

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.05.012

球对称区域上分数阶扩散方程逆源问题

耿肖肖, 程浩, 朱承澄

江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122

摘要: 考虑了球对称区域上分数阶扩散方程的逆源问题, 利用迭代正则化方法, 得到该逆源问题的正则近似解, 并且给出在先验和后验正则化参数选取规则下精确解与正则近似解之间的 Hölder 型误差估计. 数值实验结果验证了该方法的有效性.

关键词: 分数阶扩散方程; 逆源问题; 迭代正则化方法;
误差估计

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



文章编号: 1673-9868(2022)05-0097-11

Inverse Source Problem of Fractional Diffusion Equation on a Spherical Symmetric Domain

GENG Xiaoxiao, CHENG Hao, ZHU Chengcheng

School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China

Abstract: We considered the inverse source problem of fractional diffusion equation on a spherical symmetric domain, and used an iterative regularized method to obtain the regularized approximate solution of the inverse problem, and gave the Hölder type error estimation between the exact solution and its regularized solution under priori and posteriori regularization parameter choice rules. Numerical results verify the effectiveness of this method.

Key words: fractional diffusion equation; inverse source problem; iterative regularized method; error estimation

分数阶微分方程越来越受到人们的关注, 其主要原因是分数阶模型广泛应用于金融统计、粘弹性力学、反常扩散等研究领域中^[1]. 与整数阶微分方程相比, 分数阶微分算子由于其非局部性质, 能够更精准地描述物理现象. 目前, 关于分数阶扩散方程正问题的研究, 不管是在理论还是数值上都已经有了很多有

收稿日期: 2020-06-04

基金项目: 江苏省自然科学基金项目(BK20190578); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX20_1921).

作者简介: 耿肖肖, 硕士研究生, 主要从事数学物理反问题研究.

通信作者: 程浩, 副教授, 硕士研究生导师.

价值的研究成果^[2-4]. 反问题上的研究相对较少, 不过最近几年也得到越来越多的关注, 例如反向问题^[5-8]、柯西问题^[9-10]、逆源问题^[11-14]、反演扩散系数问题^[15]等等. 逆源问题是反问题研究中的一个重要分支, 在现实生活中, 它也是一类很有应用背景的问题, 比如环境污染源的确定、裂缝的识别、新能源的寻找等等.

本文考虑如下球对称区域上分数阶扩散方程:

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(r, t) = u_{rr}(r, t) + \frac{2}{r}u_r(r, t) + F(r, t) & 0 < r < R, 0 < t < T \\ u(r, 0) = \varphi(r) & 0 \leq r \leq R \\ u(R, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ \lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) \text{ 有界} & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

其中: R 表示球体半径, ${}_0D_t^\alpha u(r, t)$ 为阶数为 α ($0 < \alpha \leq 1$) 的 Caputo 分数阶导数, 定义如下^[16]

$${}_0D_t^\alpha u(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau & 0 < \alpha < 1 \\ u_t(r, t) & \alpha = 1 \end{cases}$$

若源项 $F(r, t)$ 、初始条件 $\varphi(r)$ 和边界条件已知, 则上述初边值问题是经典的正问题.

本文所要研究的逆源问题是: 假如初始条件和边界条件已知, 通过附加的终值数据

$$u(r, T) = g(r), 0 \leq r \leq R$$

来辨识具有变量分离形式的源项 $F(r, t) = f(r)q(t)$ 中的 $f(r)$, 其中 $q(t)$ 是已知的.

在实际问题中, $g(r)$ 是通过测量得到的, 带有一定的误差, 故假设终值数据 $g(r)$ 和测量数据 $g^\delta(r)$ 满足

$$\|g(r) - g^\delta(r)\| \leq \delta \quad (2)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 $L^2([0, R], r^2)$ 范数, $\delta > 0$ 是测量误差. 众所周知, 逆源问题是不适定的, 目前已有很多正则化方法被提出来处理此类问题^[17-20].

本文组织结构如下: 第 1 节提供了一些辅助知识; 第 2 节分析了问题的不适定性以及条件稳定性; 第 3 节给出了迭代正则化方法, 并获得了两种正则化参数选取规则下的误差估计; 第 4 节通过两个算例验证了该方法的有效性; 最后一节给出了简单的结论.

1 辅助知识

定义 1 对任意常数 $\alpha > 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$, Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad z \in \mathbb{C}$$

引理 1^[21] 若 $0 < \alpha < 1$, 对于任意的 λ_n 都有 $\lambda_n \geq \lambda_1 > 0$, 则存在正常数 $\bar{C}$ 使得

$$\frac{\bar{C}}{\lambda_n T^\alpha} \leq E_{\alpha, \alpha+1}(-\lambda_n T^\alpha) \leq \frac{1}{\lambda_n T^\alpha}$$

其中 $\bar{C} = 1 - E_{\alpha, 1}(-\lambda_1 T^\alpha)$.

引理 2^[22] 如果 $q(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ 满足: 对 $\forall t \in [0, T]$, 都有 $q(t) \geq q_0 > 0$, 令

$$\|q\|_{\mathbb{C}[0, T]} = \sup_{t \in [0, T]} |q(t)|$$

则有

$$\frac{q_0 \bar{C}}{\lambda_n} \leq \int_0^T q(\tau) (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n (T-\tau)^\alpha) d\tau \leq \frac{\|q\|_{\mathbb{C}[0, T]}}{\lambda_n}$$

引理 3^[23] 对 $0 < \lambda < 1$, 定义 $p_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^i$ 和 $r_k(\lambda) = 1 - p_k(\lambda)\lambda = (1-\lambda)^k$, 则有

$$p_k(\lambda)\lambda^\mu \leq k^{1-\mu} \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (3)$$

$$r_k(\lambda)\lambda^v \leq \theta_v(k+1)^{-v} \quad (4)$$

其中

$$\theta_v = \begin{cases} 1 & 0 \leq v \leq 1 \\ v^v & v > 1 \end{cases}$$

2 不适定性与条件稳定性

假如初边值条件和源项都是已知条件, 则通过分离变量法以及 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 变换可得到正问题(1) 的解 $u(r, t)$ 如下

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n t^a) + f_n \int_0^t q(\tau)(t-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(t-\tau)^a) d\tau \right) \omega_n(r)$$

其中: $\varphi_n = (\varphi(r), \omega_n(r))$, $f_n = (f(r), \omega_n(r))$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2$, $\omega_n(r) = \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{R}} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$, $n = 1, 2, \dots$. 这里的 $\omega_n(r)$ 是在区间 $[0, R]$ 上带权 r^2 的标准正交函数系, 它可以构成一个完备系统, 且有 $(f(r), \omega_n(r)) = \int_0^R r^2 f(r) \omega_n(r) dr$.

利用终值数据 $u(r, T) = g(r)$ 可得

$$g_n = \varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n T^a) + f_n \int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau \quad (5)$$

其中 $g_n = (g(r), \omega_n(r))$.

记

$$h_n = g_n - \varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n T^a)$$

并定义算子 $K: f(r) \longrightarrow h(r)$, 则有

$$Kf(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau (f(r), \omega_n(r)) \omega_n(r) = h(r)$$

可知算子 K 是一个具有奇异值

$$\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau$$

和特征函数 $\omega_n(r)$ 的线性自伴算子. 根据 $\omega_n(r)$ 的性质, 式(5) 可改写为

$$h_n = f_n \int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau$$

所以有

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau} \omega_n(r) \quad (6)$$

根据引理 2 可知

$$\left| \frac{1}{\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau} \right| \geq \frac{n^2 \pi^2}{\|q\|_{\mathfrak{Q}[0, T]} R^2} \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

这表明终值数据 $g(r)$ 中的微小扰动都会导致源项 $f(r)$ 发生巨大变化, 亦即该逆源问题是不适定的. 因此需要通过正则化方法来恢复解的稳定性.

为了保证解的稳定性, 假设源项 $f(r)$ 满足先验界条件

$$\|f(\cdot)\|_p \leq E, \quad p > 0 \quad (7)$$

这里范数 $\|f(\cdot)\|_p$ 的定义为

$$\|f(\cdot)\|_p := \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^{\frac{p}{2}} (f(\cdot), \omega_n(\cdot)) \omega_n(r) \right\|$$

定理 1 若 $f(r)$ 满足 $\|f(\cdot)\|_p \leq E$, 则有

$$\|f(\cdot)\| \leq CE^{\frac{2}{p+2}} \|h\|^{\frac{p}{p+2}} \quad p > 0$$

其中

$$C = \left(\frac{\pi^2}{R^2 q_0 \bar{C}} \right)^{\frac{p}{p+2}}$$

证 由 Hölder 不等式和式(6), 有

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left(\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau \right)^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^{\frac{4}{p+2}}}{\left(\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau \right)^2} h_n^{\frac{2p}{p+2}} \leq \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left(\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau \right)^{p+2}} \right)^{\frac{2}{p+2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \right)^{\frac{p}{p+2}} \end{aligned} \quad (8)$$

根据引理 2, 则有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left(\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau \right)^{p+2}} \leq \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left(\int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau \right)^2} \frac{n^{2p} \pi^{2p}}{(R^2 q_0 \bar{C})^p} \leq \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 (1+n^2)^p \frac{\pi^{2p}}{(R^2 q_0 \bar{C})^p} \leq \left(\frac{\pi^2}{R^2 q_0 \bar{C}} \right)^p \|f\|_p^2 \end{aligned} \quad (9)$$

所以由式(8), (9) 可得

$$\|f\|^2 \leq \left(\frac{\pi^2}{R^2 q_0 \bar{C}} \right)^{\frac{2p}{p+2}} E^{\frac{4}{p+2}} \|h\|^{\frac{2p}{p+2}}$$

注 1 根据定理 1 的证明, 可以类似得到

$$\|f\| \leq C \|f\|^{\frac{2}{p+2}} \|Kf\|^{\frac{p}{p+2}}$$

这意味着可以通过估计 $\|f\|_p$ 和 $\|Kf\|$ 的 L^2 范数来得到 f 的 L^2 范数的界.

3 迭代正则化方法和误差估计

本节将通过迭代正则化方法求得源项 $f(r)$ 的正则近似解, 并分别给出先验和后验参数选取规则下精确解与正则近似解之间的误差估计.

我们通过构造如下正问题来逼近原来的逆源问题, 这里 $u^k(r, t)$ 是如下问题的解

$$\begin{cases} D_t^\alpha u^k(r, t) = u_{rr}^k(r, t) + \frac{2}{r} u_r^k(r, t) + f^{k,\delta}(r) q(t) & 0 < r < R, 0 < t < T, \\ u^k(r, 0) = \varphi(r) & 0 \leq r \leq R \\ u^k(R, t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ \lim_{r \rightarrow 0} u^k(r, t) \text{ 有界} & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

其中源项 $f^{k,\delta}(r)$ 通过下面的迭代方式给出,

$$f^{0,\delta}(r) = 0, f^{k,\delta}(r) = f^{k-1,\delta}(r) - s(u^{k-1,\delta}(r, T) - g^\delta(r)) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

这里 s 是一个加速因子, 它满足: 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$0 < s \int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau < 1$$

k 是迭代步数, 它相当于正则化参数.

不妨记

$$Q_n(T) = \int_0^T q(\tau)(T-\tau)^{a-1} E_{a,a}(-\lambda_n(T-\tau)^a) d\tau$$

$$\sigma_n = sQ_n(T) \quad f_n^{k,\delta} = (f^{k,\delta}(r), \omega_n(r))$$

则易得

$$u^k(r, T) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n T^a) + f_n^{k,\delta} Q_n(T)) \omega_n(r)$$

根据式(10) 有

$$\begin{aligned} f^{k,\delta}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{k-1,\delta} - s(\varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n T^a) + f_n^{k-1,\delta} Q_n(T) - g_n^\delta)) \omega_n(r) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((1-\sigma_n) f_n^{k-1,\delta} + s(g_n^\delta - \varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n T^a))) \omega_n(r) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((1-\sigma_n)^k f_n^{0,\delta} + \sum_{i=0}^{k-1} (1-\sigma_n)^i s(g_n^\delta - \varphi_n E_{a,1}(-\lambda_n T^a))) \omega_n(r) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} (1-\sigma_n)^i s h_n^\delta \right) \omega_n(r) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_k(\sigma_n) s h_n^\delta \omega_n(r) \end{aligned} \quad (11)$$

3.1 先验误差估计

定理 2 设 $f(r)$ 是逆源问题的精确解, $f^{k,\delta}(r)$ 是由式(11) 给出的正则近似解, 若先验界条件(7) 和假设(2) 都成立, 并选取正则化参数

$$k = \left\lceil \frac{1}{s} \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{2}{p+2}} \right\rceil \quad (12)$$

则可得到如下误差估计

$$\|f^{k,\delta}(r) - f(r)\| \leq (1 + \theta_{\frac{p}{2}} C_1^{-\frac{p}{2}}) E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}$$

这里 $C_1 = \frac{R^2 q_0 \bar{C}}{\pi^2}$, $[m]$ 表示不大于 m 的最大整数.

证 由三角不等式, 有

$$\|f^{k,\delta}(r) - f(r)\| \leq \|f^{k,\delta}(r) - f^k(r)\| + \|f^k(r) - f(r)\|$$

根据式(11), (2) 和(3), 并取 $\mu = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \|f^{k,\delta}(r) - f^k(r)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} p_k(\sigma_n) s (g_n^\delta - g_n) \omega_n(r) \right\| \leq \\ &\sup_{n \in \mathbb{N}} p_k(\sigma_n) s \|g^\delta(r) - g(r)\| \leq \delta \sup_{n \in \mathbb{N}} p_k(\sigma_n) s \leq sk\delta \end{aligned} \quad (13)$$

由先验界条件(7)、引理 2 和式(4), 取 $v = \frac{p}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}
\|f^k(r) - f(r)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} p_k(\sigma_n) s h_n \omega_n(r) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{Q_n(T)} \omega_n(r) \right\| = \\
&\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-r_k(\sigma_n)) \frac{h_n}{Q_n(T)} \omega_n(r) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_k(\sigma_n) f_n \omega_n(r) \right\| = \\
&\left(\sum_{n=1}^{\infty} r_k^2(\sigma_n) f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_k^2(\sigma_n) (1+n^2)^{-p} (1+n^2)^p f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\sup_{n \in \mathbb{N}} (r_k(\sigma_n) (1+n^2)^{-\frac{p}{2}}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^p f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq E \sup_{n \in \mathbb{N}} (r_k(\sigma_n) n^{-p}) \leq \\
&E \sup_{n \in \mathbb{N}} (r_k(\sigma_n) C_1^{-\frac{p}{2}} (Q_n(T))^{\frac{p}{2}}) = E(s C_1)^{-\frac{p}{2}} \sup_{n \in \mathbb{N}} (r_k(\sigma_n) \sigma_n^{\frac{p}{2}}) \leq \\
&\theta_{\frac{p}{2}} (s C_1)^{-\frac{p}{2}} E(1+k)^{-\frac{p}{2}}
\end{aligned} \tag{14}$$

结合式(13)和(14),并选取

$$k = \left\lceil \frac{1}{s} \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{2}{p+2}} \right\rceil$$

即可得到

$$\|f^{k,\delta}(r) - f(r)\| \leq (1 + \theta_{\frac{p}{2}} C_1^{-\frac{p}{2}}) E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}$$

3.2 后验误差估计

设 $\tau > 1$ 为给定的常数,正则化参数 k 的取法是满足下面偏差原理

$$\|K f^{k,\delta}(r) - h^\delta(r)\| \leq \tau \delta < \|K f^{k-1,\delta}(r) - h^\delta(r)\| \tag{15}$$

定理 3 设 $f(r)$ 是逆源问题的精确解, $f^{k,\delta}(r)$ 是由式(11)给出的正则近似解,若先验界条件(7)和假设(2)都成立,且正则化参数 k 由式(15)取定,则可得到如下误差估计

$$\|f^{k,\delta}(r) - f(r)\| \leq (C(\tau+1)^{\frac{p}{p+2}} + (C_1^{-\frac{p}{2}} \theta_{\frac{p+2}{2}})^{\frac{2}{p+2}} (\tau-1)^{-\frac{2}{p+2}}) E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}}$$

证 由三角不等式,有

$$\|f^{k,\delta}(r) - f(r)\| \leq \|f^{k,\delta}(r) - f^k(r)\| + \|f^k(r) - f(r)\|$$

由式(13)知

$$\|f^{k,\delta}(r) - f^k(r)\| \leq s k \delta \tag{16}$$

由式(15)可得

$$\begin{aligned}
\tau \delta &< \|K f^{k-1,\delta}(r) - h^\delta(r)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_{k-1}(\sigma_n) h_n^\delta \omega_n(r) \right\| \leq \\
&\left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_{k-1}(\sigma_n) (h_n^\delta - h_n) \omega_n(r) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_{k-1}(\sigma_n) h_n \omega_n(r) \right\| \leq \\
&\delta + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_{k-1}(\sigma_n) Q_n(T) f_n \omega_n(r) \right\| \leq \\
&\delta + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_{k-1}(\sigma_n) Q_n(T) n^{-p} (1+n^2)^{\frac{p}{2}} f_n \omega_n(r) \right\| \leq \\
&\delta + E \sup_{n \in \mathbb{N}} (r_{k-1}(\sigma_n) Q_n(T) n^{-p}) \leq \\
&\delta + E \sup_{n \in \mathbb{N}} (r_{k-1}(\sigma_n) C_1^{-\frac{p}{2}} (Q_n(T))^{\frac{p+2}{2}}) \leq \\
&\delta + C_1^{-\frac{p}{2}} \theta_{\frac{p+2}{2}} E (s k)^{-\frac{p+2}{2}}
\end{aligned}$$

故有

$$sk \leqslant (C_1^{-\frac{p}{2}} \theta_{\frac{p+2}{2}})^{\frac{2}{p+2}} (\tau - 1)^{-\frac{2}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{-\frac{2}{p+2}} \quad (17)$$

将式(17) 代入式(16), 得

$$\|f^{k,\delta}(r) - f^k(r)\| \leqslant (C_1^{-\frac{p}{2}} \theta_{\frac{p+2}{2}})^{\frac{2}{p+2}} (\tau - 1)^{-\frac{2}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}} \quad (18)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \|K(f^k(r) - f(r))\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_k(\sigma_n) h_n \omega_n(r) \right\| \leqslant \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_k(\sigma_n) (h_n - h_n^{\delta}) \omega_n(r) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_k(\sigma_n) h_n^{\delta} \omega_n(r) \right\| \leqslant \\ &\delta + \tau \delta = (1 + \tau) \delta \end{aligned}$$

根据 $f(r)$ 的先验界条件以及范数 $\|f(\cdot)\|_p$ 的定义, 有

$$\|f^k(r) - f(r)\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_k(\sigma_n) \frac{h_n}{Q_n(T)} (1 + n^2)^{\frac{p}{2}} \omega_n(r) \right\| \leqslant \|f(r)\|_p \leqslant E$$

应用注 1, 可得

$$\|f^k(r) - f(r)\| \leqslant C(\tau + 1)^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \delta^{\frac{p}{p+2}} \quad (19)$$

结合式(18) 和式(19), 即可得到所要结果.

4 数值算例

通过数值算例验证迭代正则化方法对处理球对称区域上分数阶扩散方程逆源问题的有效性. 由于正问题(1) 的精确解很难获得, 故利用有限差分法求解正问题. 通过给定的函数 $\varphi(r), q(t)$ 和 $f(r)$, 来获得终值数据 $g(r)$. 在数值试验中, 我们取 $R=3, T=1$, 时间和空间上等距划分的份数分别为 $M=100, N=50$, 相对应的步长分别为 $\Delta t = \frac{T}{M}$ 和 $h = \frac{R}{N}$, 并记 $t_n = n\Delta t (n=0, 1, \dots, M)$, $r_i = ih (i=0, 1, \dots, N)$, 每个网格点处的值为 $u_i^n \approx u(r_i, t_n)$. 先验规则下的正则化参数 k 由式(12) 给出, 后验规则下的 k 通过式(15) 计算得到, 其中 $\tau=1.1$.

时间项导数可以通过 Caputo 分数阶导数的 L_1 插值逼近来近似得到

$$D_t^\alpha u(r, t) \approx \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (a_0^{(\alpha)} u_i^n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1}^{(\alpha)} - a_{n-k}^{(\alpha)}) u_i^k - a_{n-1}^{(\alpha)} u_i^0)$$

其中 $a_l^{(\alpha)} = (l+1)^{1-\alpha} - l^{1-\alpha}, l \geqslant 0$.

空间项导数由如下格式近似得到

$$\begin{aligned} u_{rr}(r_i, t_n) &\approx \frac{1}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ u_r(r_i, t_n) &\approx \frac{1}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \end{aligned}$$

对有限差分得到的终值数据 $g(r)$ 按如下方式添加随机扰动得到噪声数据:

$$g^\delta = g + \varepsilon g \cdot (2\text{rand}(\text{size}(g)) - 1)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 反映相对误差水平, 相应的噪声水平为 $\delta = \|g^\delta - g\|$.

为了说明正则近似解的精确性, 我们计算绝对误差

$$e(f, \varepsilon) = \|f^{k,\delta}(r) - f(r)\|$$

和相对误差

$$e_r(f, \epsilon) = \frac{\|f^{k,\delta}(r) - f(r)\|}{\|f(r)\|}$$

例 1 取函数 $q(t) = 2t + \pi$, $\varphi(r) = \sin(r)$, 精确的源项为

$$f(r) = 2\sin(\pi r)$$

图 1 和图 2 分别给出了先验和后验正则化参数选取规则下, 取 $\alpha = 0.2, 0.8$ 时不同误差水平下的正则近似解与精确解的数值结果. 在表 1 和表 2 中, 我们分别给出先验和后验规则下 $\epsilon = 0.01$, α 取不同值时精确解与正则近似解之间的误差分析以及 $\alpha = 0.5$, ϵ 取不同值时精确解与正则近似解之间的误差分析.

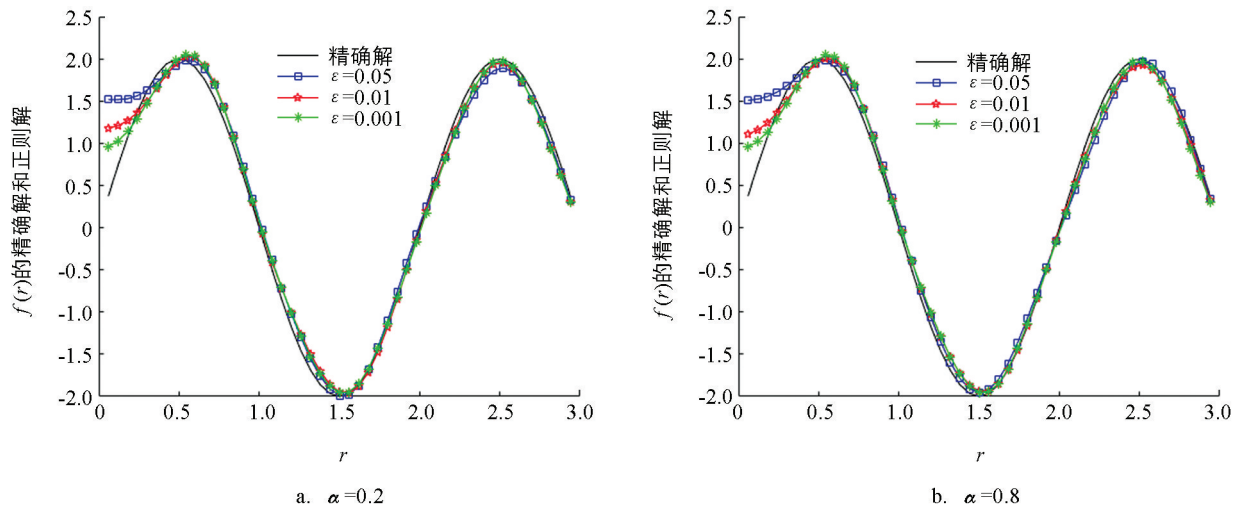


图 1 先验参数选取规则下例 1 的精确解与正则近似解比较

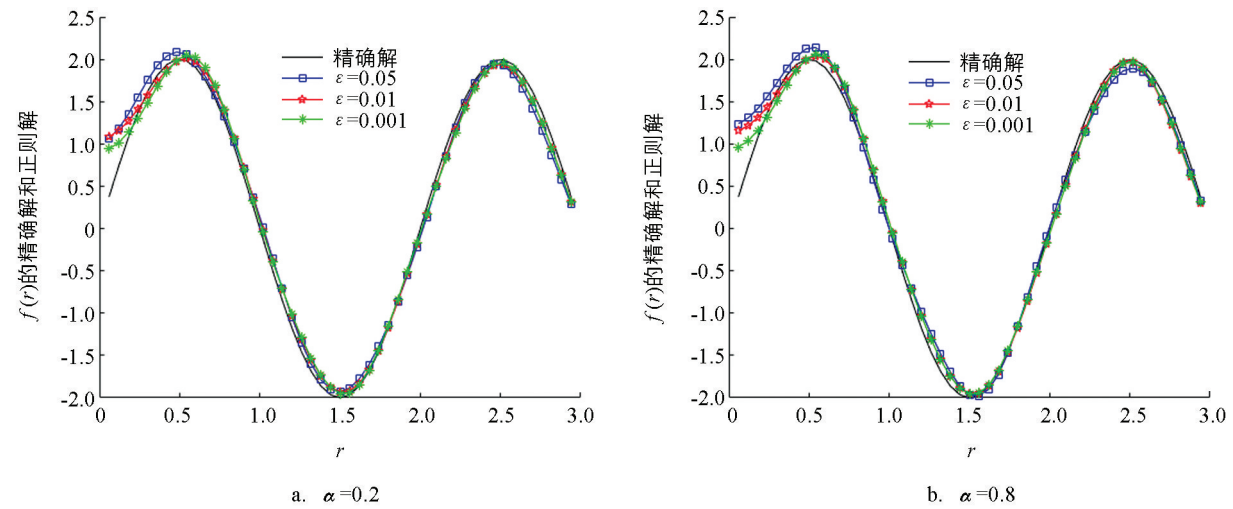


图 2 后验参数选取规则下例 1 的精确解与正则近似解比较

表 1 例 1 关于不同 α 的数值结果 ($\epsilon = 0.01$)

α	0.2	0.4	0.6	0.8
$e(f, \epsilon)_{\text{priori}}$	1.026 9	1.076 2	1.055 0	1.070 3
$e_r(f, \epsilon)_{\text{priori}}$	0.072 6	0.079 2	0.074 6	0.075 7
$e(f, \epsilon)_{\text{posteriori}}$	0.799 3	0.844 9	0.790 4	0.823 6
$e_r(f, \epsilon)_{\text{posteriori}}$	0.079 9	0.084 5	0.079 0	0.082 4

表 2 例 1 关于不同 ε 的数值结果 ($\alpha = 0.5$)

ε	0.001	0.01	0.05
$e(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.974 9	1.042 1	1.424 6
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.097 5	0.104 2	0.142 5
$e(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.936 1	0.967 3	1.298 8
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.093 6	0.096 7	0.129 9

例 2 取函数 $q(t) = t + 6\pi$, $\varphi(r) = r^2 - 4r$, 精确的源项为

$$f(r) = \begin{cases} 2(r-1) & 1 \leq r < 1.5 \\ 2(2-r) & 1.5 \leq r < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在图 3 和图 4 中, 我们分别给出了先验和后验规则下, 取 $\alpha = 0.2, 0.8$ 时不同误差水平下的正则近似解与精确解之间的数值结果. 在表 3 和表 4 中, 我们分别给出先验和后验规则下, $\varepsilon = 0.01$, α 取不同值时精确解与正则近似解之间的误差分析以及 $\alpha = 0.5$, ε 取不同值时精确解与正则近似解之间的误差分析.

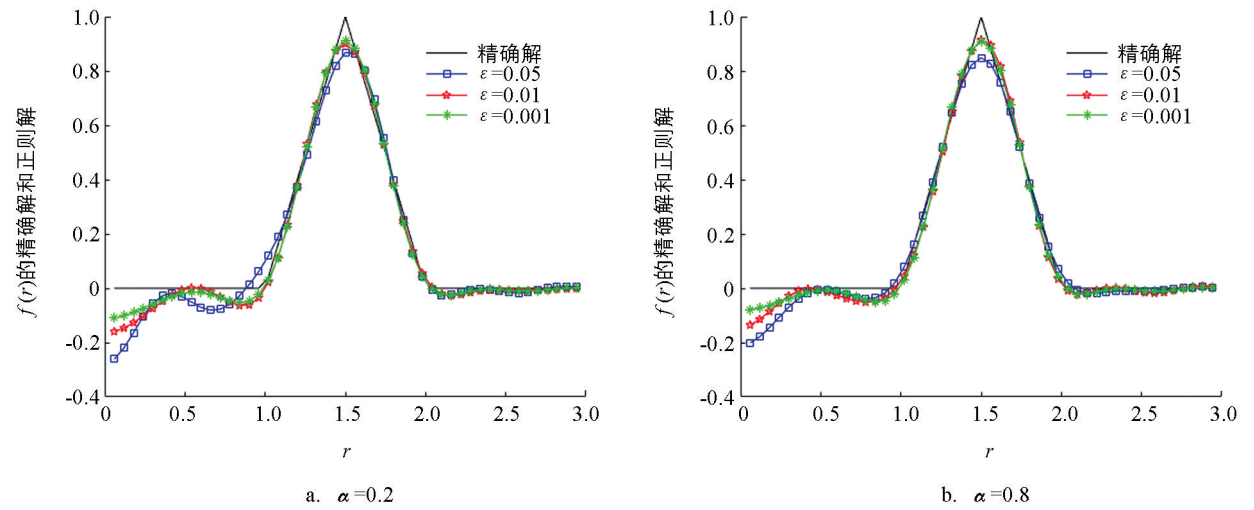


图 3 先验参数选取规则下例 2 的精确解与正则近似解比较

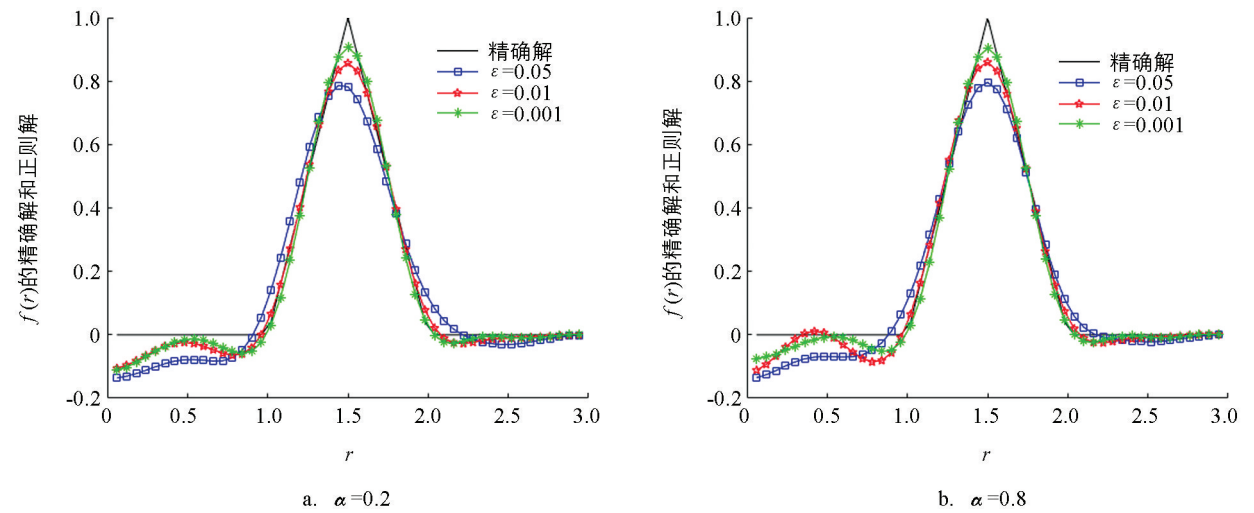


图 4 后验参数选取规则下例 2 的精确解与正则近似解比较

表 3 例 2 关于不同 α 的数值结果($\varepsilon = 0.01$)

α	0.2	0.4	0.6	0.8
$e(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.268 8	0.251 1	0.272 9	0.264 0
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.113 6	0.106 1	0.115 4	0.111 6
$e(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.246 5	0.267 2	0.241 5	0.269 5
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.104 2	0.113 0	0.102 1	0.113 9

表 4 例 2 关于不同 ε 的数值结果($\alpha = 0.5$)

ε	0.001	0.01	0.05
$e(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.253 3	0.376 0	0.883 4
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{priori}}$	0.107 1	0.158 9	0.373 4
$e(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.269 7	0.326 3	0.688 7
$e_r(f, \varepsilon)_{\text{posteriori}}$	0.114 0	0.137 9	0.291 2

综合对比图 1 至图 4, 可以看出, 后验正则化参数选取规则下重构的源项与精确解之间的拟合效果总体要比先验的好一些. 再结合表 1 至表 4, 可以发现数值误差关于 α 变化比较稳定, 故我们的方法对 α 不太敏感(这与文献[20]的结果相符), 同时也可以发现随着随机扰动 ε 的减小, 数值误差明显在减小, 精确解与正则近似解也越来越吻合. 这说明对于球对称区域上分阶扩散方程的逆源问题, 采用该迭代正则化方法有着非常好的效果.

5 结论

探讨了球对称区域上分数阶扩散方程逆源问题. 通过迭代正则化求得源项的正则近似解, 并在先验和后验参数选取规则下给出了精确解与正则近似解之间的 Hölder 型误差估计. 最后, 通过数值算例验证了该迭代方法处理此逆源问题的有效性.

参考文献:

[1] SUN H G, CHEN W, LI C P, et al. Fractional Differential Models for Anomalous Diffusion [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2010, 389(14): 2719-2724.

[2] YE H P, LIU F W, TURNER I, et al. Series Expansion Solutions for the Multi-Term Time and Space Fractional Partial Diffusional Equations in Two and Three Dimensions [J]. The European Physical Journal Special Topics, 2013, 222(8): 1901-1914.

[3] LI X, XU C. A Space-Time Spectral Method for the Time Fractional Diffusion Equation [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2010, 47(3): 2108-2131.

[4] JIANG X Y, XU M Y. The Time Fractional Heat Conduction Equation in the General Orthogonal Curvilinear Coordinate and the Cylindrical Coordinate Systems [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2010, 389(17): 3368-3374.

[5] YANG F, WANG N, LI X X, et al. A Quasi-Boundary Regularization Method for Identifying the Initial Value of Time-Fractional Diffusion Equation on Spherically Symmetric Domain [J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2019, 27(5): 609-621.

[6] REN C X, XU X, LU S. Regularization by Projection for a Backward Problem of the Time-Fractional Diffusion Equation [J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2014, 22(1): 121-139.

[7] LIU J J, YAMAMOTO M. A Backward Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation [J]. Applicable Analysis,

- 2010, 89(11): 1769-1788.
- [8] 杨帆, 张燕, 李晓晓. 拟逆正则化方法结合离散随机扰动反演初值问题 [J]. 兰州理工大学学报, 2019, 45(3): 153-158.
- [9] WEI T, ZHANG Z Q. Stable Numerical Solution to a Cauchy Problem for a Time Fractional Diffusion Equation [J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2014, 40: 128-137.
- [10] XIONG X T, ZHAO L P, HON Y C. Stability Estimate and the Modified Regularization Method for a Cauchy Problem of the Fractional Diffusion Equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 272: 180-194.
- [11] BAO G, EHLERS T A, LI P J. Radiogenic Source Identification for the Helium Production-Diffusion Equation [J]. Communications in Computational Physics, 2013, 14(1): 1-20.
- [12] ZHANG M M, LIU J J. Identification of a Time-Dependent Source Term in a Distributed-Order Time-Fractional Equation from a Nonlocal Integral Observation [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2019, 78(10): 3375-3389.
- [13] ZHANG Y, XU X. Inverse Source Problem for a Fractional Diffusion Equation [J]. Inverse Problems, 2011, 27(3): 035010.
- [14] TUAN N H, LONG L D. Fourier Truncation Method for an Inverse Source Problem for Space-Time Fractional Diffusion Equation [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 2017(122): 1-16.
- [15] LI G S, ZHANG D L, JIA X Z, et al. Simultaneous Inversion for the Space-Dependent Diffusion Coefficient and the Fractional Order in the Time-Fractional Diffusion Equation [J]. Inverse Problems, 2013, 29(6): 065014.
- [16] MURIO D A. On the Stable Numerical Evaluation of Caputo Fractional Derivatives [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2006, 51(9-10): 1539-1550.
- [17] 邱淑芳, 王泽文, 曾祥龙, 等. 一类时间分数阶扩散方程中的源项反演解法 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2018, 42(6): 610-615.
- [18] WEI C, JIE M Y, LI F C. Identifying an Unknown Source Term in Radial Heat Conduction [J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2012, 20(3): 335-349.
- [19] YANG F, ZHANG P, LI X X, et al. Tikhonov Regularization Method for Identifying the Space-Dependent Source for Time-Fractional Diffusion Equation on a Columnar Symmetric Domain [J]. Advances in Difference Equations, 2020, 2020(128): 1-16.
- [20] WANG J G, WEI T. An Iterative Method for Backward Time-Fractional Diffusion Problem [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2014, 30(6): 2029-2041.
- [21] WANG J G, WEI T. Quasi-Reversibility Method to Identify a Space-Dependent Source for the Time-Fractional Diffusion Equation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(20): 6139-6149.
- [22] WEI T, WANG J G. A Modified Quasi-Boundary Value Method for an Inverse Source Problem of the Time-Fractional Diffusion Equation [J]. Applied Numerical Mathematics, 2014, 78: 95-111.
- [23] DENG Y J, LIU Z H. Iteration Methods on Sideways Parabolic Equations [J]. Inverse Problems: an International Journal of Inverse Problems, Inverse Methods and Computerised Inversion of Data, 2009, 25(9): 95004.