第 44 卷第 4 期 西南大学学报(自然科学版) 2022 年 4 月
Vol. 44 No. 4 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Apr. 2022

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.04.014

两类正则图的邻点全和可区别全染色

常景智[1], 杨超[1], 程银万[1], 王芹[1], 姚兵[2]

1. 上海工程技术大学 数理与统计学院 智能计算与应用统计研究中心,上海 201620;
2. 西北师范大学 数学与统计学院,兰州 730070

摘要:设 $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow [1, k]$ 是图 G 的一个非正常 k-全染色. 令 $\varphi(x) = f(x) + \sum_{e \ni x} f(e) + \sum_{y \in N(x)} f(y)$,其中 $N(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$. 对任意的边 $uv \in E(G)$,如果有 $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ 成立,则称 f 是图 G 的一个邻点全和可区别(简记 NFSD)k-全染色. 图 G 的邻点全和可区别全染色中最小的 k 值称为 G 的邻点全和可区别全色数,记为 $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(G)$. 通过构造染色函数法,确定了广义 Petersen 图和循环图的邻点全和可区别全色数.

关 键 词:非正常全染色;邻点全和可区别全染色;邻点全和可区别全色数;正则图

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文 章 编 号:1673-9868(2022)04-0117-05

Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Two Types of Regular Graphs

CHANG Jingzhi[1], YANG Chao[1], CHENG Yinwan[1], WANG Qin[1], YAO Bing[2]

1. *School of Mathematics, Physics and Statistics, Center of Intelligent Computing and Applied Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China;*
2. *School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*

Abstract: Let $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow [1, k]$ be a non-proper total k-coloring of G. Define a weight function about total coloring as $\varphi(x) = f(x) + \sum_{e \ni x} f(e) + \sum_{y \in N(x)} f(y)$, where $N(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$. If $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ for any edge $uv \in E(G)$, then f is called a neighbor full sum distinguishing total k-coloring of G. The smallest value k in neighbor full sum distinguishing total coloring of graph G is called the neighbor full sum distinguishing total chromatic number of G and denoted by $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(G)$. The neighbor full sum distinguishing total chromatic number of generalized Petersen graphs and Circular graphs are determined by constructing coloring function method.

收稿日期:2021-04-13
基金项目:国家自然科学基金项目(61672001,61662066,62072296).
作者简介:常景智,硕士研究生,主要从事图论及其应用的研究.
通信作者:杨超,讲师,博士.

Key words: non-proper total coloring; neighbor full sum distinguishing total coloring; neighbor full sum distinguishing total chromatic number; regular graphs

图的可区别染色问题是图论中的经典问题之一，随着可区别染色问题被广泛应用于计算机科学、生物学以及网络安全等领域，这一问题被越来越多的国内外学者所研究．近年来，关于把点和边所染颜色相加的可区别染色问题引起了人们的极大关注．文献[1]介绍和研究了图的邻和可区别边染色，并提出下述著名的1-2-3猜想：

猜想1[1](1-2-3猜想)　设 G 为一个阶数至少为3的简单连通图，则 $\mathrm{gndi}_{\Sigma}(G) \leqslant 3$.

文献[2]证明了阶数至少为3的简单连通图的邻和可区别边色数不超过5．关于邻和可区别边染色的相关研究见文献[3-6]．文献[7]提出了图的邻和可区别全染色的概念，并给出了此定义下的1-2猜想：

猜想2[7](1-2猜想)　设 G 为一个简单连通图，则 $\mathrm{tgndi}_{\Sigma}(G) \leqslant 2$.

文献[8]得到了任意图的邻和可区别全色数不超过3．文献[9]考虑把任意点的关联边与其邻点所染颜色相加，定义了图的邻点被扩展和可区别全染色，且得到了一些特殊图的邻点被拓展和可区别全色数．文献[10]研究了仙人掌图的邻点被拓展和可区别全染色．不仅如此，文献[9]又在邻点被扩展和可区别全染色的基础上考虑加上点本身的颜色，介绍了下述关于图的一类新染色——邻点全和可区别全染色：

定义1[9]　设 $f: V(G) \cup E(G) \longrightarrow [1, k]$ 是图 G 的一个非正常 k-全染色．令

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{e \ni x} f(e)+\sum_{y \in N(x)} f(y)$$

其中

$$N(x)=\{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$$

对任意的边 $uv \in E(G)$，如果有 $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ 成立，则称 f 是图 G 的一个邻点全和可区别(简记NFSD)k-全染色．图 G 的邻点全和可区别全染色中最小的 k 值称为 G 的邻点全和可区别全色数，记为 $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(G)$.

本文研究了广义Petersen图和循环图的邻点全和可区别全染色问题，确定了它们的邻点全和可区别全色数．文中涉及的染色均为非正常的，不失一般性，约定下文证明过程中凡是未被染色的点和边均染颜色1.

1　广义Petersen图

定义2　广义Petersen图 $P(n, k)\left(n \geqslant 3, 1 \leqslant k<\frac{2}{n}\right)$ 是由顶点集 $V=\{a_i, b_i \mid i \in[0, n-1]\}$ 和边集 $E=\{a_i a_{i+1}, a_i b_i, b_i b_{i+k} \mid i \in[0, n-1]\}$ 构成的一类三正则图．

$P(n, k)$ 具有以下性质：(a) $g=\gcd(n, k)$；(b) $p=\frac{g}{n}$．其中 g 表示外圈 $C=a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_0$ 内部所包含的不交圈的个数，且每个不交圈的长度均为 p，外圈 C 内部所有的不交圈统称为内圈．

定理1　当 n 为偶数，k 为奇数时，$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(P(n, k))=2$；其他情形时，$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(P(n, k)) \leqslant 3$.

由定义2知 $P(n, k)$ 是一类三正则图，则 $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(P(n, k)) \geqslant 2$．定理1分以下3个引理证明：

引理1　当 n 为偶数，k 为奇数时，$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(P(n, k))=2$.

证　定义 $P(n, k)$ 的一个2-全染色 f：$f(a_i a_{i+1})=f(a_i b_i)=f(a_i b_{i+k})=1$，$f(a_i)=2$($i$ 为奇数)，$f(b_i)=2$(i 为偶数)．由染色 f 可得 $P(n, k)$ 中各点的权重为：$\varphi(a_i)=10$(i 为奇数)，$\varphi(a_i)=8$(i 为偶数)，$\varphi(b_i)=8$(i 为奇数)，$\varphi(b_i)=10$(i 为偶数)．因 b_i 总与 b_{i+k} 相连，所以内圈中的相邻点下标的奇偶性不同，则有 $\varphi(b_i)=10$(i 为偶数) $\neq \varphi(b_i)=8$(i 为奇数)，证毕．

引理2　当 n 为偶数，k 为偶数时，$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(P(n, k)) \leqslant 3$.

证　根据不交圈的长度 p，分以下3种情形讨论：

情形1　当 $p \equiv 0 \pmod 3$ 时，令 $e_i^m=b_i b_{i+k}$，$i \in[0, p-1]$，$m \in[1, g]$．设 f_1 为 $P(n, k)$ 的一个3-全染色，f_1 定义如下：$f_1(e_i^m)=1(i \equiv 0 \pmod 3)$，$f_1(e_i^m)=2(i \equiv 1 \pmod 3)$，$f_1(e_i^m)=3(i \equiv 2 \pmod 3)$，$f_1(a_i b_i)=2$($i$ 为奇数)．可得外圈点的权重 $\varphi(a_i)=7$(i 为偶数)，$\varphi(a_i)=8$(i

为奇数）．便于叙述，把内圈点 b_i 按内圈个数 g 依次重新标号为 v_I^m，$I\in[1,p]$，$m\in[1,g]$．例如 $P(20,4)$ 包含 4 个不交圈，每个圈长度为 5，那么原来的点 $b_0,b_4,b_8,b_{12},b_{16}$ 转变为点 $v_1^1,v_2^1,v_3^1,v_4^1,v_5^1$，点 $b_1,b_5,b_9,b_{13},b_{17}$ 转变为点 $v_1^2,v_2^2,v_3^2,v_4^2,v_5^2$ 等，依次类推．当 m 为奇数时，$\varphi(v_I^m)=8(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=9(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=10(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$；当 m 为偶数时，$\varphi(v_I^m)=9(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=10(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=11(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$．

情形 2　当 $p\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，设 f_2 为 $P(n,k)$ 的一个 3-全染色，f_2 定义如下：$f_2(e_i^m)=1(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_2(e_i^m)=2(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_2(e_i^m)=3(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_2(a_ib_i)=2(i$ 为奇数$)$，$f_2(a_i)=3$，$i\in[0,g-1]$．先不考虑染色为 3 的外圈点及其在外圈中的相邻点，则有 $\varphi(a_i)=7(i$ 为偶数$)$，$\varphi(a_i)=8(i$ 为奇数$)$，$\varphi(a_{n-1})=10$，$\varphi(a_g)=9$．对于颜色为 3 的外圈点有 $\varphi(a_i)=13(i$ 为偶数且 $i\in[1,g-2])$，$\varphi(a_i)=14(i$ 为奇数且 $i\in[1,g-2])$，$\varphi(a_0)=11$，$\varphi(a_{g-1})=12$．对于内圈点有：当 m 为奇数时，$\varphi(v_I^m)=8(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=9(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=10(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_1^m)=10$；当 m 为偶数时，$\varphi(v_I^m)=9(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=10(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=11(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_1^m)=11$．

情形 3　当 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，定义 $P(n,k)$ 的一个 3-全染色 f_3 如下：$f_3(e_i^m)=1(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_3(e_i^m)=2(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_3(e_i^m)=3(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_3(a_ib_i)=2(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$f_3(e_{p-1}^m)=3$．则 $\varphi(a_i)=7(i$ 为偶数$)$，$\varphi(a_i)=8(i$ 为奇数$)$．对于内圈点有以下情形：当 m 为奇数时，$\varphi(v_I^m)=8(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=9(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=10(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_p^m)=11$；当 m 为偶数时，$\varphi(v_I^m)=9(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=10(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=11(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_p^m)=12$．

引理 3　当 n 为奇数时，$\mathrm{fgndi}_\Sigma(P(n,k))\leqslant 3$．

证　令 $e_i^0=a_ia_{i+1}$，$i\in[0,n-1]$．设 f 为 $P(n,k)$ 的一个 3-全染色，具体染色情况如下：

情况 1　对外圈染色：(ⅰ) 当 $n\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，令 $f(a_i)=1$，$f(b_i)=3$，$f(e_i^0)=1(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(e_i^0)=2(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(e_i^0)=3(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$；(ⅱ) 当 $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，令 $f(a_i)=1$，$f(b_i)=3$，$f(e_i^0)=1(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 $i<n-5)$，$f(e_i^0)=2(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 $i<n-5)$，$f(e_i^0)=3(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 且 $i<n-5)$，$f(e_{n-1}^0)=f(e_{n-2}^0)=2$，$f(e_{n-3}^0)=f(e_{n-4}^0)=3$，$f(e_{n-5}^0)=1$．

情况 2　对内圈染色：令 $f(a_i)=1$，$f(b_i)=3$．(ⅰ) 当 $p\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，令 $f(e_i^0)=1(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(e_i^0)=2(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(e_i^0)=3(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$；(ⅱ) 当 $p\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ 时，令 $f(e_i^0)=1(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(e_i^0)=2(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(e_i^0)=3(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$f(a_ib_i)=3(i\in[0,p-1])$．

首先，考虑内圈为情况 2(ⅱ) 的情况，则外圈点的权重范围为[10，13]，而内圈点的权重范围为[14，16]，所以内外圈的相邻点权重不同．由染色 f 得外圈点权重为：$\varphi(a_i)=10(i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(a_i)=11(i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(a_i)=12(i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$．特殊地，对于情况 1(ⅱ) 有 $\varphi(a_{n-3})=13$，$\varphi(a_{n-2})=12$，所以外圈相邻点权重不同．其次，考虑内圈点的权重，同样不考虑情况 2(ⅱ)，则有 $\varphi(v_I^m)=14(I\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=15(I\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3))$，$\varphi(v_I^m)=16(I\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3))$，所以内圈相邻点权重不同．下面对情况 2(ⅱ) 进行分析：当内圈出现情况 2(ⅱ) 时，令 $f(a_ib_i)=3$，$i\in[0,p-1]$，此时与这 p 条边相连的内圈点比外圈点权重多 2，而对于内圈相邻点来说，其权重差是 1，因此染色后依旧是可区别的．最后，外圈点在染色 f 下的权重分别按照如下规律：从 a_0 到 a_{p-1}，依次为 10,11,12,10,…,11,12，且 $\varphi(a_{n-1})=11$，则染色后各自权重变为 12,13,14,12,…,13,14，且 $\varphi(a_{n-1})=11$，所以相邻点权重是可区别的．特殊地，$\varphi(a_{p-1})$ 和 $\varphi(a_p)$ 未讨论，因为 n 为奇数，所以 p,g 也为奇数，只要染色前 $\varphi(a_p)$ 比 $\varphi(a_{p-1})$ 恰好大 2 不成立，则染色后 $\varphi(a_{p-1})+2\neq\varphi(a_p)$ 恒成立，根据前面讨论的权重规律，引理 3 得证．

2　循环图

定义 3　循环图 $C(n,l)\left(n\geqslant 3,1\leqslant l\leqslant \dfrac{2}{n}\right)$ 是由顶点集 $V=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 和边集 $E=\{a_ia_{i+1},$

$a_i a_{i+l} \mid i \in [1, n]\}$ 构成的一类正则图.

$C(n, l)$ 具有以下性质:(a) $g = \gcd(n, l)$;(b) $p = \frac{g}{n}$,其中 g 表示外圈 $C = a_1 a_2 \cdots a_n a_1$ 内部所包含的不交圈的个数,且每个不交圈的长度均为 p;(c) 当 $l = \frac{n}{2}$ 时,$C(n, l)$ 为三正则图,其他情形时为四正则图.

定理 2 当 n 为偶数,l 为奇数或 $n=2l$ 时,$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l))=2$;当 n 为奇数,l 为偶数或 $l=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 时,$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l)) \leqslant 3$.

由定义 3 知 $C(n, l)$ 是正则图,则 $\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l)) \geqslant 2$. 定理 2 分以下 4 个引理证明:

引理 4 当 n 为偶数,l 为奇数时,$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l))=2$.

证 定义 $C(n, l)$ 的一个 2-全染色 f 如下:$f(a_i a_{i+1})=f(a_i a_{i+l})=1$,$f(a_i)=2(i \equiv 1(\bmod 2))$. 由染色 f 可得 $C(n, l)$ 中各点的权重为:$\varphi(a_i)=10(i \equiv 0(\bmod 2))$,$\varphi(a_i)=13(i \equiv 1(\bmod 2))$,证毕.

引理 5 当 n 为奇数,l 为偶数时,$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l)) \leqslant 3$.

证 定义 $e_i^m = a_i a_{i+l}$,$i \in [1, p-1]$,$l \in [1, g]$. 便于叙述,把顶点 a_i 按内圈个数 g 重新依次标号为 v_I^m,$I \in [1, p]$,$m \in [1, g]$. 如 $C(20, 4)$ 包含 4 个不交圈,每个圈长度为 5,那么原来的点 $a_1, a_5, a_9, a_{13}, a_{17}$ 转变为点 $v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1$,点 $a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, a_{18}$ 转变为点 $v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, v_5^2$ 等等,依次类推. $C(n, l)$ 的一个 3-全染色 f 如下:$f(a_i) = 3(i \equiv 0(\bmod 2))$.

情形 1 当 $p \neq 2(\bmod 3)$ 时,$f(e_i^m)=1(i \equiv 1(\bmod 3))$,$f(e_i^m)=2(i \equiv 2(\bmod 3))$,$f(e_i^m)=3(i \equiv 0(\bmod 3))$. 则当 m 为奇数时,$\varphi(v_i^m)=14(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(v_i^m)=16(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(v_i^m)=15(i \equiv 0(\bmod 3))$;当 m 为偶数时,$\varphi(v_i^m)=16(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(v_i^m)=18(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(v_i^m)=17(i \equiv 0(\bmod 3))$. 若存在 $\varphi(a_i) = \varphi(a_{i-1}) = 16$,将边 $a_i a_{i+1}$ 重染为 3,则 a_i 与 a_{i+1} 的权重分别在原来基础上增加 2,而 a_{i-1} 的权重并未改变,所以 a_{i-1} 与 a_i 的权重不同. 特殊地,当 $p \equiv 1(\bmod 3)$ 且 $i = p$ 时有 $\varphi(v_p^m) = 13$.

情形 2 当 $p \equiv 2(\bmod 3)$ 时,若 $i \in [1, p-2]$,则染色规则与情形 1 相同,且有 $f(e_{p-1}^m) = 2$,$f(e_p^m) = 3$. 由此可得,当 $i \in [1, p-3]$ 时各点的权重同情形 1;当 $i \in [p-2, p]$ 时,若 m 为奇数,则 $\varphi(v_p^m)=15$,$\varphi(v_{p-1}^m)=16$,$\varphi(v_{p-2}^m)=17$,若 m 为偶数,则 $\varphi(v_p^m)=17$,$\varphi(v_{p-1}^m)=18$,$\varphi(v_{p-2}^m)=19$. 若存在 $\varphi(a_i) = \varphi(a_{i-1})$,则此时调色方案同情形 1.

引理 6 当 n 为奇数,$l=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 时,$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l)) \leqslant 3$.

证 令 $e_i' = a_i a_{i+l}$,$i \in [1, p-1]$. 定义 $C\left(n, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ 的一个 3-全染色 f 如下:

情形 1 当 $p \equiv 0(\bmod 3)$ 时,令 $f(e_i') = 1(i \equiv 1(\bmod 3))$,$f(e_i') = 2(i \equiv 2(\bmod 3))$,$f(e_i') = 3(i \equiv 0(\bmod 3))$,则 $\varphi(a_i) = 11(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(a_i) = 10(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(a_i) = 12(i \equiv 0(\bmod 3))$.

情形 2 当 $p \equiv 1(\bmod 3)$ 时,染色规则同情形 1,则 $\varphi(a_1) = 9$. 当 $1 < i \leqslant \frac{n+1}{2}$ 时,$\varphi(a_i) = 10(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(a_i) = 12(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(a_i) = 11(i \equiv 0(\bmod 3))$;当 $\frac{n+3}{2} \leqslant i \leqslant n$ 时,$\varphi(a_i) = 12(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(a_i) = 11(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(a_i) = 10(i \equiv 0(\bmod 3))$.

情形 3 当 $p \equiv 2(\bmod 3)$ 时,$f(e_{p-1}') = 2$,$f(e_p') = f(a_1 a_2) = 3$. 当 $1 \leqslant i \leqslant p-2$ 时,$f(e_i') = 3(i \equiv 1(\bmod 3))$,$f(e_i') = 1(i \equiv 2(\bmod 3))$,$f(e_i') = 2(i \equiv 0(\bmod 3))$,则 $\varphi(a_1) = 15$,$\varphi(a_2) = 13$;当 $3 \leqslant i \leqslant \frac{n+1}{2}$ 时,$\varphi(a_i)=10(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(a_i)=12(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(a_i)=11(i \equiv 0(\bmod 3))$,$\varphi\left(a_{\frac{n+3}{2}}\right)=12$;当 $\frac{n+5}{2} \leqslant i \leqslant n$ 时,$\varphi(a_i)=11(i \equiv 1(\bmod 3))$,$\varphi(a_i)=10(i \equiv 2(\bmod 3))$,$\varphi(a_i)=12(i \equiv 0(\bmod 3))$.

引理 7 当 $n=2l$ 时,$\mathrm{fgndi}_{\Sigma}(C(n, l))=2$.

证 令 $e_i' = a_i a_{i+l}$,$i \in [1, l]$. 设 f 为 $C\left(n, \frac{n}{2}\right)$ 的一个 2-全染色,f 定义如下:

情形 1　当 $l>5$ 时，若 l 为奇数，令 $f(a_{1+l})=f(e_i')=2(i=1,3,\cdots,l-4)$，$f(a_{1+l}a_{2+l})=f(a_{1+l}a_l)=f(a_ia_{i+1})=2(i=3,5,\cdots,l-4)$，则 $\varphi(a_2)=\varphi(a_n)=\varphi(a_{l-2})=7$，$\varphi(a_l)=\varphi(a_{l+2})=9$，

$$\varphi(a_i)=\begin{cases}7 & l+4\leqslant i\leqslant n-3,\ i\equiv 1(\bmod 2)\\ 8 & 4\leqslant i\leqslant n-2,\ i\equiv 0(\bmod 2),\ i\neq l+1\\ 9 & i=1,3,\cdots,l-4\end{cases}$$

若 l 为偶数，令 $f(a_{1+l})=f(e_i')=2(i=1,4,6,8,\cdots,l-2)$，$f(a_ia_{i+1})=2(i=3,5,\cdots,l-1$ 或 $i=4+l,6+l,\cdots,2l-2)$，则 $\varphi(a_2)=\varphi(a_n)=\varphi(a_{l+3})=7$，$\varphi(a_1)=9$，$\varphi(a_3)=8$，$\varphi(a_{1+l})=11$，

$$\varphi(a_i)=\begin{cases}8 & l+5\leqslant i\leqslant n-1,\ i\equiv 1(\bmod 2)\\ 9 & l+4\leqslant i\leqslant n-2,\ i\equiv 0(\bmod 2)\text{ 或 } i=5,7,\cdots,l-1\\ 10 & i=4,6,\cdots,l\end{cases}$$

情形 2　当 $l=3$ 时，令 $f(a_1a_4)=f(a_3a_4)=f(a_4a_5)=f(a_4)=2$，得 $\varphi(a_1)=\varphi(a_3)=\varphi(a_5)=9$，$\varphi(a_2)=\varphi(a_6)=7$，$\varphi(a_4)=11$.

情形 3　当 $l=4$ 时，令 $f(a_1a_5)=f(a_3a_7)=f(a_3a_4)=f(a_4a_5)=f(a_5a_6)=f(a_5)=2$，得 $\varphi(a_1)=\varphi(a_3)=\varphi(a_6)=9$，$\varphi(a_2)=\varphi(a_8)=7$，$\varphi(a_4)=10$，$\varphi(a_5)=11$，$\varphi(a_7)=8$.

情形 4　当 $l=5$ 时，令 $f(a_1a_6)=f(a_3a_8)=f(a_4a_9)=f(a_2a_3)=f(a_5a_6)=f(a_6a_7)=f(a_9a_{10})=f(a_4)=2$，得 $\varphi(a_i)=9(i=1,3,5,7,9)$，$\varphi(a_2)=\varphi(a_4)=\varphi(a_8)=\varphi(a_{10})=8$，$\varphi(a_6)=11$.

参考文献：

[1] KAROŃSKI M, ŁUCZAK T, THOMASON A. Edge Weights and Vertex Colours [J]. Journal of Combinatorial Theory(Series B), 2004, 91(1): 151-157.

[2] KALKOWSKI M, KAROŃSKI M, PFENDER F. Vertex-Coloring Edge-Weightings: Towards the 1-2-3-Conjecture [J]. Journal of Combinatorial Theory(Series B), 2010, 100(3): 347-349.

[3] ADDARIO-BERRY L, DALAL K, MCDIARMID C, et al. Vertex-Colouring Edge-Weightings [J]. Combinatorica, 2007, 27(1): 1-12.

[4] ADDARIO-BERRY L, DALAL K, REED B A. Degree Constrained Subgraphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2008, 156(7): 1168-1174.

[5] WANG T, YU Q L. On Vertex-Coloring 13-Edge-Weighting [J]. Frontiers of Mathematics in China, 2008, 3(4): 581-587.

[6] PRZYBYŁO J. The 1-2-3 Conjecture Almost Holds for Regular Graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2021, 147: 183-200.

[7] PRZYBYŁO J, WOŹNIAK M. On a 1,2 Conjecture [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2010, 12(1): 101-108.

[8] KALKOWSKI M. A Note on the 1,2-Conjecture [D]. Poznan: Adam Mickiewicz University, 2010.

[9] FLANDRIN E, LI H, MARCZYK A. et al. A Note on Neighbor Expanded Sum Distinguishing Index [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37(1): 29-37.

[10] 张辉，李泽鹏，陈祥恩. 仙人掌图的邻点被扩展和可区别全染色 [J]. 高校应用数学学报，2019，34(3)：373-378.

责任编辑　廖坤