

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.03.013

广义概率密度演化方程的相空间重构解法

蒋仲铭, 刘毅, 胥鹏, 王成龙, 王思琦, 洪晓林

西南大学 工程技术学院, 重庆 400715

摘要: 提出了一种新的相空间重构法(PSRM)用于求解强非线性系统的广义概率密度演化方程, 并对若干典型的强非线性随机系统进行了研究, 包括 SDOF 振子、Riccati 振子、Van der pol 振子和 Duffing 振子. 所得结果验证了 PSRM 在求解广义密度演化方程(GDEE)时的高效性与精确性.

关键词: 广义概率密度演化方程; 相空间; 结构可靠度; 非线性

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

文章编号: 1673-9868(2022)03-0109-09

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Phase Space Reconstruction Method for Generalized Density Probability Evolution Equation

JIANG Zhongming, LIU Yi, XU Peng,

WANG Chenglong, WANG Siqi, HONG Xiaolin

College of Engineering and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China;

Abstract: In recent years, the generalized probability density evolution equation (GDEE) derived based on the principle of probability conservation provided a new way for the analysis and control of stochastic dynamic systems because its dimension is independent of the degree of freedom of the system. In the past few years, a series of numerical methods such as finite difference method and meshless method have been developed to solve the generalized probability density evolution equation. In this paper, a new phase space reconstruction method (PSRM) is proposed to solve the generalized probability density evolution equation of strongly nonlinear systems. Some typical strongly nonlinear stochastic systems were studied, including SDOF oscillator, Riccati oscillator, Van der pol oscillator and Duffing oscillator. The results verify the efficiency and accuracy of PSRM in solving the generalized probability density evolution equation (GDEE).

Key words: generalized probability density evolution equation; phase space; structural reliability; nonlinear

由于在工程实践中随机性广泛地存在于材料特性、外部荷载和边界条件等因素中, 因此随机动力系统分析作为现代力学研究的重要分支, 一直以来是人们研究的热点. 文献[1]从概率守恒的基本原

收稿日期: 2021-10-05

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(51908468); 重庆市自然科学基金面上项目(cstc2020jcyj-msxmX0955).

作者简介: 蒋仲铭, 讲师, 博士, 主要从事可靠度计算和随机分析算法研究.

理出发, 发展了概率密度演化分析理论, 建立了广义概率密度演化方程(GDDE), 为复杂非线性随机动力系统的分析提供了一条可行的途径^[2-4]. 已有的工作证明: 这一新的分析理论在线性与非线性系统的随机动力反应分析^[5]、结构动力可靠度计算^[6-7]、结构随机最优控制等^[8]方面均可获得高效、准确的分析结果.

广义概率密度演化方程作为一类偏微分方程, 近年来众多学者发展了一系列解析和半解析的求解方法^[9-10]对其进行求解. 本文从随机动力系统的相空间出发, 提出了一种可用于精确、高效求解非线性系统的 GDDE 求解方法——相空间重构法(PSRM). 本文利用该方法, 得到了若干典型非线性振子的概率密度解, 并将其与 Monte Carlo 模拟方法^[11]、有限差分法^[9]等数值求解方法进行了比较, 验证了该方法的准确性、有效性和便捷性.

1 广义密度演化方程

文献[5]发展了一类用于随机系统分析的广义概率密度演化方程, 经过十数年的发展, 这一方法广泛地应用于结构的可靠性分析^[5]、铁路轨道设计^[12]以及城市基础设施防震减灾设计^[13-14]等领域之中.

不失一般性, 设随机动力系统为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, t), \quad \dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

初始条件为

$$\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (2)$$

其中: $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)^T$, n 是物理系统的维数; $\mathbf{G}(\cdot)$ 为一般非线性系统, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_s)^T$, 其联合概率密度函数为 $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$, s 是系统中随机变量的总数. 显然, 对于特定的随机动力系统, 方程(1), (2)的解存在且唯一, 并连续地依赖于初始条件. 即对于给定的初始条件, 式(1)的解可写为

$$\mathbf{X} = H(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (3)$$

由概率守恒原理, 存在广义概率密度演化方程^[2-3, 15]

$$\frac{(\partial p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \dot{\mathbf{X}}_j(\boldsymbol{\theta}, t) \cdot \frac{(\partial p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t))}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

初始条件为

$$p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

由于广义密度演化方程的解析解很难得到, 工程中常用其数值解.

2 相空间重构法

在大多数非线性问题乃至工程问题中, 式(4)和式(5)的解析求解都是相当困难的. 由此, 大量学者发展了一系列数值和近似的解析算法用于求解广义概率密度演化方程^[16-17]. 本文通过深入研究广义概率密度演化理论的物理机制, 在此基础上提出了一类基于非线性物理系统分解的相空间重构方法, 可以有效避免采用传统点演化方法求解广义概率密度演化方程时所遇到的网格敏感性问题 and 数值耗散问题.

使用特征线法^[18]得方程(4)和(5)的形式解为^[19]

$$p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \delta(\mathbf{x} - H(\boldsymbol{\theta}, t)) p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (6)$$

不妨令

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - H(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (7)$$

则方程(6)可化为

$$p_{\mathbf{x}\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \delta[\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)] p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (8)$$

当 $a \neq 0$ 时, 存在

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (9)$$

对一般的情况而言, 关于 $g(\mathbf{x})$ 的 δ 函数已在文献[20]中给出

$$\delta[g(\mathbf{x})] = \sum_i \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|g'(\mathbf{x}_i)|} \quad (10)$$

其中 \mathbf{x}_i 是 $g(\mathbf{x})$ 的一个根. 将式(10)代入式(8)的形式解可得到

$$\delta[\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)] = \sum_{i=1}^{N_{\text{sol}}} \frac{\delta(\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t))}{\left| \frac{(\partial \mathbf{G}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x}, t))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{(\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t))} \right|}} \quad (11)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t)$ 是 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) = 0$ 的根线, N_{sol} 是 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) = 0$ 根线的个数. 利用狄拉克 δ 函数的基本性质^[21]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (12)$$

联立式(8),(11)和(12),对 $\boldsymbol{\theta}$ 求积分可得

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} = \\ &= \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} \delta[\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)] p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \\ &= \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sol}}} \frac{\delta(\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t))}{\left| \frac{(\partial \mathbf{G}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x}, t))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{(\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t))} \right|}} p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_{\text{sol}}} \frac{\delta(\boldsymbol{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t))}{\left| \frac{(\partial \mathbf{G}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{x}, t))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{(\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t))} \right|}} \text{Heaviside}[\Omega_{\boldsymbol{\theta}}] \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\text{Heaviside}(\cdot)$ 是赫维赛德函数^[22], $\Omega_{\boldsymbol{\theta}_i}$ 是积分区域. 由式(13)可知,非线性系统可以由相空间 $\mathbf{X}-\boldsymbol{\theta}$ 物理系统 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)$ 中的数个物理系统 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t)$ 组合而成. 对应地,也可以在代数上理解函数 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)$ 可以被分解为若干个值域不重合的单调函数 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(\mathbf{x}, t)$ 的叠加.

因此,在相空间 $\mathbf{X}-\boldsymbol{\theta}$ 的角度处理广义概率密度演化方程(GDEE)的求解问题避免了反函数求解这一数学上的难点;同时,由于在实际中我们往往主要关注一个物理量(如位移)或是两个物理量(位移和速度)的概率密度函数,这也大大简化了 $\mathbf{X}-\boldsymbol{\theta}$ 空间中的 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)$ 曲线,使得对物理系统 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)$ 的分解成为可能.

基于物理系统分解的数值求解方法步骤如下:

- 1) 在随机变量 $\boldsymbol{\theta}$ 的分布空间 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$ 任意选取一定量的离散点 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_q, q=1, 2, \dots, N_{\text{sol}}$, 求解物理方程, 提取 t 时刻的所需物理量 $\mathbf{x}_q(\boldsymbol{\theta}_q)$, 同时计算 t 时刻所需物理量的时间导数 $\dot{\mathbf{x}}_q(\boldsymbol{\theta}_q)$;
- 2) 对 $\mathbf{X}-\boldsymbol{\theta}$ 空间中的物理系统进行分类, 将分布空间 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$ 分为 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}_1}, \Omega_{\boldsymbol{\theta}_2}, \dots, \Omega_{\boldsymbol{\theta}_{N_{\text{cla}}}}$; N_{cla} 为物理系统的分类个数;

3) 在不同的分布空间 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}_{N_{\text{cla}}}}$ 中, 将 $\mathbf{X}-\boldsymbol{\theta}$ 空间中的离散点 $(\boldsymbol{\theta}_q, \mathbf{x}_q(\boldsymbol{\theta}_q))$ 和 $(\boldsymbol{\theta}_q, \dot{\mathbf{x}}_q(\boldsymbol{\theta}_q))$ 代入式(13)中, 得到不同分布空间 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}_{N_{\text{cla}}}}$ 下对应的概率密度函数的离散点集 $(\mathbf{x}_q(\boldsymbol{\theta}_q), p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_q(\boldsymbol{\theta}_q)))_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}_{N_{\text{cla}}}}$;

4) 对各个分布空间 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$ 中的概率密度函数点集 $(\mathbf{x}_q(\boldsymbol{\theta}_q), p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_q(\boldsymbol{\theta}_q)))_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}_{N_{\text{cla}}}}$ 进行函数拟合, 得到对应的 $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_g(\mathbf{x})))$;

5) 将所有的 $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_g(\mathbf{x})))$ 叠加, 得到所求物理量的概率密度函数 $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \sum_{g=1}^{N_{\text{cla}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_g(\mathbf{x})))$.

3 数值算例

3.1 SDOF 振子

单自由度振子(Single Degree of Freedom Oscillator)的无阻尼自由振动是一种简谐振动, 其固有频率

是系统本身的性质,与初始条件无关,且它的速度与加速度也是简谐的,其方程可以写为

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \quad (14)$$

其初始条件为

$$X(0) = 1 \quad \dot{X}(0) = 0 \quad (15)$$

随机变量 ω 在区间 $[0.1, 0.4]$ 内均匀分布,由于该方程为线性微分方程,其解析解易得为

$$X(\omega, t) = 0.1 \cos(\omega t) \quad (16)$$

图 1 为使用 PSRM 分解物理系统后的各个概率密度函数,将各物理系统的概率密度函数叠加得到图 2.

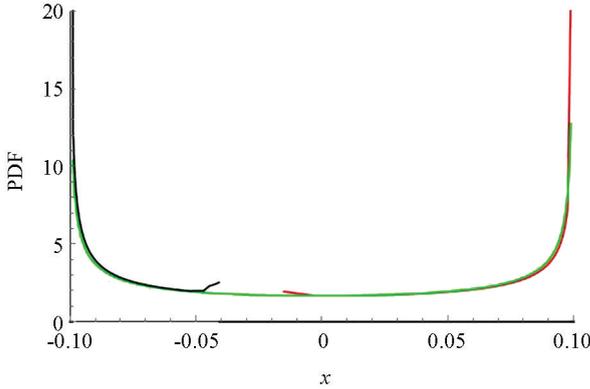


图 1 SDOF 振子在各物理系统下的概率密度函数

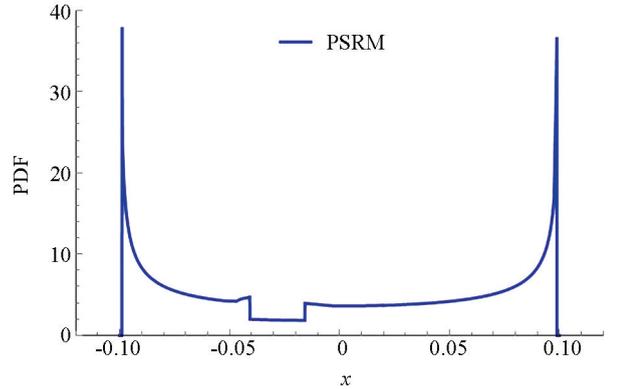


图 2 SDOF 振子各物理系统下的概率密度函数叠加

通过 10 000 次 Monte Carlo 模拟与本文提出的相空间重构法进行比较(图 3),可以看出本文所提出的 PSRM 与精确解的吻合程度较好.图 4 给出了代表点个数相同(200 个)的情况下,使用 Monte Carlo 模拟方法、PDEM 和 PSRM 在典型时刻($t=20$)响应的概率密度函数.由表 1 失效概率数据可以看出,相比传统的 PDEM,PSRM 使用较少的代表点个数即可获得较高的计算精度.

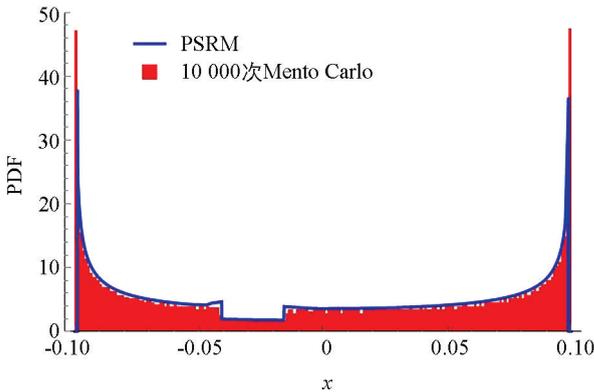


图 3 SDOF 振子 PSRM 与 10 000 次 Monte Carlo 效果对比

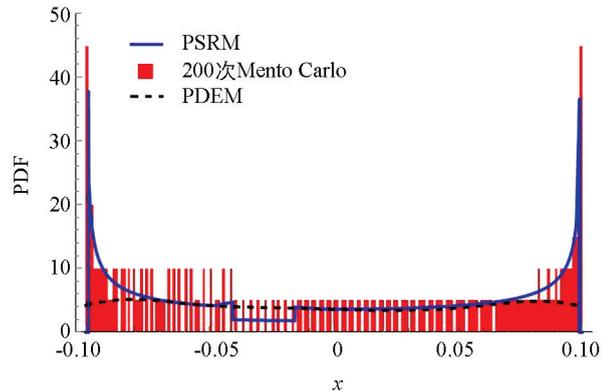


图 4 SDOF 振子 PSRM、200 次 Monte Carlo 方法与 PDEM 比较

表 1 SDOF 振子在 4 种方法中不同阈值下的失效概率

| 阈值 | 失效概率/% | | | |
|-------|----------------------|-------|-------|-------------------|
| | 10^4 次 Monte Carlo | PSRM | PDEM | 200 次 Monte Carlo |
| 0.085 | 18.51 | 18.78 | 29.04 | 20.41 |
| 0.09 | 15.02 | 14.02 | 27.74 | 14.93 |
| 0.095 | 10.57 | 9.17 | 24.42 | 10.45 |
| 相对误差 | | 7.12 | 90.86 | 29.20 |

3.2 Riccati 振子

Riccati 振子是控制理论中的重要方程, 涉及 Kalman 滤波、信号频率跟踪^[23]、线性二次调节器问题及模型简化等诸多问题^[24-25]. 设一阶 Riccati 方程为

$$\dot{X} + \theta X^2 - X = 0 \tag{17}$$

其初始条件为

$$X(0) = 1 \tag{18}$$

图 5 为使用 PSRM 分解 Riccati 振子得到的概率密度函数, 叠加概率密度函数得到图 6.

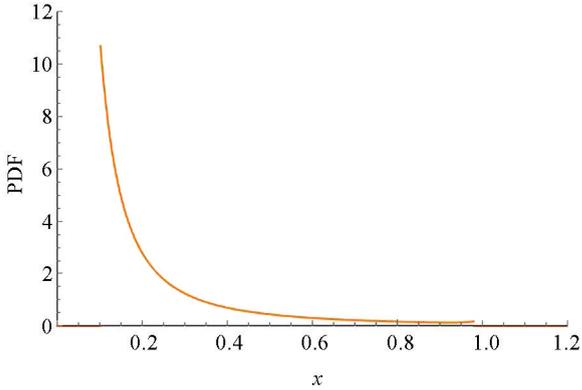


图 5 Riccati 振子在各物理系统下的概率密度函数

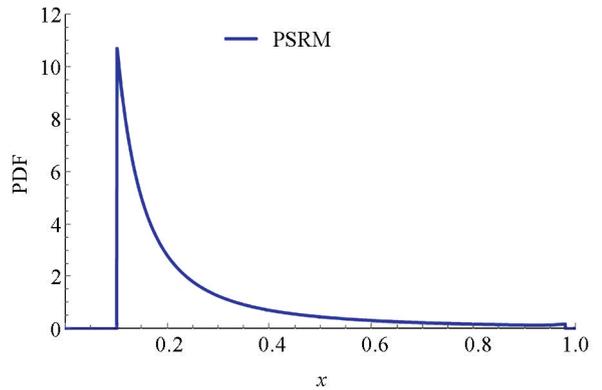


图 6 Riccati 振子各物理系统的概率密度函数叠加

随机变量 θ 在区间 $[1, 10]$ 均匀分布. 用 10 000 次 Monte Carlo 模拟与本文提出的相空间重构法进行比较(图 7), 可以看出本文所提出的 PSRM 与精确解的吻合程度较好. 图 8 给出了代表点个数相同(200 个)的情况下, 使用 Monte Carlo 模拟、有限差分方法 PDEM 和 PSRM 在典型时刻($t = 20$)响应的概率密度函数. 由表 2 失效概率数据可以看出, 相比传统的 PDEM, PSRM 使用较少的代表点个数即可获得较高的计算精度.

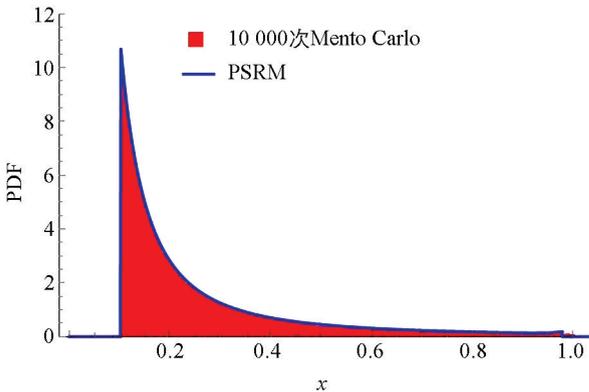


图 7 PSRM 与 10 000 次 Mento Carlo 方法在 Riccati 方程上的对比实验

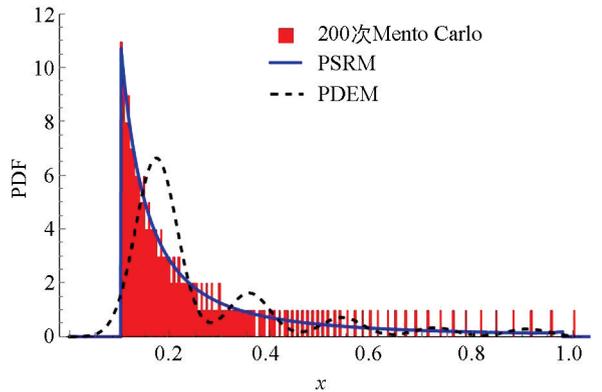


图 8 Riccati 方程 PSRM 与 200 次 Mento Carlo 及 PDEM 比较

表 2 Riccati 方程在 4 种方法中不同阈值下的失效概率

| 阈值 | 失效概率/% | | | |
|-------|----------------------|-------|--------|-------------------|
| | 10^4 次 Mento Carlo | PSRM | PDEM | 200 次 Mento Carlo |
| 0.935 | 0.80 | 0.71 | 3.24 | 1.00 |
| 0.945 | 0.67 | 0.56 | 3.29 | 1.00 |
| 0.955 | 0.53 | 0.41 | 3.25 | 1.00 |
| 相对误差 | | 16.98 | 402.68 | 53.45 |

3.3 Van der Pol 振子

Van der Pol 振子是非线性系统的经典模型之一,它起源于范德波尔对电子电路中三极管的振荡效应的研究^[26].这一模型在物理学、生物学、神经学甚至经济学中,都有着广泛的应用^[27-28].设一维 Van der Pol 方程为

$$\ddot{X} - (1 - X^2)\dot{X} + X = \theta \cdot \cos(1.1t) \tag{19}$$

初始条件为

$$X(0) = 0 \quad \dot{X}(0) = 1 \tag{20}$$

使用 PSRM 分解 Van der pol 振子的物理系统(图 9),叠加各个物理系统的概率密度函数得到图 10.

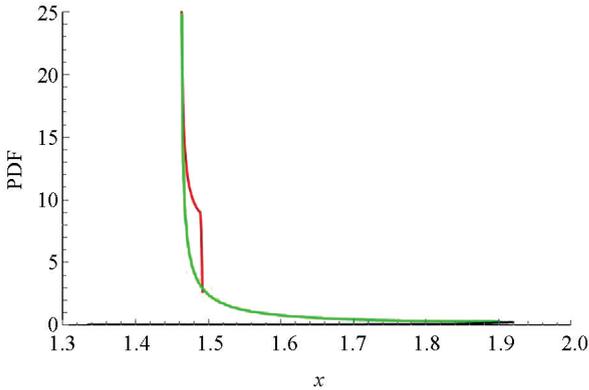


图 9 Van der pol 振子在各物理系统下的概率密度函数

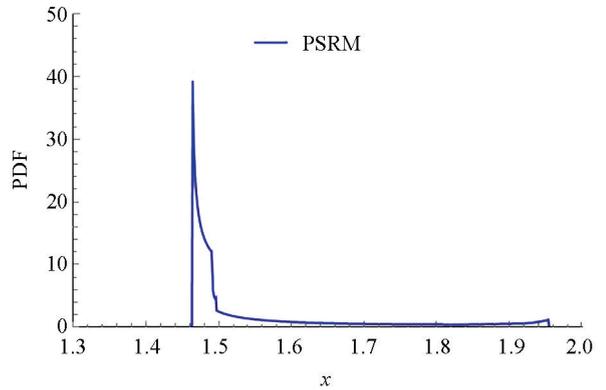


图 10 Van der pol 振子各物理系统的概率密度函数叠加

随机变量 θ 在区间 $[0.1, 5]$ 均匀分布. 用 10^4 次 Monte Carlo 模拟与本文提出的相空间重构法进行比较(图 11),可以看出,本文所提出的 PSRM 与精确解的吻合程度较好. 图 12 给出了代表点个数相同(200 个)的情况下,使用 Monte Carlo 模拟、PDEM 和 PSRM 在典型时刻($t=20$)响应的概率密度函数. 由表 3 失效概率数据可以看出,相比传统的 PDEM, PSRM 使用较少的代表点个数即可获得较高的计算精度.

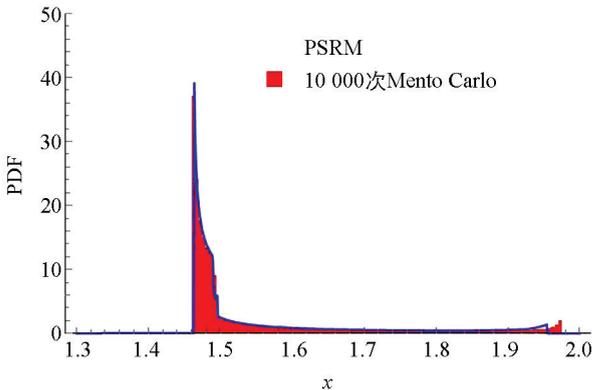


图 11 Van der Pol 振子 PSRM 与 10 000 次 Mento Carlo 比较

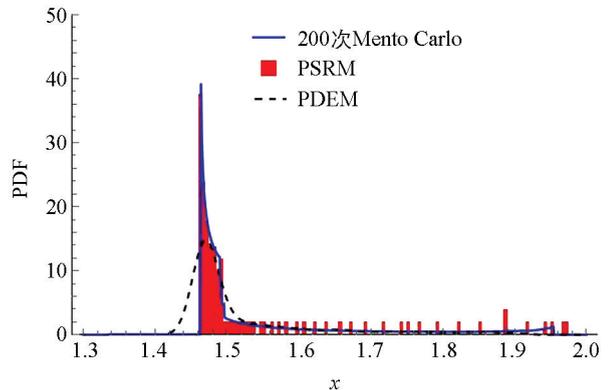


图 12 Van der pol 振子 PSRM 与 200 次 Mento Carlo 及 PDEM 比较

表 3 Van der pol 振子在 4 种方法中不同阈值下的失效概率

| 阈值 | 失效概率/% | | | |
|------|----------------------|-------|-------|-------------------|
| | 10^4 次 Mento Carlo | PSRM | PDEM | 200 次 Mento Carlo |
| 1.80 | 9.50 | 10.16 | 6.06 | 8.92 |
| 1.85 | 7.46 | 7.62 | 4.22 | 7.92 |
| 1.90 | 5.40 | 4.77 | 2.25 | 6.25 |
| 相对误差 | | 6.92 | 45.98 | 9.39 |

3.4 Duffing 振子

Duffing 振子是一个典型的非线性振动系统, 尽管是从简单物理模型中得出来的非线性振动模型, 但是其模型具有代表性. 工程实际中的许多非线性振动问题的数学模型都可以转化为该方程来研究, 如脑电识别^[29]、机械臂振动控制^[30]、微弱信号检测^[31]等, Duffing 系统也非常广泛地被应用到实际工程中, 例如尖锐碰摩转子的故障检测、微弱周期信号检测、电力系统周期振荡分析、周期电路系统的模拟与控制等^[32-34]. 设一维 Duffing 方程为

$$\ddot{X} - a^2(X - X^3) = 0 \quad (21)$$

初始条件为

$$X(0) = 1 \quad \dot{X}(0) = 1 \quad (22)$$

用 PSRM 分解 Duffing 振子的 14 个物理系统, 得到各物理系统的概率密度函数(图 13), 并叠加各系统的概率密度函数(图 14).

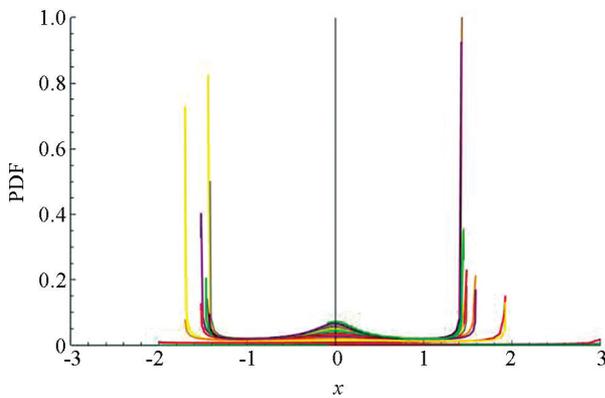


图 13 Duffing 振子在各物理系统下的概率密度函数

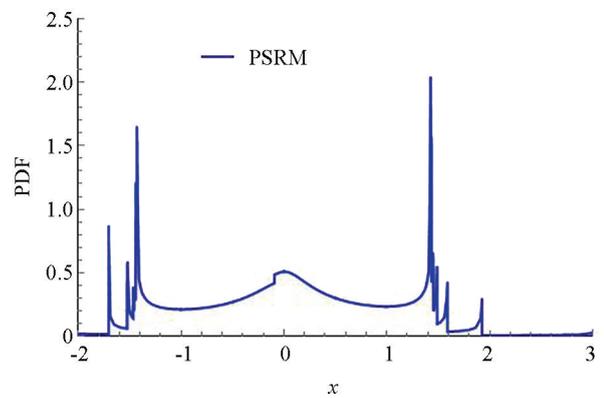


图 14 Duffing 振子各物理系统的概率密度叠加函数

随机变量 a 在区间 $[0, 1, 5]$ 均匀分布. 用 Monte Carlo 模拟与本文提出的相空间重构法进行比较(图 15), 可以看出本文所提出的 PSRM 与精确解的吻合程度较好. 图 16 给出了代表点个数相同(600 个)的情况下, 使用 Monte Carlo 模拟、PDEM 和 PSRM 在典型时刻($t=20$)响应的概率密度函数. 由表 4 失效概率数据可以看出, 相比传统的 PDEM, PSRM 使用较少的代表点个数即可获得较高的计算精度.

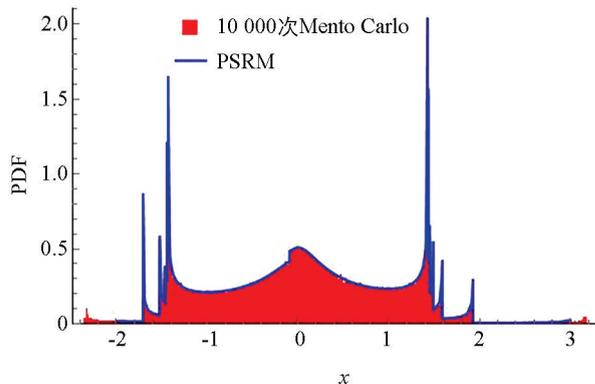


图 15 Duffing 振子 PSRM 与
10 000 次 Mento Carlo 比较

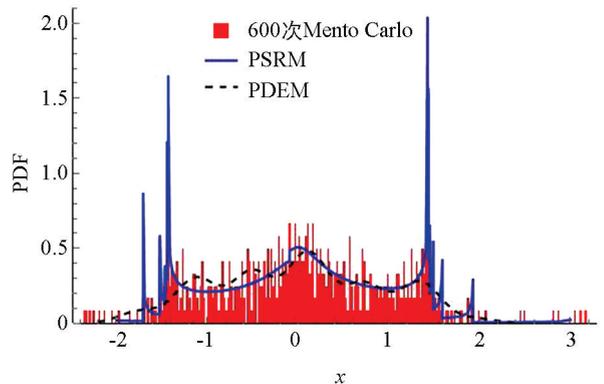


图 16 Duffing 振子 PSRM 与
600 次 Mento Carlo 及 PDEM 比较

表 4 Duffing 方程在 4 种方法中不同阈值下的失效概率

| 阈值 | 失效概率/% | | | |
|------|-------------------------------|------|-------|-------------------|
| | 10 ⁵ 次 Mento Carlo | PSRM | PDEM | 600 次 Mento Carlo |
| 2.45 | 1.02 | 0.95 | 0.86 | 1.16 |
| 2.60 | 0.90 | 0.89 | 0.68 | 0.83 |
| 2.75 | 0.75 | 0.61 | 0.58 | 0.83 |
| 相对误差 | | 9.28 | 20.68 | 10.90 |

4 总结

广义概率密度演化方程作为求解随机动力系统的一种通用方法,近年来获得了广泛的关注.传统的广义概率密度演化方程数值算法,往往需要提前对概率空间进行剖分,通过获取广义概率密度演化方法的点演化方程来求解.本文通过深入研究广义概率密度演化理论的物理机制,对代表物理系统的相轨迹进行分解,然后对分解后的广义概率密度演化方程分别进行求解,叠加后即可得到原非线性系统的概率密度解.相比于传统的数值求解方法,本方法不需要求解代表点的赋值概率,且所需的代表点个数较少.最后,通过 4 个数值算例,证明了该方法可以有效地计算强非线性系统随机响应.

本文结果不仅可以作为求解广义概率密度演化方程的一种半解析方法,同时也证明了广义概率密度演化方程既可以从概率空间剖分角度进行求解,也可以从物理系统分解角度进行求解,有助于进一步深入研究和剖析随机动力系统中随机性与非线性的耦合机制.

参考文献:

- [1] 李杰, 陈建兵. 随机结构动力反应分析的概率密度演化方法 [J]. 力学学报, 2003, 35(4): 437-442.
- [2] 李杰, 陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化分析 [J]. 力学学报, 2003, 35(6): 716-722.
- [3] 李杰, 陈建兵. 随机动力系统广义密度演化方程 [J]. 自然科学进展, 2006, 16(6): 712-719.
- [4] CHEN J B, LI J. A Note on the Principle of Preservation of Probability and Probability Density Evolution Equation [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24(1): 51-59.
- [5] LI J, CHEN J B. Probability Density Evolution Method for Dynamic Response Analysis of Structures with Uncertain Parameters [J]. Computational Mechanics, 2004, 34(5): 400-409.
- [6] LI J, CHEN J B, FAN W L. The Equivalent Extreme-Value Event and Evaluation of the Structural System Reliability [J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 112-131.
- [7] CHEN J B, LI J. The Extreme Value Distribution and Dynamic Reliability Analysis of Nonlinear Structures with Uncertain Parameters [J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 77-93.
- [8] LI J, PENG Y B, CHEN J B. A Physical Approach to Structural Stochastic Optimal Controls [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25(1): 127-141.
- [9] 陈建兵, 李杰. 随机结构静力反应概率密度演化方程的差分方法 [J]. 力学季刊, 2004, 25(1): 21-28.
- [10] LI J, CHEN J B. The Number Theoretical Method in Response Analysis of Nonlinear Stochastic Structures [J]. Computational Mechanics, 2007, 39(6): 693-708.
- [11] 刘东亮, 徐浩军, 蔡军, 等. 基于 Monte Carlo 仿真的小概率事件评估算法稳定性研究 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(10): 68-73.
- [12] 胡川川. 地震作用下铁道车辆桥上脱轨概率研究 [D]. 成都: 西南交通大学, 2019.
- [13] 赵留园, 黄雨. 地震作用下边坡随机动力分析方法的若干进展 [J]. 工程地质学报, 2020, 28(3): 584-596.
- [14] 徐善华, 聂彪, 张海江. 基于概率密度演化理论的锈蚀钢梁时变可靠度分析 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2020, 47(7): 75-83.
- [15] LI J, CHEN J B. The Principle of Preservation of Probability and the Generalized Density Evolution Equation [J]. Struc-

- tural Safety, 2008, 30(1): 65-77.
- [16] 蒋仲铭, 李杰. 三类随机系统广义概率密度演化方程的解析解 [J]. 力学学报, 2016, 48(2): 413-421.
- [17] 李杰, 陈建兵. 概率密度演化理论的若干研究进展 [J]. 应用数学和力学, 2017, 38(1): 2, 32-43.
- [18] HAMILTON W R. On a General Method in Dynamics; By which the Study of the Motions of all Free Systems of Attracting or Repelling Points is Reduced to the Search and Differentiation of one Central Relation, or Characteristic Function [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1834, 124: 247-308.
- [19] FARLOWS J, BECKERS F. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers [J]. American Journal of Physics, 1985, 53(7): 702.
- [20] ESTRADA R, KANWALR P. An Analysis for the Delta Function with Support on the Light Cone [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1988, 21(12): 2667-2675.
- [21] 徐玲玲, 赵永芳, 井孝功. 狄拉克 δ 函数 [J]. 大学物理, 2010, 29(8): 16-17, 38.
- [22] 李书波, 张渡淮. Heaviside 函数的非标准分析表示 [J]. 哈尔滨科学技术大学学报, 1987(2): 119-121.
- [23] SIMHAMED Y, YKHLEF F, IRATNI A. A Novel Frequency Tracker for Sinusoidal Signal Based on State Dependent Riccati Equation Filter [J]. Measurement, 2021, 183: 109845.
- [24] ARIARATNAMS T, LOHN K. Optimal Control of Linear Stochastic Systems [J]. International Journal of Control, 1967, 6(1): 51-64.
- [25] 卢琳璋. 两类代数黎卡提方程数值解法的研究进展 [J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2001, 40(2): 182-186.
- [26] CONTI R. Control and the van Der Pol Equation [M] //Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1979.
- [27] KROGDAHLW S. Numerical Solutions of the van Der Pol Equation [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP, 1960, 11(1): 59-63.
- [28] SAMUELSONP A. Generalized Predator-Prey Oscillations in Ecological and Economic Equilibrium [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1971, 68(5): 980-983.
- [29] CHAI M, BA L. Application of EEG Signal Recognition Method Based on Duffing Equation in Psychological Stress Analysis [J]. Advances in Mathematical Physics, 2021, 2021: 1-10.
- [30] 陈彬. 单连杆柔性机械臂系统动力学和振动控制研究 [D]. 北京: 北京理工大学, 2018.
- [31] 张刚, 曹莉, 贺利芳, 等. 指数型随机共振微弱振动信号检测方法 [J]. 振动与冲击, 2019, 38(9): 53-61.
- [32] TOMAS J. Ultrasubharmonic Resonance in a Duffing System [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1971, 6(5): 625-631.
- [33] XU W, HE Q, FANG T, et al. Stochastic Bifurcation in Duffing System Subject to Harmonic Excitation and in Presence of Random Noise [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2004, 39(9): 1473-1479.
- [34] WANG M, SU F. Numerical Research on Stochastic Duffing System [J]. Procedia Engineering, 2012, 29: 1979-1983.