega g(x, u_{n_j}) u_{n_j} \mathrm{d}x \to \int_\Omega g(x, u) u \mathrm{d}x \qquad n \to \infty$$

$$\int_\Omega G(x, u_{n_j}) \mathrm{d}x \to \int_\Omega G(x, u) \mathrm{d}x \qquad n \to \infty$$

根据(4)式，对任意的 $v \in X_0^s(\Omega)$，有

$$0 = \langle J'(u), u \rangle = \| u \|^2 - \int_\Omega \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g(x, u) u \mathrm{d}x \tag{9}$$

首先令 $w_{n_j} = u_{n_j} - u$，由 $J'(u_{n_j}) \to 0$，有

$$\| u_{n_j} \|^2 - \int_\Omega \frac{|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g(x, u_{n_j}) u_{n_j} \mathrm{d}x = o(1)$$

由 Brezis-Lieb 引理和引理 1，可以得到

$$\| w_{n_j} \|^2 + \| u \|^2 - \int_\Omega \frac{|w_n|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega g(x, u) u \mathrm{d}x = o(1) \tag{10}$$

结合(3)式和(8)式可得

$$\begin{aligned} J(u) = {} & \frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega G(x, u) \mathrm{d}x = \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \right) \int_\Omega \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega g(x, u) u \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega G(x, u) \mathrm{d}x \geqslant \\ & \left(\frac{2s - \alpha}{2 C_0^\alpha (N - \alpha)} - \lambda \right) \int_\Omega |u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda C |\Omega| \end{aligned} \tag{11}$$

令

$$\lambda^* = \min \left\{ \frac{2s - \alpha}{2 C_0^\alpha (N - \alpha)}, \frac{\beta_0}{C |\Omega|} \right\}$$

则对任意 $\lambda \in (0, \lambda^*)$，有

$$J(u) \geqslant - \beta_0 \tag{12}$$

再由 $J(u_{n_j}) \to c (n_j \to \infty)$，由 Brezis-Lieb 引理和引理 1，得到

$$\begin{aligned} J(u_{n_j}) = {} & \frac{1}{2} \| u_{n_j} \|^2 - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{|u_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega G(x, u_{n_j}) \mathrm{d}x = \\ & \frac{1}{2} \| w_{n_j} \|^2 + \frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{|w_{n_j}|^2}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \\ & \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{|u|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega G(x, u) \mathrm{d}x + o(1) = \\ & J(u) + \frac{1}{2} \| w_{n_j} \|^2 - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{|w_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x = c + o(1) \end{aligned} \tag{13}$$

根据(9)式和(10)式可得

$$\| w_{n_j} \|^2 - \int_\Omega \frac{|w_{n_j}|^{2_s^*(\alpha)}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x = o(1)$$

我们断言，当 $n_j \to \infty$ 时，$\| w_{n_j} \| \to 0$. 否则，存在子序列(仍记为$\{w_{n_j}\}$)和正常数 m，使得

$$\lim_{n_j \to \infty} \| w_{n_j} \|^2 = m \qquad \lim_{n_j \to \infty} \int_\Omega \frac{| w_{n_j} |^{2_s^*(\alpha)}}{| x |^\alpha} \mathrm{d}x = m$$

根据 $\Lambda_{\gamma,s,\alpha}$ 的定义，有

$$\| w_{n_j} \|^2 \geqslant \Lambda_{\gamma,s,\alpha} \left(\int_\Omega \frac{| w_{n_j} |^{2_s^*(\alpha)}}{| x |^\alpha} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2_s^*(\alpha)}} \qquad n_j = 1,2,3,\cdots$$

因为 $m \neq 0$，所以 $m \geqslant \Lambda_{\gamma,s,\alpha}^{\frac{N-\alpha}{2s-\alpha}}$. 结合(13)式，可以得到

$$J(u) = c - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2_s^*(\alpha)} m \leqslant c - \frac{2s-\alpha}{2(N-\alpha)} \Lambda_{\gamma,s,\alpha}^{\frac{N-\alpha}{2s-\alpha}} < -\beta_0$$

这与(12)式矛盾. 所以 $m = 0$，在 $X_0^s(\Omega)$ 中有 $u_n \to u$.

定理 1 的证明

假设条件(g_3)成立，对任意的 $u \in X_0^s(\Omega)$，都有 $J(u) = J(-u)$，所以 J 是偶泛函. 我们下面将逐一验证引理 2 中的条件成立.

(B_1) 根据条件(g_1)，存在常数 $C_8 > 0$，满足

$$G(x, u) \leqslant C_8 | t | + | t |^{2_s^*(\alpha)} \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ t \in \mathbb{R}$$

所以

$$J(u) = \frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{| u |^{2_s^*(\alpha)}}{| x |^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega G(x, u) \mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{2} \| u \|^2 - \frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{| u |^{2_s^*(\alpha)}}{| x |^\alpha} \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega | u |^{2_s^*(\alpha)} \mathrm{d}x - \lambda C_6 \int_\Omega | u | \mathrm{d}x \tag{14}$$

由 Sobolev 不等式和 Sobolev-Hardy 不等式，存在常数 $R_1, R_2 > 0$，使得

$$\frac{1}{2_s^*(\alpha)} \int_\Omega \frac{| u |^{2_s^*(\alpha)}}{| x |^\alpha} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8} \| u \|^2 \qquad \| u \| \leqslant R_1$$

$$\lambda \int_\Omega | u |^{2_s^*(\alpha)} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8} \| u \|^2 \qquad \| u \| \leqslant R_2$$

我们记 $\varphi_k = \sup\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \| u \| = 1}} \| u \|_1$，$R_0 = \min\{R_1, R_2\}$. 对 $u \in Z_k$，$\| u \| \leqslant R_0$，根据(14)式可得

$$J(u) \geqslant \frac{1}{4} \| u \|^2 - \lambda C_8 \varphi_k \| u \| \tag{15}$$

选取 $\rho_k = 4\lambda C_8 \varphi_k$. 根据文献[14]中的引理 3.8，$\varphi_k \to 0 (k \to \infty)$，有 $\rho_k \to 0 (k \to \infty)$. 从而存在 $k_0 > 0$，当 $k \geqslant k_0$ 时有 $\rho_k \leqslant R_0$. 即对 $k \geqslant k_0$，$u \in Z_k$，$\| u \| = \rho_k$，所以得到 $J(u) \geqslant 0$.

(B_2) 因为 Y_k 是有限维空间，所以对任意的 $u \in Y_k$，存在 $\theta > 0$，使得 $\theta \| u \| \leqslant \| u \|_2$. 根据条件($g_2$)，对 $M = \frac{2}{\lambda \theta^2}$，存在 $r_0 > 0$，满足当 $0 < | t | < r_0$ 时，$G(x, t) \geqslant \frac{Mt^2}{2}$. 因此，对任意的 $u \in Y_k$，$\| u \| = 1$，当 $r_k > 0$ 充分小时，可得

$$J(r_k u) \leqslant \frac{1}{2} {r_k}^2 - \lambda {r_k}^2 \theta^2 M = -\frac{1}{2} {r_k}^2 < 0$$

则对 $u \in Y_k$，$\| u \| = r_k$，有 $J(u) < 0$. 选取 $r_k < \rho_k$，(B_2)成立.

(B_3) 根据(15)式，当 $k \geqslant k_0$ 时，$u \in Z_k$ 且 $\| u \| \leqslant \rho_k$，满足

$$J(u) \geqslant -\lambda C_8 \varphi_k \| u \| \geqslant -\lambda C_8 \varphi_k \rho_k$$

由于当 $k \to \infty$ 时 $\varphi_k \to 0$，$\rho_k \to 0$，并且 $0 \in Z_k$，$J(0) = 0$，$-\lambda C_8 \varphi_k \rho_k \leqslant \inf\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \| u \| = r_k}} J(u) < 0$.

所以，$d_k = \inf\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \| u \| \leqslant \rho_k}} J(u) \to 0$. 从而($B_3$)成立.

(B_4)　存在$\lambda^* > 0$，当$\lambda \in (0, \lambda^*)$时，$\dfrac{2s-\alpha}{2(N-\alpha)} \Lambda_{\gamma,s,\alpha}^{\frac{N-\alpha}{2s-\alpha}} > \beta_0$. 由引理4可知，对$c \in [d_{k_0}, 0)$，$J$满足$(PS)_c^*$条件.

参考文献：

[1] KANG D S, PENG S J. Existence of Solutions for Elliptic Problems with Critical Sobolev-Hardy Exponents [J]. Israel Journal of Mathematics, 2004, 143(1): 281-297.

[2] 刘海燕，廖家锋，唐春雷. 带 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 60-65.

[3] 苑紫冰，欧增奇. 一类具有 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 32-36.

[4] KANG D S, PENG S J. Solutions for Semilinear Elliptic Problems with Critical Sobolev-Hardy Exponents and Hardy Potential [J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(10): 1094-1100.

[5] HE X M, ZOU W M. Infinitely Many Arbitrarily Small Solutions for Singular Elliptic Problems with Critical Sobolev-Hardy Exponents [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2009, 52(1): 97-108.

[6] HE X M, ZOU W M. Infinitely Many Solutions for a Singular Elliptic Equation Involving Critical Sobolev-Hardy Exponents in $\mathbb{R}^N$ [J]. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30(3): 830-840.

[7] 余芳，陈文晶. 带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 116-123.

[8] SHANG X D, ZHANG J H, YIN R. Existence of Positive Solutions to Fractional Elliptic Problems with Hardy Potential and Critical Growth [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42(1): 115-136.

[9] ZHANG J G, HSU T S. Multiple Solutions for a Fractional Laplacian System Involving Critical Sobolev-Hardy Exponents and Homogeneous Term [J]. Mathematical Modelling and Analysis, 2020, 25(1): 1-20.

[10] ZHANG K Y, O'REGAN D, XU J F, et al. Infinitely Many Solutions Via Critical Points for a Fractional p-Laplacian Equation with Perturbations [J]. Advance in Difference Equations, 2019, 2019(1): 166.

[11] 商彦英，唐春雷. 一类奇异椭圆方程无穷多解的存在性 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2007, 39(4): 10-16.

[12] DI NEZZA E, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bulletin Des Sciences Mathematigues, 2012, 136(5): 521-573.

[13] YANG J F. Fractional Sobolev-Hardy Inequality in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Analysis, 2015, 119: 179-185.

[14] CHOU K S, CHU C W. On the Best Constant for a Weighted Sobolev-Hardy Inequality [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1993, S2-48(1): 137-151.

[15] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston, M A: Birkhauser, 1996.

责任编辑　廖坤