第 44 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2022 年 2 月
Vol. 44　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2022

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2022.02.012

一类传送带问题解的存在性

鲁雄[1]，　王跃[2]

1. 贵阳职业技术学院 基础教育部，贵阳 550081；2. 贵州大学 数学与统计学院，贵阳 550025

摘要：本文通过变分法考虑了一类带有异号源和反作用力的传送带问题，利用 Ekeland 变分原理和分析技巧获得了此类问题正解的存在性. 特别地，当反向作用力的正系统足够小时，该问题存在至少 3 个非平凡解.

关 键 词：变分方法；传送带问题；异号源；Ekeland 变分原理

中图分类号：O177.9　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673－9868(2022)02－0096－07　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Existence of Solutions for a Transmission Belt Problem

LU Xiong[1]，　WANG Yue[2]

1. Department of Basic Education，Guiyang Vocational and Technical College，Guiyang 550081，China；
2. School of Mathematics and Statistics，Guizhou University，Guiyang 550025，China

Abstract：In this study，a class problems of transmission belt with different signal sources and reaction force was considered by using the variational method. Based on the Ekeland's variational principle and analytical techniques，the existence of global positive solution was obtained. In particularly，there are at least three nontrivial solutions to this problem when the positive system of the reverse force is small enough.

Key words：variational method；transmission belt problem；different signal source；Ekeland's variational principle

根据文献[1]的介绍，D'Alembert 和 Euler 首次提出了用来描述弹性弦在横向上微小振动过程中弦的变化模型. 后来，文献[2]考虑了由固定端点间弦的长度变化而引起的张力微小变化，形成了著名的 Kirchhoff 模型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{m}\left[\tau_0+\frac{k}{2l_0}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x,u) \tag{1}$$

在模型(1)中，$u(x,t)$ 为弦的横向位移，m 为单位长度的质量，α_0 和 β_0 为固定端，l_0 为初始弦长，τ_0 为初

收稿日期：2021－03－07
基金项目：贵州省研究生基金项目(黔教合 YJSCXJH(2020)083)；国家自然科学基金项目(11861021).
作者简介：鲁雄，讲师，硕士，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：王跃，博士研究生.

始张力，k 为弦的杨氏模，$f(t,x,u)\equiv 0$ 为外作用力. Kirchhoff 模型中的积分项$\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$ 引起了学者对该模型的一般情形进行数学反面分析的兴趣，如文献[3-5]等，后来这类问题也被称为非局部问题. 文献[6]考虑了带有非线性项的传送带边界振动控制问题，构造了模型

$$\begin{cases}\left[(v^2-1)+\dfrac{v_T}{2}\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2=f(x,t)\\ u(0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=0\end{cases}\tag{2}$$

这里 v 表示传送带轴向速度，$v_T>0$ 是常量，$f(x,u)\equiv 0$. 受此影响，令 $\varepsilon=1-v^2$，我们考虑模型(2)受异号源和反作用控制下的一种推广，即研究问题

$$\begin{cases}-\left(\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\varepsilon\right)\Delta u=\lambda u^3+\mu f(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^N(N=1,2,3)$ 是光滑有界域，$N=1$ 时，用单向导数的存在性表示边界光滑；$f\in L^2(\Omega)$ 几乎处处为正，且 $f\notin H_0^1(\Omega)$；ε，λ 和 μ 为参数，$\lambda>0$，$\mu>0$，$\varepsilon\geqslant 0$. 当作用力 $f(x)$ 为正向时，问题(3)的一般情形在文献[7]中已有部分结果，文献[7]利用 Ekeland 变分原理得到了近共振解的存在性. 当作用力 $f(x)$ 为 0 时，文献[8]构造了问题(3)没有边界限制状态下无穷解的解析式. 文献[9]利用代数分析方式获得了线性同号源下模型(2)的无穷解. 在同号源和正向作用的控制下，文献[10]利用山路引理和 Ekeland 变分原理证明了模型(2)至少两个正解的存在性. 更多的研究参见文献[11-20]及其引用. 本文的目的是利用 Ekeland 变分原理证明问题(3)解的存在性和多重性. 令

$$\lambda_1=\inf\left\{\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2:u\in H_0^1(\Omega):\int_\Omega u^4\mathrm{d}x=1\right\}$$

由文献[21]知，存在唯一的 $\varphi_1\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\lambda_1=\left(\int_\Omega|\nabla\varphi_1|^2\mathrm{d}x\right)^2>0$$

$$\int_\Omega\varphi_1^4\mathrm{d}x=1\qquad\varphi_1(x)>0\qquad \text{a. e. } x\in\Omega$$

本文的主要结果如下：

定理 1　设 $f(x)\in L^2(\Omega)$ 且 $f(x)>0$(a. e. $x\in\Omega$). 如果 $f(x)\notin H_0^1(\Omega)$，$0<\lambda<\lambda_1$，则当 $\varepsilon\geqslant 0$ 时，对任意的 $\mu>0$，问题(3)至少存在 1 个正解. 更进一步，$\varepsilon>0$ 时，存在 $\mu^*=\mu^*(\varepsilon,\lambda)>0$，使得对任意的 $\mu\in(0,\mu^*)$，问题(3)至少存在 3 个非平凡解.

证

定义 $I:H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$，$\forall u\in H_0^1(\Omega)$，

$$I(u)=\frac{1}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{4}\int_\Omega u^4\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x$$

则 I 是可微的，并且对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\varepsilon\right)\int_\Omega\nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u^3v\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega fv\mathrm{d}x=(I'(u),v)\tag{4}$$

也就是说泛函 I 的临界点与问题(3)的解等价.

下面我们分 3 部完成定理 1 的证明.

第一步　泛函 I 满足 P. S. 条件.

事实上，若存在 $M>0$，使得 $|I(u_n)|<M$ 且 $I'(u_n)\to 0$，那么

$$\left|\frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla u_n|^4\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{4}\int_\Omega u_n^4\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega fu_n\mathrm{d}x\right|\leqslant M\tag{5}$$

则当 $n \to \infty$ 时，对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$，有

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x - \varepsilon\right)\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega u_n^3 v \mathrm{d}x - \mu\int_\Omega f v \mathrm{d}x \to 0 \tag{6}$$

取 $v = u_n$，则由(5)式得

$$-M \leqslant \frac{3}{4}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{3\lambda}{4}\int_\Omega u_n^4 \mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant M$$

注意到 $0 < \lambda < \lambda_1$，

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \lambda_1\int_\Omega u^4 \mathrm{d}x \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

则由

$$\frac{3(\lambda_1 - \lambda)}{4\lambda_1}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant M$$

从而有

$$\frac{\varepsilon\lambda_1 - \sqrt{\varepsilon^2\lambda_1^2 - 12M\lambda_1(\lambda_1 - \lambda)}}{3(\lambda_1 - \lambda)} \leqslant \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_1 + \sqrt{\varepsilon^2\lambda_1^2 + 12M\lambda_1(\lambda_1 - \lambda)}}{3(\lambda_1 - \lambda)}$$

即 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界，于是存在 $u \in H_0^1(\Omega)$ 和 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_k}\}$，使得

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup u & x \in H_0^1(\Omega) \\ u_{n_k} \to u & x \in L^P(\Omega)(1 \leqslant P \leqslant 2^*) \\ u_{n_k}(x) \to u(x) & \text{a. e. } x \in \Omega \end{cases} \tag{7}$$

从而有 $I'(u_{n_k}) \to 0$，则 $\langle I'(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle \to 0$，即

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \mathrm{d}x - \varepsilon\right)\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega u_{n_k}^3 (u_{n_k} - u) \mathrm{d}x - \mu\int_\Omega f(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x \to 0$$

由(7)式可知

$$\left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \mathrm{d}x - \varepsilon\right)\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x \to 0$$

因此 $\left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 - \varepsilon\right) \to 0$ 或者 $\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x \to 0$. 如果 $\left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 - \varepsilon\right) \to 0$，则根据 $\{u_{n_k}\}$ 的有界性和(6)式知，对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$，有

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \mathrm{d}x - \varepsilon\right)\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla v \mathrm{d}x\right] = \lim_{k\to\infty}\left[\int_\Omega (u_{n_k}^3 + \mu f) v \mathrm{d}x\right] = \left[\int_\Omega (\lambda u^3 + \mu f) v \mathrm{d}x\right] = 0$$

根据变分法基本引理，$\lambda u^3 + f \equiv 0$(a. e. $x \in \Omega$)，即 $u = \left(\dfrac{\mu f}{-\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$(a. e. $x \in \Omega$)，由于 $f \notin H_0^1(\Omega)$，则 $u \notin H_0^1(\Omega)$，这与 $u \in H_0^1(\Omega)$ 矛盾. 因此 $\left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \mathrm{d}x - \varepsilon\right) \nrightarrow 0$，则

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x \to 0$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla u \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla(u_{n_k} - u)|^2 \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\left[\int_\Omega \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u \nabla(u_{n_k} - u) \mathrm{d}x\right] = 0$$

因此 $\{u_{n_k}\}$ 是 $\{u_n\}$ 中强收敛的子列，故满足 P.S. 条件.

第二步　在定理1的条件下，当 $\varepsilon \geqslant 0$ 时，对任意 $\mu > 0$，可证问题(3)有一个正解.

事实上，如果 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是问题(3) 的解，那么

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \varepsilon\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega u^4 \mathrm{d}x + \mu\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\mu}{2}\int_\Omega (f^2 + u^2)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\frac{\lambda}{\lambda_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\mu C}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\mu}{2}\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x$$

因此有

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\mu C - \varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\mu}{2}\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x \leqslant 0$$

由此可知

$$0 \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant (\lambda_1 - \lambda)^{-1}\left[\lambda_1(\varepsilon - \mu C) + \left(\lambda_1^2(\varepsilon - \mu C)^2 + 8\lambda_1\mu(\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

因此问题(3) 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的解，转化为在如下集合中寻找：

$$\Phi = \left\{u : \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant R_0\right\}$$

其中

$$R_0 = (\lambda_1 - \lambda)^{-1}\left[\lambda_1(\varepsilon - \mu C) + \left(\lambda_1^2(\varepsilon - \mu C)^2 + 8\lambda_1\mu(\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

由 $f(x) \in L^2(\Omega)$ 和 $0 < \lambda < \lambda_1$，通过直接计算，得

$$I(u) \geqslant \frac{\lambda_1 - \lambda}{4\lambda_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\mu}{2}\int_\Omega (f^2 + u^2)\mathrm{d}x \geqslant$$
$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{4\lambda_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 + \frac{\mu C - \varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{\mu}{2}\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x \geqslant$$
$$\frac{\lambda_1(\mu C - \varepsilon)^2 + 2(\lambda_1 - \lambda)\mu\int_\Omega f^2 \mathrm{d}x}{4(\lambda_1 - \lambda)}$$

由此可见，$I(u)$ 是强制的且下方有界的连续泛函.

当 $\varepsilon = 0$ 时，令 $\hat{u}_1 = \left(\dfrac{3\mu\int_\Omega f\varphi_1 \mathrm{d}x}{\lambda_1 - \lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi_1$；当 $\varepsilon > 0$ 时，令 $\hat{u}_2 = \left(\dfrac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi_1$. 显然，$\hat{u}_1, \hat{u}_2 \in H_0^1(\Omega)$，且

$$I(\hat{u}_1) = -\frac{1}{4(\lambda_1 - \lambda)^3}\left(\mu\int_\Omega f\varphi_1 \mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{3}} < 0$$

$$I(\hat{u}_2) = -\mu\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\int_\Omega f\varphi_1 \mathrm{d}x < 0$$

因 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时，$I(u)$ 是强制的且下方有界的连续函数，那么存在极小化序列 $\{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$，使得

$$I(v_n) \leqslant \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} I(u) + \frac{1}{n}$$

由于 $H_0^1(\Omega)$ 空间在度量 $d(x, y) = \left(\int_\Omega |\nabla(x - y)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 之下是完备的度量空间，根据 Ekeland 变分原理[22-23]，必存在 $u_n \in H_0^1(\Omega)$，使得对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$，当 $u \neq u_n$ 时，有

$$I(u_n) \leqslant I(v_n) \qquad d(u_n, v_n) \leqslant 1 \qquad I(u) \geqslant I(u_n) - \frac{1}{n}d(u, u_n)$$

因此，对任意 $\mu > 0$，由于 $f \in L^2(\Omega)$ 且 $f(x) > 0$(a. e. $x \in \Omega$)，那么当 $n \to \infty$ 时，有

$$I'(u_n) \to 0 \qquad I(u_n) \to c = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) = \inf_{u \in \Phi} I(u) \leqslant I(\hat{u}) < 0$$

其中：$\varepsilon = 0$ 时，$\hat{u} = \hat{u}_1$；$\varepsilon > 0$ 时，$\hat{u} = \hat{u}_2$. 易知$\{u_n\}$存在收敛子列$\{u_{n_k}\}$. 记 $u_* = \lim\limits_{k \to \infty} u_{n_k}$，则

$$I(u_*) = \inf_{u_{n_k} \in H_0^1(\Omega)} I(u_{n_k}) \leqslant I(\hat{u}) < 0$$

并且 $I(u_*) = 0$，即 u_* 是 I 的一个全局极小点. 显然 $u_* \neq 0$. 从而问题(3)至少有 1 个非平凡解.

第三步　在定理 1 的条件下，当 $\varepsilon > 0$ 时，存在 $\mu^* = \mu^*(\varepsilon, \lambda) > 0$，对任意的 $\mu \in (0, \mu^*)$，问题(3)至少存在 3 个非平凡解.

事实上，取 $H_0^1(\Omega)$ 的两个子集：

$$H^+ = \{u \in H_0^1(\Omega): u(x) \geqslant 0, \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

$$H^- \ \{u \in H_0^1(\Omega): u(x) \leqslant 0, \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

那么 H^+ 和 H^- 都是 $H_0^1(\Omega)$ 中的闭子集. 同时，根据第二步的证明，易知泛函 I 的全局极小点必然在 H^+ 中取得，即

$$I(u_*) = \inf_{u_{n_k} \in \Phi} I(u_{n_k}) = \inf_{u_{n_k} \in H^+ \cap \Phi} I(u_{n_k}) \leqslant I(\hat{u}) < 0$$

亦即 $u_* \in H^+$ 是一正解. 从而只需证 $u_* \in H^+$ 即可. 事实上，对任意 $u \in H_0^1(\Omega)$，记

$$u^+ = \max\{u, 0\} \qquad u^- = \min\{u, 0\}$$

那么

$$u^+ u^- \equiv 0 \qquad u = (u^+ + u^-)$$

同时 $u^+, u^-, (u^+ - u^-) \in H_0^1(\Omega)$，且$\int_\Omega \nabla u^+ \nabla u^- \,\mathrm{d}x = 0$. 因此

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u^+ - u^-)|^2 \mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla(u^+)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla(u^-)|^2 \mathrm{d}x - 2\int_\Omega \nabla u^+ \nabla u^- \,\mathrm{d}x = \\
&\int_\Omega |\nabla(u^+)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla(u^-)|^2 \mathrm{d}x + 2\int_\Omega \nabla u^+ \nabla u^- \,\mathrm{d}x = \\
&\int_\Omega |(\nabla u^+ + \nabla u^-)|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u^+ - u^-)^4 \mathrm{d}x &= \int_\Omega [(u^+)^2 - 2u^+ u^- + (u^-)^2]^2 \mathrm{d}x = \\
&\int_\Omega [(u^+)^2 + 2u^+ u^- + (u^-)^2]^2 \mathrm{d}x = \\
&\int_\Omega (u^+ + u^-)^4 \mathrm{d}x = \int_\Omega u^4 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega f(u^+ - u^-) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(u^+ + u^-) \mathrm{d}x - 2\int_\Omega f u^- \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x - 2\int_\Omega f u^- \,\mathrm{d}x$$

注意到 $u_* \in H_0^1(\Omega)$，令 $v_* = u_*^+ - u_*^- \in H_0^1(\Omega)$，易得 $v_*(x) \in H^+ \cap \Phi$. 如果 $u_* \notin H^+$，那么 $u_*^- \neq 0$. 根据 $f > 0$(a.e. $x \in \Omega$)，则有

$$I(v_*) - I(u) = I(u_*^+ - u_*^-) - I(u_*) = 2\mu \int_\Omega f u_*^- \,\mathrm{d}x < 0$$

即 $I(v_*) < I(u_*)$，这与 u_* 是全局极小点矛盾. 因此 $u_* \in H^+$，也即 u_* 是一个正解.

其次，令

$$u_* = \frac{\varepsilon \sqrt{\lambda_1}}{3} \left(\frac{2\varepsilon \sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1 - \lambda)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega f \varphi_1 \mathrm{d}x \right)^{-1}$$

$$\hat{u}_3=-\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi_1$$

对任意 $\mu\in(0,\mu_*)$，有

$$I(\hat{u}_3)=\frac{\lambda_1-\lambda}{4\lambda_1}\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^2-\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{2}\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)+\mu\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_\Omega f\varphi_1\mathrm{d}x=$$

$$\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mu\int_\Omega f\varphi_1\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3}\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]<$$

$$\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mu^*\int_\Omega f\varphi_1\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3}\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_1}}{3(\lambda_1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

也就是说

$$\inf_{u\in H^-}I(u)\leqslant I(\hat{u}_3)<0$$

因此在 H^- 上，类似 u_* 的证明，可得问题(3)存在解 $u_{**}\in H^-$. 更进一步，根据Pucci三解定理[24]知，泛函 I 存在异于 u_* 和 u_{**} 的第三个临界点 u_{***}. 因此，在定理1的条件下，问题(3)存在3个不同解，这就完成了定理1的证明.

本文根据 Ekeland 变分原理证明了问题(3) 在适当假设条件下解的存在性和多重性. 另外，根据文献[22] 的介绍，当 $\varepsilon=0$ 时，问题(3) 称为临界转速问题，此时的基本固有频率消失，具有发散不稳定性. 通常的研究中会假设 ε 属于次临界的转速范围，即 $\varepsilon>0$，这种转速可以理解为发动机在额定功率内的转速. 对于燃油或者燃气等材料作为发动机原料的装置，一般来说技术人员的稳定操作总可以使得速度低于临界速度. 然而，在电力系统特别是交变电流控制的发动机中，由于电压、电流的不稳定，会导致速度的不稳定，当电流过强时，速度可能会超过临界速度，即 $\varepsilon<0$，此时会有烧坏发动机的危险. 而当电流过弱时，又可能因为速度过慢而导致发动机线圈发热而烧坏. 注意对于燃油或者燃气等材料作为发动机原料的装置，速度过低便会自动熄火而不会烧坏发动机. 人们总希望添加适当的同号源或者异号源以及其他形式的装置(非线性项 $g(x,u)\neq 0$)，来自动控制速度不高于临界速度，同时又不低于可能烧坏发动机的最低速度，以保证发动机正常运行. u^3 表示异号源，$f(x)$ 为反向作用，系数 λ,μ 可以理解为控制系数. 异号源和反向作用主要用来控制发动机过快的速度，以使得转速不超过临界速度. 根据问题的需要，并注意到 $\varepsilon=0$ 时的临界速度，因此在物理意义上，问题(3) 中的参数 ε 应该属于区间[0，1]，但从数学研究的角度，将研究范围稍加扩宽也无妨，因此问题(3) 的研究是有实际意义的.

参考文献：

[1] RINCON M A，LIU I S，HUARCAYA W R，et al. Numerical Analysis for a Nonlinear Model of Elastic Strings with Moving Ends [J]. Applied Numerical Mathematics，2019，135：146-164.

[2] KIRCHHOFF G R. Vorlesungen Über Matematische Physik：Mechbanlik [M]. Leipzig：Teubner，1883.

[3] BERSTEIN S. Sur Une Classe d'Equations Fonctionnelles Aux Derives Partielles [J]. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk-Seriya Matematicheskaya，1940，4(1)：17-26.

[4] LIONS J. Quelques Methods de Resolution Des Problems Aux Limites Non-linéaires [M]. Paris：Dunod，1969.

[5] STRAUSS W A. Nonlinear Wave Equations [M]. Providence RI：American Mathematical Society，1989.

[6] CHOI J Y，HONG K S，HUH C D. Vibration Control of an Axially Moving Strip by a Non-Linear Boundary Control [J]. IFAC Proceedings Volumes，2002，35(1)：1-6.

[7] 王跃，梁金平，索洪敏. 一类非局部近共振问题多重解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(4)：53-58.

[8] 王跃，索洪敏，韦维. 无边界约束的一类新 Kirchhoff 型问题的古典解 [J]. 数学物理学报，2020，40(4)：857-868.

[9] 王跃，叶红艳，雷俊，等. 带线性项 Kirchhoff 型问题的无穷多古典解 [J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2020，38(6)：65-73.

[10] WANG Y，SUO H M，LEI C Y. Multiple Positive Solutions for a Nonlocal Problems Involving Critical Exponent [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，2017(275)：1-11.

[11] LEI C Y，LIAO J F，SUO H M. Multiple Positive Solutions for a Nonlocal Problems Involving a Sign-Changing Potential [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，2017(9)：1-8.

[12] LEI C Y，CHU C M，SUO H M. Positive Solutions for a Nonlocal Problem with Singularity [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，2017(85)：1-9.

[13] 王跃. 负模量基尔霍夫型问题进展 [J]. 应用泛函分析学报，2020，22(4)：230-258.

[14] 王跃，叶红艳，索洪敏. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的非局部问题正解的存在性 [J]. 应用数学，2019，32(2)：452-456.

[15] WANG Y，YANG X. Infinitely Many Solutions for a New Kirchhoff Type Equation with Subcritical Exponent [J]. Applicable Analysis，2020，2020：1-14.

[16] DUAN Y，SUN X，LI H Y. Existence and Multiplicity of Positive Solutions For a Nonlocal Problem [J]. The Journal of Nonlinear Sciences and Applications，2017，10(11)：6056-6061.

[17] 王跃，索洪敏，熊宗洪，等. 椭圆型广义 Kirchhoff 问题的多重解 [J]. 扬州大学学报(自然科学版)，2020，23(5)：19-22.

[18] 贾秀玲，段誉. 一类带线性项非局部问题解的存在性与非存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(10)：22-25.

[19] 李红英. 一类非局部问题的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(6)：24-27.

[20] 唐之韵，欧增奇. 一类非局部问题解的存在性与多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：48-52.

[21] PERERA K，ZHANG Z T. Nontrivial Solutions of Kirchhoff-Type Problems Via the Yang Index [J]. Journal of Differential Equations，2006，221(1)：246-255.

[22] MOTE-JR C D. A Study of Band Saw Vibration [J]. Journal of the Frankin Institute，1965，279(6)：430-444.

[23] EKELAND I. On the Variational Principle [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1974，47(2)：324-353.

[24] PUCCI P，SERRIN J. A Mountain Pass Theorem [J]. Journal of Differential Equations，1985，60(1)：142-149.

责任编辑　廖坤