第 44 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2022 年 4 月
Vol. 44 No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr. 2022

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.04.013

一个点并路的补图的色等价图类

李丹阳，　马海成

青海民族大学 数学与统计学院，西宁 810007

摘要：设 G 是一个 n 阶图．众所周知，两个图 G 和 H 色等价当且仅当它们的补图伴随等价．可见伴随多项式是研究图的色多项式的一种有效途径．本文通过比较伴随多项式的最小根，最终计算了 $K_1 \cup P_m$ 的伴随等价图的个数以及它的伴随等价图类．进一步，计算了 $\overline{K_1 \cup P_m}$ 的色等价图的个数以及它的色等价图类，这里 K_1 和 P_m 分别表示一个孤立点和 m 个点的路．

关 键 词：色多项式；伴随多项式；色等价；伴随等价；色唯一；伴随唯一

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673-9868(2022)04-0110-07

The Chromatic Equivalence Classes of the Complements of Union Graphs of Vertex and a Path

LI Danyang，　MA Haicheng

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Nationalities University, Xining 810007, China

Abstract: Let G be a graph with order n. It is well known that two graphs G and H are chromatically equivalent if and only if their complementary graphs are adjoint equivalencet. It can be seen that adjoint polynomials are an effective way to study the chromatic polynomials of graphs. By comparing the minimum roots of adjoint polynomials, this paper finally calculates the number of adjoint equivalent graphs of $K_1 \cup P_m$ and the class of adjoint equivalent graphs are also calculated. Furthermore, the number of chromatic equivalent graphs of $K_1 \cup P_m$ and the class of chromatic equivalent graphs of $K_1 \cup P_m$ are also calculated. Here, K_1 and P_m represent an isolated vertex and a path of m vertices, respectively.

Key words: chromatic polynomial; adjoint polynomial; chromatic equivalence; adjoint equivalence; chromatic uniqueness; adjoint uniqueness

---

收稿日期：2021-05-10

基金项目：国家自然科学基金项目(11561056，11661066)；青海省自然科学基金项目(2022-ZJ-924)；青海民族大学研究生创新项目(07M2021003)．

作者简介：李丹阳，硕士研究生，主要从事组合数学的研究．

通信作者：马海成，博士，教授．

本文仅考虑有限无向的简单图．对于图 G，令 $\overline{G}$，$V(G)$，$E(G)$，$\chi(G)$ 分别为图 G 的补图、点集、边集、色数．K_n，P_n 和 $C_n(n\geqslant 3)$ 分别表示 n 个点的完全图、路和圈．K_1 表示一个孤立点．D_n 表示 C_3 上的一点与路 P_{n-2} 的一个端点黏结后得到的图．$T_{i,j,k}$ 表示只有 1 个 3 度点，3 个 1 度点，且这个 3 度点到 3 个 1 度点的距离分别为 i，j，k 的树．$N_G(v)$ 表示 G 中所有与点 v 邻接的点构成的集合．$G\cup H$ 表示图 G 与图 H 的不交并，mG 表示 m 个 G 的不交并．

设 G 是一个 n 阶图．用 λ 种颜色对图 G 的顶点进行着色，使得相邻顶点着不同色的方法数是 λ 的一个多项式，被称为图 G 的色多项式，记为 $P(G,\lambda)$．若两个图 G 和 H 的色多项式相等，则称这两个图是色等价的，记为 $G\sim_P H$，与图 G 色等价的所有图构成的集合记为$[G]_p$，称为图 G 的色等价图类．若与图 G 色等价的任何图 H 均有 $H\cong G$，即$[G]_p=\{G\}$，则称图 G 是色唯一的．文献[1]首次定义了图的色等价和色唯一的概念．为了研究图的色多项式，文献[2]提出了伴随多项式的概念，如果 $P(\overline{G},\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha(\overline{G},i)(\lambda)_i$ 为图 G 的补图 $\overline{G}$ 的色多项式，则

$$h(G,x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(\overline{G},i)x^i$$

称为图 G 的伴随多项式，这里的$(\lambda)_i=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$．到目前为止，关于这方面已经有了大量的研究成果[3-8]．若两个图 G 和 H 的伴随多项式相等，则称这两个图是伴随等价的，记为 $G\sim H$．与图 G 伴随等价的所有图构成的集合记为$[G]$．若与图 G 伴随等价的任何图 H 均有 $H\cong G$，则称图 G 是伴随唯一的．由伴随多项式和色多项式之间的关系容易发现：两个图 G 和 H 色等价当且仅当它们的补图伴随等价，图 G 色唯一当且仅当它的补图伴随唯一．利用伴随多项式研究图的色性这方面已有了大量的结果[9-18]．用 $\beta(G)$ 表示伴随多项式 $h(G,x)$ 的最小实根．文献[15]得到了 $\beta(G)>-4$ 的所有图 G．文献[16]给出了 $\beta(G)>-4$ 的所有图之间伴随等价的一个规律，且给出了其中两个图之间变化的 12 个伴随等价关系，称为伴随等价桥．然而，对于给定的图 G，完全确定集合$[G]_p$ 是很困难的．文献[17]确定了集合$[P_m]_p$，文献[18]得到了与 $K_1\cup P_{m_0}$ 的补图有相同色划分的图．本文充分利用伴随等价桥，通过比较两个图伴随多项式最小根的方法得到了集合$[\overline{K_1\cup P_m}]$，因此也得到了集合$[\overline{K_1\cup P_m}]_p$．

为了找到 $K_1\cup P_m(m\geqslant 2)$ 的所有伴随等价图，按 $m+1$ 所含的最大奇因数是 1，3，5，9，15 或其他奇数分为 6 种情形．为方便，用 $\delta(G)$ 表示图 G 的所有不同构的伴随等价图的个数．$\delta(G)=1$ 当且仅当 G 是伴随唯一的．为方便读者阅读，下面列出文献[16]中的 12 个等价桥：

（1）$P_{2m+1}\sim P_m\cup C_{m+1}(m\geqslant 3)$；

（2）$T_{1,1,n}\sim K_1\cup C_{n+2}(n\geqslant 2)$；

（3）$T_{1,2,n}\sim K_1\cup D_{n+3}$；

（4）$P_4\sim K_1\cup C_3$；

（5）$K_1\cup P_5\sim P_2\cup T_{1,1,1}$；

（6）$C_4\sim D_4$；

（7）$P_2\cup C_6\sim P_3\cup D_5$；

（8）$P_2\cup C_9\sim P_5\cup D_6$；

（9）$K_1\cup C_9\sim T_{1,1,1}\cup D_6$；

（10）$P_2\cup C_{15}\sim P_5\cup C_5\cup D_7$；

（11）$K_1\cup C_{15}\sim T_{1,1,1}\cup C_5\cup D_7$；

（12）$C_{15}\cup D_6\sim C_5\cup C_9\cup D_7$．

定理 1　（i）若 $m+1=2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\delta(K_1 \cup P_m)=\begin{cases}1 & n=1\\ \dfrac{n(n+3)}{2}-1 & n \geqslant 2\end{cases}$$

(ii) 若 $m+1=3\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\delta(K_1 \cup P_m)=\begin{cases}n & n=1,2\\ \dfrac{n(n-1)}{2}+2 & n \geqslant 3\end{cases}$$

(iii) 若 $m+1=5\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\delta(K_1 \cup P_m)=n^2+1$$

(iv) 若 $m+1=9\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\delta(K_1 \cup P_m)=\begin{cases}1 & n=1\\ \dfrac{n(n+1)}{2}+1 & n \geqslant 2\end{cases}$$

(v) 若 $m+1=15\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$\delta(K_1 \cup P_m)=\begin{cases}1 & n=1\\ \dfrac{n(n+1)}{2}+1 & n \geqslant 2\end{cases}$$

(vi) 若 $m+1=2^{n-1}(2k+1)$ 对某对正整数 $n,k(\neq 1,2,4,7)$ 成立，则

$$\delta(K_1 \cup P_m)=\frac{n(n+1)}{2}$$

证 设 $H \sim K_1 \cup P_m$，H_1 是 H 的一个连通分支，使得 $\beta(H_1)=\beta(P_m)$，$H=H_1 \cup H_2$.

(i) 当 $n=1$ 时，由文献[16]中的推论 3.2 知 $K_1 \cup P_3$ 是伴随唯一的. 对 $n \geqslant 2$ 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，比较两边的最小实根，由文献[16]中的引理 2.7 知 $H_1=P_7, C_4, D_4, T_{1,1,2}$.

若 $H_1=P_7$，由 $K_1 \cup P_7 \sim H=P_7 \cup H_2$ 得 $H_2 \sim K_1$，由 K_1 伴随唯一得到 $H_2=K_1$.

若 $H_1=C_4$，利用伴随等价桥(1)，$H=C_4 \cup H_2 \sim K_1 \cup P_7 \sim K_1 \cup P_3 \cup C_4$，从而得到 $H_2 \sim K_1 \cup P_3$，再由文献[16]中的推论 3.2 知 $K_1 \cup P_3$ 伴随唯一，所以 $H_2=K_1 \cup P_3$.

若 $H_1=D_4$，利用伴随等价桥(1)和(6)，$H=D_4 \cup H_2 \sim K_1 \cup P_7 \sim K_1 \cup P_3 \cup D_4$，从而得到 $H_2=K_1 \cup P_3$.

若 $H_1=T_{1,1,2}$，利用伴随等价桥(1)和(2)，$H=T_{1,1,2} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_7 \sim K_1 \cup P_3 \cup C_4 \sim P_3 \cup T_{1,1,2}$，从而得到 $H_2=P_3$. 故 $\delta(K_1 \cup P_7)=4$.

假设结论对 $n-1(n \geqslant 3)$，即 $m'+1=2^n$ 成立. 由文献[16]中的引理 2.7 知 $H_1=P_m, C_{m_2+1}, T_{1,1,m_2-1}$.

若 $H_1=P_m$，由 $K_1 \cup P_m \sim H=P_m \cup H_2$，得 $H_2=K_1$.

若 $H_1=C_{m_2+1}$，利用伴随等价桥(1)，

$$H=C_{m_2+1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \sim K_1 \cup P_{m_2} \cup C_{m_2+1}$$

从而得到 $H_2 \sim K_1 \cup P_{m_2}$. 由归纳假设，这样的 H_2 共有 $\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}-1$ 个.

若 $H_1=T_{1,1,m_2-1}$，利用伴随等价桥(1)和(2)，

$$H=T_{1,1,m_2-1} \cup H_2 \sim K_1 \cup P_m \sim T_{1,1,m_2-1} \cup P_{m_2}$$

从而得到 $H_2 \sim P_{m_2}$. 再由文献[17]中的定理 1 知这样的 H_2 共有 n 个.

故

$$\delta(K_1 \cup P_m)=1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}-1+n=\frac{n(n+3)}{2}-1$$

(ii) 当 $n=1$ 时，由文献[16]中的推论 3.2 知 $K_1 \cup P_2$ 是伴随唯一的. 当 $n=2$ 时，由文献[16]中的引

理 2.7 知 $H_1=P_5,T_{1,1,1}$，相应地，$H_2\sim K_1$ 或 $H_2\sim P_2$，进一步得到 $H_2=K_1,P_2$. 故 $\delta(K_1\cup P_5)=2$. 对 $n\geqslant 3$ 用数学归纳法. 当 $n=3$ 时，由文献[16] 中的引理 2.7 知 $H_1=P_{11},C_6,T_{1,1,4},D_5,T_{1,2,2}$.

若 $H_1=P_{11}$，由 $H=P_{11}\cup H_2\sim K_1\cup P_{11}$ 得 $H_2=K_1$.

若 $H_1=C_6$，利用伴随等价桥(1)，$H=C_6\cup H_2\sim K_1\cup P_{11}\sim K_1\cup P_5\cup C_6$，得 $H_2\sim K_1\cup P_5$，又由 $n=2$ 的情形知 $H_2=K_1\cup P_5,P_2\cup T_{1,1,1}$.

若 $H_1=T_{1,1,4}$，利用伴随等价桥(1) 和(2)，$H=T_{1,1,4}\cup H_2\sim K_1\cup P_{11}\sim K_1\cup P_5\cup C_6\sim P_5\cup T_{1,1,4}$，从而得到 $H_2\sim P_5$，由文献[16] 中的推论 3.2 知 P_5 是伴随唯一的，所以 $H_2=P_5$.

若 $H_1=D_5$，利用伴随等价桥(1),(5) 和(7)，$H=D_5\cup H_2\sim K_1\cup P_{11}\sim K_1\cup P_5\cup C_6\sim P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\sim P_3\cup D_5\cup T_{1,1,1}$，从而得到 $H_2\sim P_3\cup T_{1,1,1}$，又由文献[16] 中的推论 3.2 知 $P_3\cup T_{1,1,1}$ 是伴随唯一的，所以 $H_2=P_3\cup T_{1,1,1}$.

若 $H_1=T_{1,2,2}$，利用伴随等价桥(1),(3) 和(7)，$H=T_{1,2,2}\cup H_2\sim K_1\cup D_5\cup H_2\sim K_1\cup P_{11}\sim K_1\cup P_5\cup C_6\sim P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\sim P_3\cup D_5\cup T_{1,1,1}$，从而得到 $K_1\cup H_2\sim P_3\cup T_{1,1,1}$，由于 $P_3\cup T_{1,1,1}$ 是伴随唯一的，所以这样的 H_2 是不存在的. 故 $\delta(K_1\cup P_{11})=5$.

假设结论对 $n-1(n\geqslant 3)$，即 $m'+1=3\times 2^{n-2}$ 成立. 由文献[16] 中的引理 2.7 知 $H_1=P_m,C_{m_2+1},T_{1,1,m_2-1}$. 同(i)类似，我们得到 $H_2\sim K_1,K_1\cup P_{m_2},P_{m_2}$. 由归纳假设和文献[17] 中的定理 1 知，这样的 H_2 分别有 1 个，$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ 个或 $n-2$ 个，故

$$\delta(K_1\cup P_m)=1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2+n-2=\frac{n(n-1)}{2}+2$$

(iii) 当$n=1$时，由文献[16]中的引理2.7知$H_1=P_4,C_3$，相应地，$H_2\sim K_1,2K_1$，进一步，$H_2=K_1,2K_1$. 故 $\delta(K_1\cup P_4)=2$. 对 $n\geqslant 2$ 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，由文献[16] 中的引理 2.7 知 $H_1=P_9,C_5,T_{1,1,3}$.

若 $H_1=P_9$，由 $H=P_9\cup H_2\sim K_1\cup P_9$ 得 $H_2=K_1$.

$H_1=C_5$，利用伴随等价桥(1)，$H=C_5\cup H_2\sim K_1\cup P_9\sim K_1\cup P_4\cup C_5$，得 $H_2\sim K_1\cup P_4$，又由 $n=1$ 的情形知 $H_2=K_1\cup P_4,2K_1\cup C_3$.

若 $H_1=T_{1,1,3}$，利用伴随等价桥(1) 和(2)，$H=T_{1,1,3}\cup H_2\sim K_1\cup P_9\sim K_1\cup P_4\cup C_5\sim P_4\cup T_{1,1,3}$，得 $H_2\sim P_4$，又由文献[17] 中的定理 1 得 $H_2=P_4,K_1\cup C_3$. 故 $\delta(K_1\cup P_9)=5$.

假设结论对 $n-1(n\geqslant 3)$，即 $m'+1=5\times 2^{n-2}$ 成立. 由文献[16] 中的引理 2.7 知 $H_1=P_m,C_{m_2+1},T_{1,1,m_2-1}$. 同(i)类似，我们得到 $H_2\sim K_1,K_1\cup P_{m_2},P_{m_2}$. 由归纳假设和文献[17] 中的定理 1 知，这样的 H_2 分别有 1 个，$(n-1)^2+1$ 个或 $2(n-1)$ 个，故

$$\delta(K_1\cup P_m)=1+(n-1)^2+1+2(n-1)=n^2+1$$

(iv) 当 $n=1$ 时，由文献[16] 中的推论 3.2 知 $K_1\cup P_8$ 是伴随唯一的. 对 $n\geqslant 2$ 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，由文献[16] 中的引理 2.7 知 $H_1=P_{17},C_9,T_{1,1,7},D_6,T_{1,2,3}$.

若 H_1 是前 4 个图，相应地，$H_2\sim K_1,K_1\cup P_8,P_8,P_8\cup T_{1,1,1}$，由文献[16] 中的推论 3.2 知这些图都是伴随唯一的，所以 $H_2=K_1,K_1\cup P_8,P_8,P_8\cup T_{1,1,1}$.

若 $H_1=T_{1,2,3}$，利用伴随等价桥(1),(3) 和(9)，$H=T_{1,2,3}\cup H_2\sim K_1\cup D_6\cup H_2\sim K_1\cup P_{17}\sim K_1\cup P_8\cup C_9\sim P_8\cup T_{1,1,1}\cup D_6$，得 $K_1\cup H_2\sim P_8\cup T_{1,1,1}$，又由于 $P_8\cup T_{1,1,1}$ 是伴随唯一的，所以这样的 H_2 是不存在的. 故 $\delta(K_1\cup P_{17})=4$.

假设结论对 $n-1(n\geqslant 3)$，即 $m'+1=9\times 2^{n-2}$ 成立. 由文献[16] 中的引理 2.7 知 $H_1=P_m,C_{m_2+1},T_{1,1,m_2-1}$. 同(i)类似，我们得到 $H_2\sim K_1,K_1\cup P_{m_2},P_{m_2}$. 由归纳假设和文献[17] 中的定理 1 知，这样的 H_2 分别有 1 个，$\dfrac{n(n-1)}{2}+1$ 个或 $n-1$ 个，故

$$\delta(K_1\cup P_m)=1+\frac{n(n-1)}{2}+1+n-1=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

(ⅴ) 证明与(ⅳ)类似.

(ⅵ) 对 $n\geqslant 1$ 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时,由文献[16]中的推论3.2知 $K_1\cup P_{2k}$ 是伴随唯一的. 假设结论对 $n-1(n\geqslant 3)$,即 $m'+1=2^{n-2}\times(2k+1)(k\neq 1,2,4,7)$ 成立. 由文献[16]中的引理2.7知 $H_1=P_m,C_{m_2+1},T_{1,1,m_2-1}$. 同(ⅰ)类似,我们得到 $H_2\sim K_1,K_1\cup P_{m_2},P_{m_2}$. 由归纳假设和文献[17]中的定理1知,这样的 H_2 分别有1个,$\frac{n(n-1)}{2}$ 个或 $n-1$ 个,故

$$\delta(K_1\cup P_m)=1+\frac{n(n-1)}{2}+n-1=\frac{n(n+1)}{2}$$

若 $m+1=2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立,或 $m+1=2^{n-1}\times(2k-1)(k\neq 2)$ 对某对正整数 n,k 成立,令

$$\Omega_1=\{P_{m_1},P_{m_2}\cup C_{m_2+1},P_{m_3}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1},\cdots,P_{m_n}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_n+1}\}$$

若 $m+1=3\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立,令

$$\Omega_2=\{P_{m_1},P_{m_2}\cup C_{m_2+1},P_{m_3}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1},\cdots,P_{m_{n-1}}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_{n-1}+1}\}$$

若 $m+1=5\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立,令

$$\begin{aligned}\Omega_3=\{&K_1\cup C_3\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_n+1},C_3\cup T_{1,1,m_2-1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup\\&C_{m_n+1},\cdots,C_3\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup T_{1,1,m_n-1}\}\end{aligned}$$

这里的 $m_1=m$,$m_{i+1}=\frac{m_i-1}{2}(i=1,2,\cdots,n-1)$,集合 Ω_1,Ω_2 和 Ω_3 分别有 $n,n-1$ 和 n 个图. 文献[17]确定了集合 $[P_m]$ 如下:

若 $m+1=2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立,则

$$[P_m]=\begin{cases}\{P_3\} & n=1\\ \Omega_1\cup\{P_3\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup D_4\} & n\geqslant 2\end{cases}$$

若 $m+1=3\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立,则

$$[P_m]=\begin{cases}\{P_2\} & n=1\\ \{P_5\} & n=2\\ \Omega_2 & n\geqslant 3\end{cases}$$

若 $m+1=5\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立,则 $[P_m]=\Omega_1\cup\Omega_3$;

若 $m+1=2^{n-1}\times(2k+1)(k\neq 1,2)$ 对某对正整数 n 和 k 成立,则 $[P_m]=\Omega_1$.

若 $m+1=2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立,或 $m+1=2^{n-1}\times(2k-1)(k\neq 2)$ 对某对正整数 n,k 成立,由等价桥(2)我们知道,集合 Ω_1 中的每一个含有圈分支的图中的每一个圈与一个孤立点 K_1 相遇就会等价于一个 T-形分支. 令

$$\begin{aligned}\Phi_1=\{&P_{m_2}\cup T_{1,1,m_2-1},P_{m_3}\cup T_{1,1,m_2-1}\cup C_{m_3+1},P_{m_3}\cup C_{m_2+1}\cup T_{1,1,m_3-1},\cdots,\\&P_{m_n}\cup T_{1,1,m_2-1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_n+1},P_{m_n}\cup C_{m_2+1}\cup T_{1,1,m_3-1}\cup\cdots\cup C_{m_n+1},\cdots,\\&P_{m_n}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup T_{1,1,m_n-1}\}\end{aligned}$$

它就是集合 Ω_1 中的每一个含有圈分支的图中的一个圈与一个孤立点 K_1 相遇等价于一个 T-形分支后形成的集合,所以 Φ_1 中共有 $\binom{n}{2}$ 个图. 令 $\Theta_1=\{K_1\cup H:H\in\Omega_1\}\cup\Phi_1$,则 $|\Theta_1|=\binom{n+1}{2}$.

若 $m+1=2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立,由等价桥(6),Θ_1 中的图 $K_1\cup P_3\cup C_4\cup C_8\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$ 等价于 $K_1\cup P_3\cup D_4\cup C_8\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$,再利用等价桥(2)使得图 $K_1\cup P_3\cup D_4\cup C_{m_2+1}\cup\cdots\cup C_{m_{n-1}+1}$ 中的每一个圈分支与一个孤立点 K_1 相遇就会等价于一个 T-形分支,令

$$\Delta_1=\{K_1\cup P_3\cup C_{m_2+1}\cup\cdots\cup C_{m_{n-1}+1},P_3\cup T_{1,1,6}\cup C_{16}\cup\cdots\cup C_{m_2+1},$$
$$P_3\cup C_8\cup T_{1,1,14}\cup\cdots\cup C_{m_2+1},\cdots,P_3\cup C_8\cup C_{16}\cup\cdots\cup T_{1,1,m_2-1}\}$$

则 Δ_1 中共有 $\binom{n-1}{1}$ 个图.

若 $m+1=3\times 2^{n-1}$，$n\geqslant 3$. 由等价桥(2)知集合 Ω_2 中的每一个含有圈分支的图中的每一个圈与一个孤立点 K_1 相遇就会等价于一个 T-形分支. 令

$$\Phi_2=\{P_{m_2}\cup T_{1,1,m_2-1},P_{m_3}\cup T_{1,1,m_2-1}\cup C_{m_3+1},P_{m_3}\cup C_{m_2+1}\cup T_{1,1,m_3-1},\cdots,$$
$$P_{m_{n-1}}\cup T_{1,1,m_2-1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup C_{m_{n-1}+1},P_{m_{n-1}}\cup C_{m_2+1}\cup T_{1,1,m_3-1}\cup\cdots\cup C_{m_{n-1}+1},\cdots,$$
$$P_{m_{n-1}}\cup C_{m_2+1}\cup C_{m_3+1}\cup\cdots\cup T_{1,1,m_{n-1}-1}\}$$

它就是集合 Ω_2 中每一个含有圈分支的图中的一个圈与一个孤立点 K_1 相遇等价于一个 T-形分支后形成的集合，所以 Φ_2 中共有 $\binom{n-1}{2}$ 个图. 令 $\Theta_2=\{K_1\cup H:H\in\Omega_2\}\cup\Phi_2$，则 $|\Theta_2|=\binom{n}{2}$. 另外，由等价桥(5)，集合 Θ_2 中的图 $K_1\cup P_5\cup C_6\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$ 等价于图 $P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$ 和 $T_{1,1,1}\cup P_3\cup D_5\cup C_{12}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$.

若 $m+1=5\times 2^{n-1}$，$K_1\cup P_m$ 的等价图除集合 Θ_1 中的图外，还有集合 $\{K_1\cup H:H\in\Omega_3\}$ 中的图. 由等价桥(2)，$\{K_1\cup H:H\in\Omega_3\}$ 中的图 $2K_1\cup C_3\cup C_5\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$ 中除 C_3 外的任何两个圈与两个孤立点 $2K_1$ 相遇就会等价于两个 T-形分支. 令

$$\Delta_2=\{C_3\cup T_{1,1,3}\cup T_{1,1,8}\cup\cdots\cup C_{m_2+1},C_3\cup C_5\cdots\cup T_{1,1,m_3-1}\cup T_{1,1,m_2-1}\}$$

则 Δ_2 中共有 $\binom{n-1}{2}$ 个图.

若 $m+1=9\times 2^{n-1}$，$n\geqslant 2$，$K_1\cup P_m$ 的等价图除集合 Θ_1 中的图外，还包含图 $P_8\cup T_{1,1,1}\cup D_6\cup C_{18}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$. 由等价桥(9)，集合 Θ_1 中的图 $K_1\cup P_8\cup C_9\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$ 等价于图 $P_8\cup T_{1,1,1}\cup D_6\cup C_{18}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$.

若 $m+1=15\times 2^{n-1}$，$n\geqslant 2$，$K_1\cup P_m$ 的等价图除集合 Θ_1 中的图外，还包含图 $P_{14}\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup D_7\cup C_{30}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$. 由等价桥(11)，集合 Θ_1 中的图 $K_1\cup P_{14}\cup C_{15}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$ 等价于图 $P_{14}\cup T_{1,1,1}\cup C_5\cup D_7\cup C_{30}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}$.

于是，我们得到下面的结果：

定理 2　(i) 若 $m+1=2^{n+1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$[K_1\cup P_m]=\begin{cases}\{K_1\cup P_3\} & n=1\\ \Theta_1\cup\{D_4\cup H:H\in\Delta_1\} & n\geqslant 2\end{cases}$$

(ii) 若 $m+1=3\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$[K_1\cup P_m]=\begin{cases}\{K_1\cup P_2\} & n=1\\ \Theta_2\cup\{P_2\cup T_{1,1,1}\cup C_6\cup\cdots\cup C_{m_2+1},T_{1,1,1}\cup P_3\cup D_5\cup C_{12}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}\} & n\geqslant 2\end{cases}$$

(iii) 若 $m+1=5\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$[K_1\cup P_m]=\Theta_1\cup\{K_1\cup H:H\in\Omega_3\}\cup\Delta_2$$

(iv) 若 $m+1=9\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$[K_1\cup P_m]=\begin{cases}\{K_1\cup P_8\} & n=1\\ \Theta_1\cup\{P_8\cup T_{1,1,1}\cup D_6\cup C_{18}\cup\cdots\cup C_{m_2+1}\} & n\geqslant 2\end{cases}$$

(v) 若 $m+1=15\times 2^{n-1}$ 对某个正整数 n 成立，则

$$[K_1 \cup P_m]=\begin{cases}\{K_1 \cup P_{14}\} & n=1 \\ \Theta_1 \cup \{P_{14} \cup T_{1,1,1} \cup C_5 \cup D_7 \cup C_{30} \cup \cdots \cup C_{m_2+1}\} & n \geqslant 2\end{cases}$$

(vi) 若 $m+1=2^{n-1}(2k+1)$ 对某对正整数 $n,k(\neq 1,2,4,7)$ 成立，则$[K_1 \cup P_m]=\Theta_1$.

证　由文献[16]中的等价变换规律，这些图均等价于 $K_1 \cup P_m$，且图的个数也等于 $\delta(K_1 \cup P_m)$.

推论 1　对于定理 2 中 m 的不同类型，$[\overline{K_1 \cup P_m}]_P$ 就是定理 2 所述的每个集合中图的补图构成的集合.

参考文献：

[1] CHAO C Y，WHITEHEAD E G J. Chromatically Unique Graphs [J]. Discrete Mathematics，1979，27(2)：171-177.

[2] LIU R Y. A New Method to Find Chromatic Polynomial of Graph and Its Applications [J]. 科学通报(英文版)，1987，32(21)：1508-1509.

[3] DONG F M，TEO K L，LITTLE C H C，et al. Chromaticity of Some Families of Dense Graphs [J]. Discrete Mathematics，2002，258(1/2/3)：303-321.

[4] LIU R Y. Adjoint Polynomials and Chromatically Unique Graphs [J]. Discrete Mathematics，1997，172(1/2/3)：85-92.

[5] DU Q Y. Chromaticity of the Complements of Paths and Cycles [J]. Discrete Mathematics，1996，162(1/2/3)：109-125.

[6] WAGNER D G. The Partition Polynomial of a Finite Set System [J]. Journal of Combinatorial Theory(Series A)，1991，56(1)：138-159.

[7] 龚和林，舒情，李永明. 一类具有整根色多项式的图的色等价类 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2012，36(6)：21-25.

[8] DONG F M，KOH K M，TEO K T. Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs [M]. Singapore：World Scientific，2005.

[9] 徐利民，杨志林. 完全 3 部图 $K(n-k，n-3，n)$色唯一性的证明 [J]. 中国科学技术大学学报，2019，49(5)：377-381.

[10] 魏岭. 一类图的色唯一性 [J]. 计算机工程与应用，2013，49(22)：52-54.

[11] 詹福琴，乔友付. 一类稠密图色唯一的充要条件 [J]. 中北大学学报(自然科学版)，2013，34(1)：10-16.

[12] 李雪峰. 某一类色唯一的 K_4-同胚图 [J]. 数学的实践与认识，2011，41(13)：179-184.

[13] 毛建树. $\overline{T(1，1，t，3，1)}$的色唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(3)：15-18.

[14] 龚和林，舒情. 3 类具有整根色多项式的色等价类 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2011，33(2)：113-117.

[15] ZHAO H X，LI X L，ZHANG S G，et al. On the Minimum Real Roots of the σ-Polynomials and Chromatic Uniqueness of Graphs [J]. Discrete Mathematics，2004，281(1/2/3)：277-294.

[16] MA H C，REN H Z. The Chromatic Equivalence Classes of the Complements of Graphs with the Minimum Real Roots of Their Adjoint Polynomials Greater Than－4 [J]. Discrete Mathematics，2008，308(10)：1830-1836.

[17] YE C F，LI N Z. Graphs with Chromatic Polynomial $\sum_{l \leqslant m_0}\binom{l}{m_0-l}$ [J]. Discrete Mathematics，2002，259(1)：369-381.

[18] 冶成福. 与 $K_1 \cup P_{m_0}$ 的补图有相同色划分的图 [J]. 数学理论与应用，2002，22(2)：12-19.

责任编辑　廖坤