DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.04.016

G-强跟踪性和利普希茨跟踪性的研究

冀占江[1,2,3]

1. 梧州学院 大数据与软件工程学院，广西 梧州 543002；
2. 梧州学院 广西高校图像处理与智能信息系统重点实验室，广西 梧州 543002；
3. 梧州学院 广西高校行业软件技术重点实验室，广西 梧州 543002

摘要：给出了 G-强跟踪性和利普希茨跟踪性的定义，分别在度量 G-空间和无限乘积空间中研究了它们的动力学性质，得到如下结果：在度量 G-空间中对任意的正整数 $k\geqslant 2$，f 具有 G-强跟踪性当且仅当 f^k 具有 G-强跟踪性；在无限乘积空间 $\overline{X}$ 中移位映射 σ 具有利普希茨跟踪性. 这些结论丰富了度量 G-空间和无限乘积空间中的相关理论.

关 键 词：度量 G-空间；移位映射；G-强跟踪性；利普希茨跟踪性

中图分类号：O189.11 **文献标志码**：A 开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673-9868(2022)04-0128-06

Research of G-Strong Shadowing Property and Lipschitz Shadowing Property

JI Zhanjiang[1,2,3]

1. *School of Data Science and Software Engineering, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China;*
2. *Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Information System, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China;*
3. *Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Professional Software Technology, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China*

Abstract: The definitions of G-strong shadowing property and Lipschitz shadowing property are given, and their dynamical properties are respectively studied in metric G-space and infinite product space. The results are as follows: For any positive integer $k\geqslant 2$, the map f has G-strong shadowing property if and only if the map f^k has G-strong shadowing property in metric G-space; The shift map σ has Lipschitz shadowing property in infinite product space $\overline{X}$. These results enrich the theory of metric G-space and infinite product space.

Key words: metric G-space; shift map; G-strong shadowing property; Lipschitz shadowing property

收稿日期：2021-06-09

基金项目：广西自然科学基金面上项目(2020JJA110021)；广西自然科学基金项目(2018JJB170034)；广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2021KY0679)；梧州学院校级重点项目(2020B007).

作者简介：冀占江，副教授，主要从事拓扑学动力系统的研究.

跟踪性是离散动力系统中十分重要的动力学性质，已经成为非线性科学的主要课题之一，在生物学、信息学、经济学等诸多领域都有着广泛的应用，近年来很多学者对其进行了研究，得到了很多有意义的研究成果[1-13]．文献[1]证明了：乘积映射具有极限跟踪性当且仅当每个分映射都具有极限跟踪性；文献[2]证明了：在强一致收敛条件下序列跟踪性可以被遗传到极限函数；文献[3]证明了：度量G-空间中G-跟踪性是拓扑共轭不变的．本文在度量G-空间和无限乘积空间$\overline{X}$中研究了G-强跟踪性和利普希茨跟踪性的动力学性质，得到以下结果：在度量G-空间中，对任意的正整数$k \geqslant 2$，f具有G-强跟踪性当且仅当f^k具有G-强跟踪性；在无限乘积空间$\overline{X}$中，移位映射具有利普希茨跟踪性．这些结果为它们在生物学、信息学和经济学等诸多领域的应用提供了理论依据和科学基础．

1　基本概念

定义 1[3]　设(X, d)是度量空间，G是拓扑群．若映射$\varphi: G \times X \longrightarrow X$满足：

(a) 对任意的$x \in X$，有$\varphi(e, x) = x$，其中e为G的单位元；

(b) 对任意的$x \in X$以及$g_1, g_2 \in G$，有$\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x)$．

则称(X, G, φ)是度量G-空间．为了书写方便，通常将$\varphi(g, x)$简写为gx．拓扑群的定义见文献[14]．

定义 2[15]　设(X, d)是度量G-空间．若对任意的$x, y \in X$和$g \in G$，有$d(x, y) = d(gx, gy)$，则称度量d对G不变．

定义 3[16]　设(X, d)是度量G-空间，$f: X \longrightarrow X$连续，$\delta > 0$，$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是X中的序列．若存在$t_i \in G$使得$\sum_{i=0}^{\infty} d(t_i f(x_i), x_{i+1}) < \delta$，则称$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是$f$的$(G, \delta)$-强伪轨．

定义 4[16]　设(X, d)是度量G-空间，$f: X \longrightarrow X$连续，$\varepsilon > 0$，$y \in X$，$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是X中的序列．若存在$t_i \in G$使得$\sum_{i=0}^{\infty} d(f^i(y), t_i x_i) < \varepsilon$，则称$y (G, \varepsilon)$-强跟踪$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$．

定义 5[16]　设(X, d)是度量G-空间，$f: X \longrightarrow X$连续．若对任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是X中f的(G, δ)-强伪轨时，存在$y \in X$使得$y (G, \varepsilon)$-强跟踪$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$，则称f具有G-强跟踪性．

定义 6[1]　设(X, d)是紧致度量空间，无限乘积空间$\overline{X} = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$，$X_i = X (i \geqslant 0)$．设

$$\overline{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in \overline{X} \qquad \overline{y} = (y_0, y_1, y_2, \cdots) \in \overline{X}$$

在$\overline{X}$上定义度量$\overline{d}$

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \max\left\{\frac{d(x_i, y_i)}{2^i}: i \geqslant 0\right\}$$

在$\overline{X}$上定义移位映射σ

$$\sigma(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

由文献[1]知$(\overline{X}, \overline{d})$是紧致度量空间，$\sigma: \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$是连续的．

定义 7[17]　设(X, d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$连续，$\delta > 0$，$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是X中的序列．若对任意的$i \geqslant 0$，有$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$，则称$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是$f$的$\delta$-伪轨．

定义 8[18]　设(X, d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$连续，$\varepsilon > 0$，$y \in X$，$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$是X中的序列．若对任意的$i \geqslant 0$，有$d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$，则称$y\ \varepsilon$-跟踪$\{x_i\}_{i \geqslant 0}$．

定义 9[18]　设(X, d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$连续．若存在常数$L > 0$与$\delta_0 > 0$，$\forall\, 0 < \delta < \delta_0$，使得对$f$的任意$\delta$-伪轨$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$，存在$x \in X$使得$x\ L\delta$-跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$，则称$f$具有利普希茨跟踪性．

定义 10[18]　设(X, d)是度量空间，$f: X \longrightarrow X$连续．若存在$L > 0$，$\forall x, y \in X$，有$d(f(x), f(y)) \leqslant L d(x, y)$，则称$f$是利普希茨映射，$L$为$f$的利普希茨常数．

2　主要定理

定理 1　设(X, d)是度量G-空间，$f: X \longrightarrow X$等价，L为f的利普希茨常数，$k \geqslant 2$．若度量d对

G 不变，则 f 具有 G-强跟踪性当且仅当 f^k 具有 G-强跟踪性.

证 充分性 设 f 具有 G-强跟踪性，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 f 的 (G, δ_1)-强伪轨时，存在 $x \in X$，x (G, ε)-强跟踪 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$. 设 $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ 是 f^k 的 (G, δ_1)-强伪轨，取

$$x_{mk+j} = f^j(y_m) \qquad m \geqslant 0,\ 0 \leqslant j < k$$

则 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 f 的 (G, δ_1)-强伪轨. 故存在 $x \in X$，$l_i \in G$，使得

$$\sum_{i=0}^{\infty} d(f^i(x), l_i x_i) < \varepsilon$$

因此有

$$\sum_{i=0}^{\infty} d(f^{ki}(x), l_{ki} x_{ki}) < \varepsilon$$

即

$$\sum_{i=0}^{\infty} d(f^{ki}(x), l_{ki} y_i) < \varepsilon$$

因此 f^k 具有 G-强跟踪性.

必要性 由于 L 为 f 的利普希茨常数，故 $\forall x, y \in X$，$\forall 1 \leqslant i \leqslant L$，有

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leqslant L^i d(x, y) \tag{1}$$

下面分 $L \geqslant 1$ 和 $0 < L < 1$ 两种情况来证明.

情形1 当 $L \geqslant 1$ 时，假设 f^k 具有 G-强跟踪性，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta_2 < \varepsilon$，当 $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 f^k 的 (G, δ_2)-强伪轨时，存在 $z \in X$，使得 z (G, ε)-强跟踪 $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$. 取 $\delta_3 = \dfrac{\delta_2}{L^k}$. 设 $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ 是 f 的强 (G, δ_3)-伪轨，则存在 $g_m \in G$，使得

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(g_m f(x_m), x_{m+1}) < \delta_3$$

对 $m \geqslant 0$，取 $\varepsilon_m = d(g_m f(x_m), x_{m+1})$ 和 $y_m = x_{mk}$，则 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m < \delta_3$. 由 f 等价，且度量 d 对 G 不变，结合(1)式知，$\forall m \geqslant 0$，有

$$\begin{gathered}
d(g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk+1} g_{mk} f^k(x_{mk}), x_{(m+1)k}) \leqslant \\
d(g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk+1} g_{mk} f^k(x_{mk}), g_{mk+k-1} \cdots g_{mk+1} f^{k-1}(x_{mk+1})) + \\
d(g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk+1} f^{k-1}(x_{mk+1}), g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk+2} f^{k-2}(x_{mk+2})) + \\
d(g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk+2} f^{k-2}(x_{mk+2}), g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk+3} f^{k-3}(x_{mk+3})) + \cdots + \\
d(g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} f^2(x_{mk+k-2}), g_{mk+k-1} f(x_{mk+k-1})) + d(g_{mk+k-1} f(x_{mk+k-1}), x_{(m+1)k}) \leqslant \\
L^{k-1} \varepsilon_{mk} + L^{k-2} \varepsilon_{mk+1} + \cdots + L \varepsilon_{mk+k-2} + \varepsilon_{mk+k-1} \leqslant \\
L^{k-1}(\varepsilon_{mk} + \varepsilon_{mk+1} + \cdots + \varepsilon_{mk+k-2} + \varepsilon_{mk+k-1})
\end{gathered}$$

故

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} d(g_{mk+k-1} g_{mk+k-2} \cdots g_{mk} f^k(y_m), y_{m+1}) \leqslant \\
&\sum_{m=0}^{\infty} L^{k-1}(\varepsilon_{mk} + \varepsilon_{mk+1} + \cdots + \varepsilon_{mk+k-2} + \varepsilon_{mk+k-1}) < L^{k-1} \delta_3 < \delta_2
\end{aligned}$$

因此 $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ 是 f^k 的 (G, δ_2)-强伪轨. 由 f^k 具有 G-强跟踪性知，存在 $z \in X$，$t_m \in G$，使得

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(t_m f^{mk}(z), y_m) < \varepsilon$$

即

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(t_m f^{mk}(z), x_{mk}) < \varepsilon$$

$\forall m \geqslant 0$，取 $\eta_m = d(t_m f^{mk}(z), x_{mk})$，则 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \eta_m < \varepsilon$. 由三角不等式知，对任意的 $m \geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
&d(g_{mk}t_m f^{mk+1}(z), x_{mk+1}) \leqslant \\
&d(g_{mk}t_m f^{mk+1}(z), g_{mk}f(x_{mk})) + d(g_m f(x_{mk}), x_{mk+1}) \leqslant L\eta_m + \varepsilon_{mk} \\
&d(g_{mk+1}g_{mk}t_m f^{mk+2}(z), x_{mk+2}) \leqslant \\
&d(g_{mk+1}g_{mk}t_m f^{mk+2}(z), g_{mk+1}g_{mk}f^2(x_{mk})) + \\
&d(g_{mk+1}g_{mk}f^2(x_{mk}), g_{mk+1}f(x_{mk+1})) + d(g_{mk+1}f(x_{mk+1}), x_{mk+2}) \leqslant \\
&L^2\eta_m + L\varepsilon_{mk} + \varepsilon_{mk+1}
\end{aligned}
$$

继续下去可以得到

$$
d(g_{mk+2}g_{mk+1}g_{mk}t_m f^{mk+3}(z), x_{mk+3}) \leqslant L^3\eta_m + L^2\varepsilon_{mk} + L\varepsilon_{mk+1} + \varepsilon_{mk+2}
$$

$$\cdots\cdots$$

$$
d(g_{mk+k-3}g_{mk+k-2}\ldots g_{mk+1}g_{mk}t_m f^{mk+k-2}(z), x_{mk+k-2}) \leqslant L^{k-2}\eta_m + L^{k-3}\varepsilon_{mk} + \cdots + L\varepsilon_{mk+k-4} + \varepsilon_{mk+k-3}
$$

$$
d(g_{mk+k-2}\ldots g_{mk+1}g_{mk}t_m f^{mk+k-1}(z), x_{mk+k-1}) \leqslant L^{k-1}\eta_m + L^{k-2}\varepsilon_{mk} + L^{k-3}\varepsilon_{mk+1} + \cdots + L\varepsilon_{mk+k-3} + \varepsilon_{mk+k-2}
$$

故

$$
\begin{gathered}
d(t_m f^{mk}(z), x_{mk}) + \sum_{i=i}^{k-1} d(g_{mk+i-1}g_{mk+i-2}\cdots g_{mk+1}g_{mk}t_m f^{mk+i}(z), x_{mk+i}) < \\
k \cdot L^k\eta_m + kL^k(\varepsilon_{mk} + \varepsilon_{mk+1} + \cdots + \varepsilon_{mk+k-2})
\end{gathered}
$$

因此可以得到

$$
\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{\infty}\left\{d(t_m f^{mk}(z), x_{mk}) + \sum_{i=1}^{k-1} d(g_{mk+i-3}g_{mk+i-2}\cdots g_{mk}t_m f^{mk+i}(z), x_{mk+i})\right\} < \\
\sum_{m=0}^{\infty}\{k \cdot L^k\eta_m + kL^k(\varepsilon_{mk} + \varepsilon_{mk+1} + \cdots + \varepsilon_{mk+k-2})\} < k(L^k+1)\varepsilon
\end{gathered}
$$

因此对任意的 $m \geqslant 0$，存在 $p_m \in G$，使得

$$
\sum_{m=0}^{\infty} d(p_m f^m(z), x_m) < k(L^k+1)\varepsilon
$$

由度量 d 对 G 不变知

$$
\sum_{m=0}^{\infty} d(f^m(z), p_m^{-1}x_m) < k(L^k+1)\varepsilon
$$

因此 f 具有 G- 强跟踪性.

情形 2　当 $0 < L < 1$ 时，假设 f^k 具有 G- 强跟踪性，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta_4 < \varepsilon$，当 $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 f^k 的 (G, δ_4)- 强伪轨时，存在 $z \in X$，z (G, ε)- 强跟踪 $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$. 设 $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ 是 f 的 (G, δ_4)- 强伪轨，则存在 $g'_m \in G$，使得

$$
\sum_{m=0}^{\infty} d(g'_m f(x_m), x_{m+1}) < \delta_4
$$

对 $m \geqslant 0$，取

$$
\varepsilon'_m = d(g'_m f(x_m), x_{m+1}) \qquad y_m = x_{mk}
$$

则

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon'_m < \delta_4
$$

由 f 等价，且度量 d 对 G 不变，结合(1) 式知，对任意的 $m \geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
&d(g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk+1}g'_{mk}f^k(x_{mk}), x_{(m+1)k}) \leqslant \\
&d(g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk+1}g'_{mk}f^k(x_{mk}), g'_{mk+k-1}\cdots g'_{mk+1}f^{k-1}(x_{mk+1})) + \\
&d(g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk+1}f^{k-1}(x_{mk+1}), g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk+2}f^{k-2}(x_{mk+2})) + \\
&d(g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk+2}f^{k-2}(x_{mk+2}), g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk+3}f^{k-3}(x_{mk+3})) + \cdots + \\
&d(g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}f^2(x_{mk+k-2}), g'_{mk+k-1}f(x_{mk+k-1})) + d(g'_{mk+k-1}f(x_{mk+k-1}), x_{(m+1)k}) \leqslant \\
&L^{k-1}\varepsilon'_{mk} + L^{k-2}\varepsilon'_{mk+1} + \cdots + L\varepsilon'_{mk+k-2} + \varepsilon'_{mk+k-1} < \\
&L^{k-1}(\varepsilon'_{mk} + \varepsilon'_{mk+1} + \cdots + \varepsilon'_{mk+k-2} + \varepsilon'_{mk+k-1})
\end{aligned}
$$

故

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(g'_{mk+k-1}g'_{mk+k-2}\cdots g'_{mk}f^k(y_m), y_{m+1}) < \sum_{m=0}^{\infty}(\varepsilon'_{mk}+\varepsilon'_{mk+1}+\cdots+\varepsilon'_{mk+k-2}+\varepsilon'_{mk+k-1}) < \delta_4$$

因此$\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ 是 f^k 的(G,δ_4)-强伪轨. 由 f^k 具有G-强跟踪性知,存在 $z\in X$,$t'_m\in G$,使得

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(t'_m f^{mk}(z), y_m) < \varepsilon$$

即

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(t'_m f^{mk}(z), x_{mk}) < \varepsilon$$

对 $m\geqslant 0$,取 $\eta'_m = d(t'_m f^{mk}(z), x_{mk})$,则

$$\sum_{m=0}^{\infty}\eta'_m < \varepsilon$$

由三角不等式知,对任意的 $m\geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}
&d(g'_{mk}t'_m f^{mk+1}(z), x_{mk+1}) \leqslant \\
&d(g'_{mk}t'_m f^{mk+1}(z), g'_{mk}f(x_{mk})) + d(g'_m f(x_{mk}), x_{mk+1}) \leqslant L\eta'_m + \varepsilon'_{mk} \\
&d(g'_{mk+1}g'_{mk}t'_m f^{mk+2}(z), x_{mk+2}) \leqslant \\
&d(g'_{mk+1}g'_{mk}t'_m f^{mk+2}(z), g'_{mk+1}g'_{mk}f^2(x_{mk})) + \\
&d(g'_{mk+1}g'_{mk}f^2(x_{mk}), g'_{mk+1}f(x_{mk+1})) + d(g'_{mk+1}f(x_{mk+1}), x_{mk+2}) \leqslant \\
&L^2\eta'_m + L\varepsilon'_{mk} + \varepsilon'_{mk+1}
\end{aligned}$$

用同样的方法可以得到

$$d(g'_{mk+2}g'_{mk+1}g'_{mk}t'_m f^{mk+3}(z), x_{mk+3}) \leqslant L^3\eta'_m + L^2\varepsilon'_{mk} + L\varepsilon'_{mk+1} + \varepsilon'_{mk+2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$d(g'_{mk+k-3}g'_{mk+k-2}\ldots g'_{mk+1}g'_{mk}t'_m f^{mk+k-2}(z), x_{mk+k-2}) \leqslant L^{k-2}\eta'_m + L^{k-3}\varepsilon'_{mk} + \cdots + L\varepsilon'_{mk+k-4} + \varepsilon'_{mk+k-3}$$

$$d(g'_{mk+k-2}\ldots g'_{mk+1}g'_{mk}t'_m f^{mk+k-1}(z), x_{mk+k-1}) \leqslant L^{k-1}\eta'_m + L^{k-2}\varepsilon'_{mk} + L^{k-3}\varepsilon'_{mk+1} + \cdots + L\varepsilon'_{mk+k-3} + \varepsilon'_{mk+k-2}$$

故

$$\begin{gathered}
d(t'_m f^{mk}(z), x_{mk}) + \sum_{i=i}^{k-1} d(g'_{mk+i-1}g'_{mk+i-2}\cdots g'_{mk+1}g'_{mk}t'_m f^{mk+i}(z), x_{mk+i}) < \\
k\cdot\eta'_m + k(\varepsilon'_{mk}+\varepsilon'_{mk+1}+\cdots+\varepsilon'_{mk+k-2})
\end{gathered}$$

因此可以得到

$$\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{\infty}\left[d(t'_m f^{mk}(z), x_{mk}) + \sum_{i=1}^{k-1} d(g'_{mk+i-3}g'_{mk+i-2}\cdots g'_{mk}t'_m f^{mk+i}(z), x_{mk+i})\right] < \\
\sum_{m=0}^{\infty}(k\cdot\eta'_m + k(\varepsilon'_{mk}+\varepsilon'_{mk+1}+\cdots+\varepsilon'_{mk+k-2})) < 2k\varepsilon
\end{gathered}$$

因此存在 $p'_m\in G$,使得

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(p'_m f^m(z), x_m) < 2k\varepsilon$$

取 $l'_m=(p'_m)^{-1}$,由度量 d 对G 不变知

$$\sum_{m=0}^{\infty} d(f^m(z), l'_m x_m) < 2k\varepsilon$$

因此 f 具有G-强跟踪性.

定理 2 在无限乘积空间 $\overline{X}$ 中,移位映射 $\sigma: \overline{X}\longrightarrow\overline{X}$ 具有利普希茨跟踪性.

证 取 $L_0=2$ 和 $\varepsilon_0=1$. $\forall\, 0<\varepsilon<\varepsilon_0$,设$\{\overline{y}^i\}_{i\geqslant 0}$ 是 $\overline{X}$ 中σ 的ε-伪轨,其中 $\overline{y}^i=(y_0^i, y_1^i, y_2^i, \cdots)$. 故对任意的 $i\geqslant 0$,有

$$\overline{d}(\sigma(\overline{y}^i), \overline{y}^{i+1}) < \varepsilon$$

故对任意的 $k\geqslant 1$ 和 $i\geqslant 0$,有

$$\frac{d(y_k^i, y_{k-1}^{i+1})}{2^{k-1}} < \varepsilon$$

因此

$$d(y_k^i, y_0^{i+k}) < d(y_k^i, y_{k-1}^{i+1}) + d(y_{k-1}^{i+1}, y_{k-2}^{i+2}) + \cdots + d(y_1^{i+k-1}, y_0^{i+k}) < (2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^0) < 2^k\varepsilon$$

即对任意的 $k \geqslant 1$ 和 $i \geqslant 0$，有

$$\frac{d(y_0^{i+k}, y_k^i)}{2^k} < \varepsilon$$

取 $\overline{y} = (y_0^0, y_0^1, y_0^2, \cdots) \in \overline{X}$，则

$$\overline{d}(\sigma^i(\overline{y}), \overline{y}^i) < \varepsilon < L_0\varepsilon$$

因此移位映射 σ 具有利普希茨跟踪性.

3　总结

本文在度量 G- 空间和无限乘积空间中研究了 G- 强跟踪性和利普希茨跟踪性的动力学性质，所得结果为它们在生物学、信息学和经济学等诸多领域的应用提供了理论依据和科学基础.

参考文献：

[1] 顾荣宝，盛业青. 关于渐近的伪轨跟踪性质 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2003，27(3)：1-5.

[2] 冀占江. 强一致收敛条件下拟弱几乎周期性和序列跟踪性的研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(12)：40-44.

[3] AHMADI S A. Invariants of Topological G-Conjugacy on G-Spaces [J]. Mathematica Moravica，2014，18(1)：67-75.

[4] RASOULI H. On the Shadowing Property of Nonautonomous Discrete Systems [J]. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications，2016，7(1)：271-277.

[5] RASULI H，MEMARBASHI R. On the Relation of Shadowing and Expansivity in Nonautonomous Discrete Systems [J]. Analysis in Theory and Applications，2017，33(1)：11-19.

[6] KULCZYCKI M，KWIETNIAK D，OPROCHA P. On Almost Specification and Average Shadowing Properties [J]. Fundamenta Mathematicae，2014，224(3)：241-278.

[7] KWIETNIAK D，OPROCHA P. A Note on the Average Shadowing Property for Expansive Maps [J]. Topology and Its Applications，2012，159(1)：19-27.

[8] OPROCHA P，DASTJERDI D A，HOSSEINI M. On Partial Shadowing of Complete Pseudo-Orbits [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2014，411：454-463.

[9] FAKHARI A，GHANE F H. On Shadowing：Ordinary and Ergodic [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，364(1)：151-155.

[10] NIU Y X. The Average-Shadowing Property and Strong Ergodicity [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2011，376(2)：528-534.

[11] 汪火云，曾鹏. 平均伪轨的部分跟踪 [J]. 中国科学：数学，2016，46(6)：781-792.

[12] SHAH E，DAS T. Consequences of Shadowing Property of G-Spaces [J]. International Journal of Mathematical Analysis，2013，7(12)：579-588.

[13] 孟鑫，刘岩. 非自治离散动力系统的强跟踪性 [J]. 吉林师范大学学报(自然科学版)，2016，37(3)：93-96.

[14] 高建玲，毛月梅. 有限群的 δ-置换子群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：105-109.

[15] CHOI T Y，KIM J H. Decomposition Theorem on G-Spaces [J]. Osaka Journal of Mathematics，2009，46：87-104.

[16] 冀占江. 乘积空间与拓扑群作用下逆极限空间的动力学性质 [D]. 南宁：广西大学，2014.

[17] 冀占江，时伟. 提升空间中的链传递性和强链回归点集的研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(8)：47-50.

[18] SAKAI K. Various Shadowing Properties for Positively Expansive Maps [J]. Topology and Its Applications，2003，131(1)：15-31.

责任编辑　廖坤