第 44 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2022 年 4 月
Vol. 44　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2022

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.04.015

基于 Dunkl 集上分数次极大算子及其交换子在广义 Orlicz-Morrey 空间上的估计

芮俪，　逯光辉

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：本文首先得到了与 Dunkl 集相关的广义 Orlicz-Morrey 空间的定义；其次，利用 Dunkl 集的性质以及调和分析方法，证明了带有 Dunkl 集的分数次极大算子 $M_{\alpha,k}$ 及其与 $\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$ 函数生成的交换子 $M_{\alpha,k,b}$ 在带有 Dunkl 集的广义 Orlicz-Morrey 空间上的有界性.

关 键 词：带 Dunkl 集的广义 Orlicz-Morrey 空间；带 Dunkl 集的分数次极大算子；交换子；$\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$ 空间

中图分类号：O174.2　　**文献标志码**：A　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文章编号：1673-9868(2022)04-0122-06

Estimation of Fractional Maximal Operator and Its Commutator on Generalized Orlicz-Morrey Spaces over Dunkl Setting

RUI Li，　LU Guanghui

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, the authors firstly establish the definition of generalized Orlicz-Morrey spaces related to Dunkl setting. Secondly, by using the real-variable methods of harmonic analysis and the properties of Dunkl setting, the authors proved that fractional maximal operator associated with Dunkl setting $M_{\alpha,k}$ and its commutator $M_{\alpha,k,b}$ which is generated by $\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$ function and $M_{\alpha,k}$ is bounded on generalized Orlicz-Morrey spaces with Dunkl setting.

Key words: generalized Orlicz-Morrey space with Dunkl setting; fractional maximal operator with Dunkl setting; commutator; space $\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$

众所周知，算子与函数空间相关问题的研究一直是现代调和分析的热点问题. 例如，文献[1]证明了带

收稿日期：2021-05-23
基金项目：国家自然科学基金项目(11561062)；甘肃省高等学校科研项目(2020A-010)；西北师范大学青年教师科研能力提升项目.
作者简介：芮俪，硕士研究生，主要从事调和分析的研究.
通信作者：逯光辉，副教授.

粗糙核的奇异积分 Toplitz- 型算子在加权 BMO 空间上的有界性. 更多研究可参见文献[2-5]. 文献[6]首次介绍了欧氏空间上的差微分算子，即 Dunkl 算子$\{D_{k,j}\}_{j=1}^{d}$. Dunkl 算子是一类与有限反射群相关的微分反射算子. 其不仅将黎曼对称空间中常见的偏导数与不变微分算子进行了推广，而且还推广了布朗运动模型，有关该类算子的更多研究和结果，可参见文献[7-14].

对任意 $v \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$，定义 σ_v 为 v 垂直于超平面 $H_v \subset \mathbb{R}^d$ 的反射

$$\sigma_v(x) = x - \left(\frac{2\langle x, v\rangle}{\| v \|^2}\right) \qquad v, x \in \mathbb{R}^d$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$为欧氏空间上的内积，且对任意 $x \in \mathbb{R}^d$，有 $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. 此外，设有限集 $D \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$，若对于任意 $v \in D$，恒有 $\sigma_v D = D$，则称 D 为根系统.

设由反射族$\{\sigma_v\}_{v \in D}$ 构成的有限群G 为根系统反射群. 对任意 $v \in \mathbb{R}$，$k_v \geqslant 0$，用 h_k 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的权函数，有

$$h_k(x) = \prod_{v \in D^+} |\langle x, v\rangle|^{k_v} \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

h_k 为G 不变函数，且是 γ_k 次齐次的，其中 $\gamma_k = \sum_{v \in D^+} k_v$，$D^+$ 为正极子系统. 基于 h_k 的前提下，文献[15]得到了与 Dunkl 集相关的极大算子在 Orlicz 空间上的有界性. 随后，文献[16]证明了基于 Dunkl 集上分数次极大算子在 Orlicz 空间上的有界性. 文献[5]得到了极大算子与奇异算子在广义 Orlicz-Morrey 空间上的有界性. 受以上结论的启发，本文得到了与 Dunkl 集相关的广义 Orlicz-Morrey 空间的定义，并证明了基于 Dunkl 集上分数次极大算子及其与$\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$生成的交换子在广义 Orlicz-Morrey 空间上的有界性. 设

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < r\}$$

是中心为 $x \in \mathbb{R}^d$ 且半径为 r 的球，在 Dunkl 集上的测度为

$$|B(x, r)|_k = \int_{B(0, r)} h_k^2(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{a_k}{d + 2\gamma_k}\right) r^{d+2\gamma_k}$$

其中

$$a_k = \left(\int_{S^{d-1}} h_k^2(x)\mathrm{d}\sigma(x)\right)^{-1}$$

S^{d-1} 是 $\mathbb{R}^d$ 上的单位球，$d\sigma$ 为标准化曲面测度.

定义 1[16]　设 $f \in L_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d)$，带有 Dunkl 集的有界平均振荡空间定义为

$$\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d) = \{f \in L_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d) : \| f \|_{*,k} < \infty\}$$

其中

$$\| f \|_{*,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d, r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|_k} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(x)| h_k^2(y)\mathrm{d}y$$

且 $f_{B(x,r)}$ 表示函数 f 在球 $B(x, r)$ 上的平均值.

设 $0 < \alpha < d + 2\gamma_k$ 及 $f \in L_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d)$，带 Dunkl 集的分数次极大算子定义为

$$M_{\alpha,k} f(x) = \sup_{r>0} (|B(x, r)|_k)^{-1+\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}} \int_{B(x, r)} |f(y)| h_k^2(y)\mathrm{d}y \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

给定 $b \in \mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$，与带 Dunkl 集的分数次极大算子相关的交换子 $M_{\alpha,k,b}$ 定义为

$$M_{\alpha,k,b} f(x) = \sup_{r>0} (|B(x, r)|_k)^{-1+\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| h_k^2(y)\mathrm{d}y \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

若存在连续凸函数 Φ：$[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$，满足

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t) = \infty \qquad \lim_{t \to 0^+} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$$

则称 Φ 为 Young 函数.

全文用 Y 表示满足 $0<\Phi(r)<\infty$ 的全体 Young 函数构成的集合. 根据凸性以及 $\Phi(0)=0$，容易验证 Young 函数都是增的.

定义 2[16] 设 $\Phi \in Y$，则带有 Dunkl 集的 Orlicz 空间 $L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)$ 定义为

$$L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)=\left\{f \in L_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d):\text{存在 } \lambda>0,\text{ 使得}\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\lambda\,|\,f(x)\,|) h_k^2(x) \mathrm{d} x<\infty\right\}$$

且

$$\|f\|_{L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)}=\inf\left\{\lambda>0: \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\left(\frac{|\,f(x)\,|}{\lambda}\right) h_k^2(x) \mathrm{d} x \leqslant 1\right\}$$

带有 Dunkl 集的弱 Orlicz 空间 $WL^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)$ 的定义为

$$WL^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)=\left\{f \in L_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d): \|f\|_{WL^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)}<\infty\right\}$$

且

$$\|f\|_{WL^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)}=\inf\left\{\lambda>0: \sup_{t>0} \Phi(t) m\left(t, \frac{f}{\lambda}\right)_k \leqslant 1\right\}$$

其中

$$m\left(\frac{f}{\lambda}, t\right)_k=\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d: \frac{|\,f(x)\,|}{\lambda}>t\right\}\right|_k$$

接下来，我们回顾一些逆函数的有关概念[12]. 对于一个函数 $\Phi \in Y$，且 $0 \leqslant t \leqslant \infty$，设

$$\Phi^{-1}(t)=\inf\{r \geqslant 0: \Phi(r)>t\}$$

若 $\Phi \in Y$，则称 Φ^{-1} 为 Φ 的逆函数. 很明显，对于任意的 $r \geqslant 0$，有 $r \leqslant \Phi^{-1}(r) \widetilde{\Phi}^{-1}(r) \leqslant 2r$，其中 $\widetilde{\Phi}(r)$ 定义为

$$\widetilde{\Phi}(r)=\begin{cases}\sup\{r t-\Phi(t): t \in[0, \infty)\} & r \in[0, \infty) \\ \infty & r=\infty\end{cases}$$

设 $\Phi \in Y$，若存在常数 $C>1$，使得对任意的 $r>0$，有 $\Phi(2r) \leqslant C \Phi(r)$，则称 Φ 满足 Δ_2 条件，即 $\Phi \in \Delta_2$. 另一方面，若 $\Phi(r) \leqslant \dfrac{1}{2\kappa} \Phi(\kappa r)$，则称 Φ 满足 ∇_2 条件，即 $\Phi \in \nabla_2$.

类似地，我们给出如下带有 Dunkl 集的广义 Orlicz-Morrey 空间的定义：

定义 3 设 $\varphi(x, r)>0$ 为 $\mathbb{R}^d \times(0, \infty)$ 上的可测函数，$\Phi \in Y$，带有 Dunkl 集的广义 Orlicz-Morrey 空间定义为

$$M^{\Phi,\varphi,k}(\mathbb{R}^d)=\left\{f \in L_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d): \|f\|_{M^{\Phi,\varphi,k}}<\infty\right\}$$

其中

$$\|f\|_{M^{\Phi,\varphi,k}}=\sup_{x \in \mathbb{R}^d,\, t>0} \varphi(x, r)^{-1} \Phi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x, r))}$$

相应地，带有 Dunkl 集的弱广义 Orlicz-Morrey 空间定义为

$$WM^{\Phi,\varphi,k}(\mathbb{R}^d)=\left\{f \in WL_{\mathrm{loc}}^{1,k}(\mathbb{R}^d): \|f\|_{WM^{\Phi,\varphi,k}(\mathbb{R}^d)}<\infty\right\}$$

其中

$$\|f\|_{WM^{\Phi,\varphi,k}}=\sup_{x \in \mathbb{R}^d,\, t>0} \varphi(x, r)^{-1} \Phi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{WL^{\Phi,k}(B(x, r))}$$

全文中，C 表示与主要参数无关的常数，其值在不同的地方可能不尽相同. 对于 $\mathbb{R}^d$ 上的可测子集 E，χ_E 表示其上的特征函数.

引理 1[15] 若 f, g 为 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数，$\Phi \in Y$，$\widetilde{\Phi}(r)$ 为其补函数，则有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\,f(x) g(x)\,|\, h_k^2(x) \mathrm{d} x \leqslant 2\|f\|_{L^{\Phi,k}}\|g\|_{L^{\tilde{\Phi}(r),k}}$$

引理 2[16] 设 $\Phi \in Y$，则对任意球 $B \subset \mathbb{R}^d$，有

$$\|\chi_B\|_{L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)}=\|\chi_B\|_{WL^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)}=\frac{1}{\Phi^{-1}(|B|_k^{-1})}$$

引理 3[16]　设 $\Phi\in Y$，则对任意球 B，有

$$\int_B|f(x)|h_k^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 2|B|_k\Phi^{-1}(|B|_k^{-1})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B)}$$

引理 4[16]　(ⅰ) 若 $f\in\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$，则存在 $p\in[1,\infty)$，有

$$\|f\|_{*,k}\approx\sup_{x\in\mathbb{R}^d,r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|_k}\int_{B(x,r)}|f(y)-f_{B(x,r)}|^p h_k^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

且对任意 $0<2r<t$，有

$$|f_{B(x,r)}-f_{B(x,t)}|\leqslant C\|f\|_{*,k}\ln\frac{t}{r}$$

(ⅱ) 设 $f\in\mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$，则对 $\Phi\in Y\cap\Delta_2$，有

$$\|f\|_{*,k}\approx\sup_{x\in\mathbb{R}^d,r>0}\Phi^{-1}(|B(x,r)|_k^{-1})\|f-f_{B(x,r)}\|_{L^{\Phi,k}(B)}$$

引理 5[15]　设 $\Phi\in Y\cap\Delta_2$，球 $B\subset\mathbb{R}^d$，$f\in L^{\Phi,k}(B)$，则对于 $1<p<\infty$，有

$$\frac{1}{2|B|_k}\int_B|f(y)|h_k^2(y)\mathrm{d}y\leqslant\Phi^{-1}(|B|_k^{-1})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B)}\leqslant C\left(\frac{1}{|B|_k}\int_B|f(y)|^p h_k^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中 C 是不依赖于 f 和 b 的正常数.

定理 1　设 $0<\alpha<d+2\gamma_k$，$\Phi\in Y\cap\nabla_2$，且 $B=B(x,r)$，若函数对 (φ_1,φ_2) 和 (Φ,Ψ) 满足条件

$$r^{-\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}}\Phi^{-1}(r)\leqslant C\Psi^{-1}(r)\qquad r>0\tag{1}$$

$$\sup_{r<t<\infty}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(s^{-d-2\gamma_k})}\leqslant C\varphi_2(x,r)\tag{2}$$

则 $M_{\alpha,k}$ 从 $M^{\Phi,\varphi_1,k}(\mathbb{R}^d)$ 到 $M^{\Psi,\varphi_2,k}(\mathbb{R}^d)$ 有界.

证　对任意的 $f\in L_{\mathrm{loc}}^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)$，有 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{2B}$，$f_2=f\chi_{\mathbb{R}^d\setminus 2B}$，$r>0$，则有

$$\|M_{\alpha,k}f\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant\|M_{\alpha,k}f_1\|_{L^{\Psi,k}(B)}+\|M_{\alpha,k}f_2\|_{L^{\Psi,k}(B)}$$

由 $M_{\alpha,k}$ 从 $L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^{\Psi,k}(\mathbb{R}^d)$ 有界[13]，得到

$$\|M_{\alpha,k}f_1\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant C\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\varphi,k}(B(x,t))}$$

设任意 $z\in B$，注意到当 $B(z,t)\cap(\mathbb{R}^d\setminus 2B)=\varnothing$ 时，有 $t>r$. 事实上，若 $y\in B(z,t)\cap(\mathbb{R}^d\setminus 2B)$，有 $t>|y-z|\geqslant|x-y|-|x-z|>2r-r=r$. 另一方面，若 $y\in B(z,t)\cap(\mathbb{R}^d\setminus 2B)$，有 $|x-y|\leqslant|y-z|+|x-z|<t+r<2t$. 因此，$B(z,t)\cap(\mathbb{R}^d\setminus 2B)\subset B(x,2t)$. 则

$$M_{\alpha,k}f_2(z)\leqslant C\sup_{t>r}\frac{1}{|B(x,t)|_k^{1-\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}}}\int_{B(x,t)}|f(y)|h_k^2(y)\mathrm{d}y$$

由引理 2、引理 3 和(1) 式，有

$$\|M_{\alpha,k}f_2\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant C\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\varphi,k}(B(x,t))}$$

则有

$$\|M_{\alpha,k}f\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant C\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x,t))}$$

结合(2) 式可知

$$\|M_{\alpha,k}f\|_{M^{\Psi,\varphi_2,k}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\sup_{x\in\mathbb{R}^d,r>0}\varphi_2^{-1}(x,r)\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\varphi,k}(B(x,t))}\leqslant C\|f\|_{M^{\varphi,\varphi_1,k}(\mathbb{R}^d)}$$

定理 2 设 $0<\alpha<d+2\gamma_k$，$b\in \mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$，$\Phi\in Y\cap\gamma\cap\nabla_2$，$\Psi\in Y\cap\Delta_2$，若函数对$(\varphi_1,\varphi_2)$和$(\Phi,\Psi)$满足以下条件：

$$r^\alpha\Phi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})+\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Phi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})t^\alpha\leqslant C\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})\qquad r>0 \tag{3}$$

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(s^{-d-2\gamma_k})}\leqslant C\varphi_2(x,r) \tag{4}$$

则 $M_{\alpha,k,b}$ 从 $M^{\Phi,\varphi_1,k}(\mathbb{R}^d)$ 到 $M^{\Psi,\varphi_2,k}(\mathbb{R}^d)$ 上有界.

证 设 $0<\alpha<d+2\gamma_k$，$b\in \mathrm{BMO}_k(\mathbb{R}^d)$，$\Phi\in Y\cap\gamma\cap\nabla_2$，$\Psi\in Y\cap\Delta_2$，若 Φ,Ψ 满足(3)式，则对任意的球 $B=B(x,r)$ 和 $f\in L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)$，有 $f=f_1+f_2$，其中 f_1,f_2 同定理1证明中的分解相一致，则

$$\|M_{\alpha,k,b}f\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant\|M_{\alpha,k,b}f_1\|_{L^{\Psi,k}(B)}+\|M_{\alpha,k,b}f_2\|_{L^{\Psi,k}(B)}$$

由 $M_{\alpha,k,b}$ 从 $L^{\Phi,k}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^{\Psi,k}(\mathbb{R}^d)$ 有界[13]，得到

$$\|M_{\alpha,k,b}f_1\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant C\|b\|_{*,k}\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\varphi,k}(B(x,t))}$$

对任意的 $z\in B$，$B(z,t)\cap(\mathbb{R}^d\backslash 2B)=\varnothing$，且 $B(z,t)\cap(\mathbb{R}^d\backslash 2B)\subset B(x,2t)$. 因此

$$M_{\alpha,k,b}f_2(z)\leqslant C\sup_{t>r}\frac{1}{|B(x,t)|_k^{1-\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}}}\int_{B(x,t)}|b(z)-b(y)||f(y)|h_k^2(y)\mathrm{d}y$$

进一步，得到

$$\begin{aligned}\|M_{\alpha,k,b}f_2\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant{}& C\left\|\sup_{t>r}\frac{1}{|B(x,t)|_k^{1-\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}}}\int_{B(x,t)}|b(y)-b_{B(x,r)}||f(y)|h_k^2(y)\mathrm{d}y\right\|_{L^{\Psi,k}(B)}+\\&\left\|\sup_{t>r}\frac{1}{|B(x,t)|_k^{1-\frac{\alpha}{d+2\gamma_k}}}\int_{B(x,t)}|b(\cdot)-b_{B(x,r)}||f(y)|h_k^2(y)\mathrm{d}y\right\|_{L^{\Psi,k}(B)}=\\&J_1+J_2\end{aligned}$$

由引理2、引理1、引理3和引理4，有

$$J_1\leqslant C\|b\|_{*,k}\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x,t))}$$

对于 J_2，由引理4、(3)式和引理3，有

$$J_2\leqslant C\|b\|_{*,k}\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x,t))}$$

由 J_1,J_2 的估计可得

$$\|M_{\alpha,k,b}f_2\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant C\|b\|_{*,k}\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x,t))}$$

则可得到

$$\|M_{\alpha,k,b}f\|_{L^{\Psi,k}(B)}\leqslant C\|b\|_{*,k}\frac{1}{\Psi^{-1}(r^{-d-2\gamma_k})}\sup_{t>r}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x,t))}$$

再结合(4)式，不难得到

$$\begin{aligned}\|M_{\alpha,k,b}f\|_{M^{\Psi,\varphi_2,k}(\mathbb{R}^d)}\leqslant{}& C\|b\|_{*,k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d,\,r>0}\varphi_2^{-1}(x,r)\sup_{t>r}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-d-2\gamma_k})\|f\|_{L^{\Phi,k}(B(x,t))}\leqslant\\&C\|b\|_{*,k}\|f\|_{M^{\Phi,\varphi_1,k}(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

参考文献：

[1] 高亚瑞，陶双平. 粗糙核奇异积分的 Toeplitz-型算子的加权端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(12)：81-87.

[2] 王晓燕，赵凯. 与高阶 Schrödinger-型算子相关的变分算子在 Herz-型空间的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(12)：88-94.

[3] 陈雪，黄穗. 调和 Fock 空间 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(2)：26-30.

[4] LU G. Parameter Marcinkiewicz Integral and Its Commutator on Generalized Orlicz-Morrey Spaces [J]. Journal of the Korean Mathematical Society，2021，58(2)：383-400.

[5] DERINGOZ F，GULIYEV V S，SAMKO S. Boundedness of the Maximal and Singular Operators on Generalized Orlicz-Morrey Spaces [C] //Operator Theory，Operator Algebras and Applications，2014.

[6] DUNKL C F. Differential-Difference Operators Associated with Reflection Groups [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1989，311(1)：167-183.

[7] GULIYEV V S，MAMMADOV Y Y. On Fractional Maximal Function and Fractional Integrals Associated with the Dunkl Operator on the Real Line [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2009，353(1)：449-459.

[8] SOLTANI F. L^p-Fourier Multipliers for the Dunkl Operator on the Real Line [J]. Journal of Functional Analysis，2004，209(1)：16-35.

[9] ØRSTED B，SOMBERG P，SOUČEK V. The Howe Duality for the Dunkl Version of the Dirac Operator [J]. Advances in Applied Clifford Algebras，2009，19(2)：403-415.

[10] DELEAVAL L. A Note on the Behavior of the Dunkl Maximal Operator [J]. Advances in Pure and Applied Mathematics，2018，9(4)：237-246.

[11] BEN SAǏD S，ØRSTED B. The Wave Equation for Dunkl Operators [J]. Indagationes Mathematicae，2005，16(3/4)：351-391.

[12] REN G B. Almansi Decomposition for Dunkl Operators [J]. Science in China Series A：Mathematics，2005，48(1)：333-342.

[13] MASLOUHI M，YOUSSFI E H. Harmonic Functions Associated to Dunkl Operators [J]. Monatshefte Für Mathematik，2007，152(4)：337-345.

[14] KAMOUN L. Besov-Type Spaces for the Dunkl Operator on the Real Line [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2007，199(1)：56-67.

[15] GULIYEV V S，MAMMADOV Y Y，MUSLUMOVA F. Boundedness Characterization of Maximal Commutators on Orlicz Spaces in the Dunkl Setting [J]. Journal of Mathematical Study，2020，53(1)：45-65.

[16] GULIYEV V S，MAMMADOV Y Y，MUSLUMOVA F. Characterization of Fractional Maximal Operator and Its Commutators on Orlicz Spaces in the Dunkl Setting [J]. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications，2020，11(4)：1699-1717.

责任编辑　廖坤