DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2022.03.015

具有奇异振荡的三维非自治线性 Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer 方程的一些估计

谭青维，　朱朝生

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要研究具有奇异振荡力的三维非自治线性 Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer 方程，先对其具有时间相关外力的辅助线性方程进行一般估计，再通过这些一般估计推导出其具有奇异振荡力线性方程的估计.

关　键　词： 奇异振荡力；线性 Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer 方程；辅助线性方程

中图分类号： O175.29　　**文献标志码：** A　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号： 1673-9868(2022)03-0125-05

Some Estimates for the 3D Non-autonomous Linearization Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer Equations with Singularly Oscillating Forces

TAN Qingwei，　ZHU Chaosheng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we mainly study the three-dimensional non-autonomous linear Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer equation with singular oscillating force. Firstly, the general estimation of the auxiliary linear equation with time-dependent external force was carried out, and then the singular oscillation was derived from the results of these general estimates.

Key words: singularly oscillating forces; Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer equations; auxiliary linear equation

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个边界光滑的有界域. 本文主要研究 Ω 上具有奇异振荡力的三维非自治 Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer 方程[1-4]：

收稿日期：2021-01-17
基金项目：国家自然科学基金项目(11361016)；重庆市自然科学基金面上项目(cstc2020jcyj-msxmX0037).
作者简介：谭青维，硕士研究生，主要从事偏微分方程现代理论研究.
通信作者：朱朝生，副教授，博士.

$$\begin{cases} u_t-\mu\Delta u-\alpha^2\Delta u_t+(u\cdot\nabla)u+b\,|u|^{r-1}u+ \\ \nabla p+au=f_0(t,x)+\varepsilon^{-\rho}f_1\left(\dfrac{t}{\varepsilon},x\right) \\ \nabla\cdot u=0 \qquad x\in\Omega \\ u(x,t)|_{\partial\Omega}=0 \\ u(x,\tau)=u_\tau(x) \qquad \tau\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

其中：$a\in\mathbb{R}$, $b>0$, $r\in[1,\infty)$, $\mu>0$ 是流体的运动粘度，α 是流体弹性的表征参数，函数 $u=u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ 表示流体的速度，$p=p(x,t)$ 表示压力．当 $a,b=0$ 时，方程(1) 为带奇异振荡力的 Navier-Stokes-Voigt 方程[5-10]；当 $\alpha=0$ 时，方程(1) 为带奇异振荡力的 Brinkman-Forchheimer 方程[11-15]；当 $a,b,\alpha=0$ 时，方程(1) 为带奇异振荡力的 Navier-Stokes 方程[16-17]．

结合方程(1)，我们考虑如下平均 Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer 方程：

$$\begin{cases} u_t-\mu\Delta u-\alpha^2\Delta u_t+(u\cdot\nabla)u+au+b\,|u|^{r-1}u+\nabla p=f_0(t,x) \\ \nabla\cdot u=0 \qquad x\in\Omega \\ u(x,t)|_{\partial\Omega}=0 \\ u(x,\tau)=u_\tau(x) \qquad \tau\in\mathbb{R} \end{cases}$$

记函数

$$f_\varepsilon(x,t)=\begin{cases} f_0(t,x)+\varepsilon^{-\rho}f_1\left(\dfrac{t}{\varepsilon},x\right) & 0<\varepsilon<1 \\ f_0(t,x) & \varepsilon=0 \end{cases}$$

其中函数 $f_0(x,s),f_1(x,s)\in L_b^2(\mathbb{R},H)$，$L_b^2(\mathbb{R},H)\subseteq L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R},H)$ 是平移有界函数空间，即有

$$\|f_0\|_{L_b^2}^2=\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|f_0(s)\|^2\mathrm{d}s=M_0^2$$

$$\|f_1\|_{L_b^2}^2=\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|f_1(s)\|^2\mathrm{d}s=M_1^2$$

其中常数 $M_0,M_1\geqslant 0$，定义

$$Q_\varepsilon=\begin{cases} M_0+2M_1\varepsilon^{-\rho} & 0<\varepsilon<1 \\ M_0 & \varepsilon=0 \end{cases}$$

综上有

$$\|f_\varepsilon\|_{L_b^2}\leqslant Q_\varepsilon$$

引入函数空间

$$S=\{u\in(C_0^\infty(\Omega))^3:\nabla\cdot u=0\} \qquad H=\mathrm{cl}_{(L^2(\Omega))^3}S \qquad V=\mathrm{cl}_{(H_0^1(\Omega))^3}S$$

这里 $\mathrm{cl}_X S$ 表示 S 在空间 X 的闭包，H 与 V 是可分的 Hilbert 空间．令 H' 是 H 的对偶空间，V' 是 V 的对偶空间，有 $V\hookrightarrow H=H'\hookrightarrow V'$，其中嵌入都是连续且稠密的．$H$ 与 V 分别具有如下内积和范数：

$$(u,v)=\sum_{i=1}^3\int_\Omega u_i(x)v_i(x)\mathrm{d}x,\ |\cdot|_2=(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u,v\in H$$

$$((u,v))=\sum_{i,j=1}^3\int_\Omega\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x,\ \|\cdot\|=((\cdot,\cdot))^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u,v\in V$$

用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V' 与 V 之间的对偶集，用 $|\cdot|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 空间中的范数，用 $\|\cdot\|_E$ 表示巴纳赫空间 E 中的范数．字母 C 为常数．

方程(1) 的前两个等式，可以写成如下抽象形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\alpha^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Au+\mu Au+B(u)+F(u)=f \\ \nabla\cdot u=0 \end{cases} \tag{2}$$

令 $A=-P\Delta$ 是 Stokes 算子，P 是从 $L^2(\Omega)$ 到 H 的 Leray 正交投影，有

$$\langle Au, v\rangle = ((u, v)) \qquad F(u) = P(au + b\,|u|^{r-1}u)$$

令 $B: V\times V \longrightarrow V'$ 是双线性算子，有

$$\langle B(u, v), w\rangle = b(u, v, w) \qquad B(u) = b(u, u)$$

这里

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \,\mathrm{d}x$$

对于方程(2) 的全局解的存在唯一性，可由文献[2] 中的标准方法得到如下定理 1.

定理 1　假设 $u_\tau \in V$，$f(x, t)$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ 中平移紧，则方程(2) 存在唯一解

$$u \in C([\tau, T]; V) \cap L^2(\tau, T; V) \cap L^\infty(\tau, T; V) \cap L^{r+1}(\tau, T; L^{r+1}(\Omega))$$

我们将考虑具有与时间相关的外力驱动的非自治辅助线性方程，对其进行一系列估计.

$$Y_t(t) + \mu AY(t) + \alpha^2 AY_t(t) + aY(t) = K(t),\ Y(t)\,|_{t=\tau} = 0 \tag{3}$$

定理 2　假设 $K(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$，则方程(3) 存在唯一解

$$Y(t) \in C([\tau, T]; V) \cap L^2(\tau, T; V),\ Y_t(t) \in L^2(\tau, T; V')$$

且满足不等式

$$|AY(t)|_2^2 \leqslant C\int_\tau^t \mathrm{e}^{-C(t-s)}\,|K(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \qquad \forall\,\tau \leqslant t$$

$$\int_t^{t+1} \|Y(s)\|^2\,\mathrm{d}s \leqslant C\left(\|Y(t)\|^2 + \int_t^{t+1} |K(s)|_2^2\,\mathrm{d}s\right)$$

证　用 Galerkin 逼近法，可以推出解的存在，将方程(3) 与 $AY(t)$ 作内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|Y(t)\|^2 + \alpha^2|AY(t)|_2^2) + \mu|AY(t)|_2^2 + a\|Y(t)\|^2 =$$
$$(K(t), AY(t)) \leqslant \left|\frac{1}{\mu - a\alpha^2}\right| |K(t)|_2^2 + (\mu - a\alpha^2)\,|AY(t)|_2^2 \tag{4}$$

由不等式(4) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|Y(t)\|^2 + \alpha^2|AY(t)|_2^2) \leqslant$$
$$\left|\frac{2}{\mu - a\alpha^2}\right| |K(t)|_2^2 + 2(\mu - a\alpha^2)\,|AY(t)|_2^2 - 2a\|Y(t)\|^2 - 2\mu|AY(t)|_2^2 =$$
$$\left|\frac{2}{\mu - a\alpha^2}\right| |K(t)|_2^2 - 2a\alpha^2|AY(t)|_2^2 - 2a\|Y(t)\|^2$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{2at}(\|Y(t)\|^2 + \alpha^2|AY(t)|_2^2)] =$$
$$2a\,\mathrm{e}^{2at}(\|Y(t)\|^2 + \alpha^2|AY(t)|_2^2) + \mathrm{e}^{2at}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|Y(t)\|^2 + \alpha^2|AY(t)|_2^2) \leqslant$$
$$\mathrm{e}^{2at}\left[2a(\|Y(t)\|^2 + \alpha^2|AY(t)|_2^2) + \left|\frac{2}{\mu - a\alpha^2}\right| |K(t)|_2^2 - 2a\alpha^2|AY(t)|_2^2 - 2a\|Y(t)\|^2\right] =$$
$$\left|\frac{2\mathrm{e}^{2at}}{\mu - a\alpha^2}\right| |K(t)|_2^2 \tag{5}$$

对不等式(5) 在$[\tau, t]$ 上积分，得

$$\mathrm{e}^{2at}\alpha^2|AY(t)|_2^2 \leqslant \left|\frac{2}{\mu - a\alpha^2}\right|\int_\tau^t \mathrm{e}^{2as}\,|K(s)|_2^2\,\mathrm{d}s$$

易得

$$|AY(t)|_2^2 \leqslant \left|\frac{2}{(\mu - a\alpha^2)\alpha^2}\right|\int_\tau^t \mathrm{e}^{-2a(t-s)}\,|K(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \leqslant$$
$$C\int_\tau^t \mathrm{e}^{-C(t-s)}\,|K(s)|_2^2\,\mathrm{d}s$$

将方程(3)与 $Y(t)$ 作内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|Y(t)|_2^2+\alpha^2\|Y(t)\|^2)+\mu\|Y(t)\|^2+a|Y(t)|_2^2=(K(t),Y(t))\leqslant$$
$$\frac{1}{a}|K(t)|_2^2+a|Y(t)|_2^2$$

即

$$2\mu\|Y(t)\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|Y(t)|_2^2+\alpha^2\|Y(t)\|^2)\leqslant\frac{2}{a}|K(t)|_2^2+2a|Y(t)|_2^2-2a|Y(t)|_2^2=$$
$$\frac{2}{a}|K(t)|_2^2 \tag{6}$$

对不等式(6)在$[t,t+1]$上积分，再运用 Poincaré 不等式得

$$2\mu\int_t^{t+1}\|Y(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant|Y(t)|_2^2+\alpha^2\|Y(t)\|^2+\frac{2}{a}\int_t^{t+1}|K(s)|_2^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$(\lambda_1^{-1}+\alpha^2)\|Y(t)\|^2+\frac{2}{a}\int_t^{t+1}|K(s)|_2^2\mathrm{d}s$$

即有

$$\int_t^{t+1}\|Y(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C\left(\|Y(t)\|^2+\int_t^{t+1}|K(s)|_2^2\mathrm{d}s\right)$$

定理 2 证毕.

定理 3 设 $k(t)\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R},H)$，存在常数 l 满足

$$\sup_{t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}}\left\{|K(t,\tau)|_2^2+\int_t^{t+1}|K(s,\tau)|_2^2\mathrm{d}s\right\}\leqslant l^2 \tag{7}$$

则带奇异振荡力的线性方程

$$X_t(t)+\mu AX(t)+\alpha^2AX_t(t)+aX(t)=k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\ X(t)|_{t=\tau}=0 \tag{8}$$

的解 $X(t)$ 满足不等式

$$\|X(t)\|^2+\int_t^{t+1}\|X(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant Cl^2\varepsilon^2\qquad\forall t\geqslant\tau \tag{9}$$

其中 C 与 $K(t)$ 无关.

证 首先记

$$K_\varepsilon(t)=\int_\tau^t k\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}s=\varepsilon\int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{t}{\varepsilon}}k(s)\mathrm{d}s=\varepsilon K\left(\frac{t}{\varepsilon},\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$$

则由(7)式可推出

$$\sup_{t\geqslant\tau}|K_\varepsilon(t)|_2\leqslant l\varepsilon$$
$$\int_t^{t+1}|K_\varepsilon(s)|_2^2\mathrm{d}s=\varepsilon^2\int_t^{t+1}\left|K\left(\frac{s}{\varepsilon},\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|_2^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\varepsilon^2\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}|K(s,\tau)|_2^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$Cl^2\varepsilon^2$$

由积分中值定理和定理 2 可得

$$\int_\tau^t\mathrm{e}^{-C(t-s)}|K_\varepsilon(s)|_2^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-C}}\sup_{t\geqslant\tau}\int_t^{t+1}|K_\varepsilon(s)|_2^2\mathrm{d}s\leqslant Cl^2\varepsilon^2$$

现令

$$Y(t)=\int_\tau^t X(s)\mathrm{d}s$$

由 $X(\tau)=0$，得

$$Y_t(t)=X(t)=\int_{\tau}^{t}X_t(s)\mathrm{d}s$$

方程(8) 在$[\tau,t]$上积分可得

$$Y_t(t)+\mu AY(t)+\alpha^2 AY_t(t)+aY(t)=K_\varepsilon(t),\ Y(t)\mid_{t=\tau}=0$$

综上所述可得

$$\begin{aligned}\mid X(t)\mid_2+\alpha^2\mid AX(t)\mid_2=&\mid Y_t(t)\mid_2+\alpha^2\mid AY_t(t)\mid_2\leqslant\\ &\mu\mid AY(t)\mid_2+a\mid Y(t)\mid_2+\mid K_\varepsilon(t)\mid_2\leqslant Cl\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\| X(t)\| \leqslant C(\mid X(t)\mid_2+\alpha^2\mid AX(t)\mid_2)\leqslant Cl\varepsilon \tag{10}$$

由不等式(10) 可得不等式(9) 成立，定理 3 证毕.

参考文献：

[1] ANH C T，TRANG P T. On the 3D Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer Equations in some Unbounded Domains [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2013，89：36-54.

[2] SUK Q，QINY M. The Pullback-Attractors for the 3D Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer System with Delay [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2018，41(16)：6122-6129.

[3] MOHAN M T. Global and Exponential Attractors for the 3D Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer Equations [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-B，2020，25(9)：3393-3436.

[4] ANH C T，THANHNV. Asymptotic Behavior of the Stochastic Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer Equations [J]. Stochastic Analysis and Applications，2016，34(3)：441-455.

[5] QIN Y M，YANG X G，LIU X. Pullback Attractors for a 3D Non-Autonomous Navier-Stokes-Voight Equations [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica English Series，2019，35(4)：737-752.

[6] KALANTAROV V K，TITI E S. Global Attractors and Determining Modes for the 3D Navier-Stokes-Voight Equations [J]. Chinese Annals of Mathematics，Series B，2009，30(6)：697-714.

[7] QIN Y M，YANG X G，LIUX. Averaging of a 3D Navier-Stokes-Voight Equation with Singularly Oscillating Forces [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2012，13(2)：893-904.

[8] 李戈萍，朱朝生. 带非线性阻尼项的 Navier-Stokes 方程的时间解析性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(3)：126-131.

[9] LI H Y，QINY M. Pullback Attractors for Three-Dimensional Navier-Stokes-Voigt Equations with Delays [J]. Boundary Value Problems，2013，2013(1)：1-17.

[10] NICHE C J. Decay Characterization of Solutions to Navier-Stokes-Voigt Equations in Terms of the Initial Datum [J]. Journal of Differential Equations，2016，260(5)：4440-4453.

[11] KALANTAROVV，ZELIKS. Smooth Attractors for the Brinkman-Forchheimer Equations with Fast Growing Nonlinearities [J]. Communications on Pure and Applied Analysis，2012，11(5)：2037-2054.

[12] SONG X L，WU J H. Non-Autonomous 3D Brinkman-Forchheimer Equation with Singularly Oscillating External Force and Its Uniform Attractor [J]. AIMS Mathematics，2020，5(2)：1484-1504.

[13] LOUAKED M，SELOULA N，TRABELSI S. Approximation of the Unsteady Brinkman-Forchheimer Equations by the Pressure Stabilization Method [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations，2017，33(6)：1949-1965.

[14] YANG X G，LI L，YAN X. The Structure and Stability of Pullback Attractors for 3D Brinkman-Forchheimer Equation with Delay [J]. Electronic Research Archive，2020，28(4)：1395-1418.

[15] HAJDUKKW，ROBINSONJC. Energy Equality for the 3D Critical Convective Brinkman-Forchheimer Equations [J]. Journal of Differential Equations，2017，263(11)：7141-7161.

[16] 刘青，尚月强. 非定常 Navier-Stokes 方程有限元算子分裂算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(3)：75-83.

[17] 王炷霖，敬璐如，冯民富. 定常 Navier-Stokes 方程的三个梯度-散度稳定化 Taylor-Hood 有限元 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2021，58(4)：21-26.

责任编辑　张枸