

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.06.009

# 双圈图的邻和可区别边染色

谭钧铭<sup>1</sup>, 强会英<sup>1</sup>, 刘欢<sup>1</sup>, 王洪申<sup>2</sup>

1. 兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070; 2. 兰州理工大学 机电工程学院, 兰州 730050

**摘要:** 设  $G$  是阶数不小于 3 的简单连通图.  $u, v$  是图  $G$  的一个  $k$ -正常边染色的任意相邻的两个顶点, 如果点  $u$  所有关联边的颜色加和与点  $v$  所有关联边的颜色加和不相等, 则称该染色是邻和可区别的. 对  $G$  进行邻和可区别边染色所需要的最少的颜色数  $k$  称为  $G$  的邻和可区别边色数. 根据双圈图的结构特点, 对双圈图的有根树的树高进行分类, 运用结构分析法、反证法、构造染色法, 以及组合零点定理等方法, 研究了双圈图的邻和可区别边染色问题, 得到了双圈图的邻和可区别边色数.

**关键词:** 双圈图; 邻和可区别边染色; 邻和可区别边色数

**中图分类号:** O157.5

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2022)06-0080-08

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



## Neighbor Sum Distinguishing Edge Coloring of Bicyclic Graphs

TAN Junming<sup>1</sup>, QIANG Huiying<sup>1</sup>, LIU Huan<sup>1</sup>, WANG Hongshen<sup>2</sup>

1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China

**Abstract:** Let  $G$  be a simple connected graph with order not less than 3. A  $k$ -proper edge coloring of  $G$  is called neighbor sum distinguishing if for any two adjacent vertices  $u, v$ , the sum of colors taken on the edges incident to  $u$  is different from the sum of colors taken on the edges incident to  $v$ . The smallest  $k$  required for a neighbor sum distinguishing edge coloring of  $G$  is called the neighbor sum distinguishing edge chromatic number. According to the structures and characteristics of bicyclic graphs, the tree height of the rooted trees of bicyclic graphs was classified. The neighbor sum distinguishing edge colorings of bicyclic graphs were studied by using the methods of structural analysis, contradiction, constructing the colorings, together with Combinatorial Nullstellensatz. Their neighbor sum distinguishing edge chromatic numbers were obtained.

**Key words:** bicyclic graph; neighbor sum distinguishing edge coloring; neighbor sum distinguishing edge chromatic number

收稿日期: 2021-06-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(61962035, 11961041).

作者简介: 谭钧铭, 硕士研究生, 主要从事图论及其应用的研究.

图的染色问题是图论主要研究内容之一. 文献[1]首次提出了图的邻和可区别染色的概念, 给出了猜想: 对于至少含3个点的连通图 $G$ , 若 $G \neq C_5$ , 有 $\chi'_s(G) \leq \Delta(G) + 2$ , 并得到了路、圈、完全图等图的邻和可区别边色数. 文献[2]研究了双圈图的邻点可区别边染色. 更多的染色结论, 可参见文献[3-8]. 本文研究了双圈图的邻和可区别边染色, 得到了双圈图的邻和可区别边色数.

图 $G$ 表示一个双圈图, 图上的树的高度称为双圈图的有根树的高度. 树上最长路的长度, 称为有根树的高.  $V(G), E(G), \Delta(G)$ 分别是图 $G$ 的点集合、边集合、最大度.  $d_G(v)$ 表示在图 $G$ 中点 $v$ 的度,  $S_\varphi(v)$ 表示在 $\varphi$ 下所有与点 $v$ 相关联的边所染颜色构成的色集合,  $[k]$ 表示 $\{1, 2, \dots, k\}$ 组成的色集合.  $G_\Delta$ 表示图 $G$ 的全体最大度顶点在图 $G$ 中的导出子图. 文中未加说明的符号可参见文献[9-12].

## 1 预备知识

**定义1**<sup>[13]</sup> 设 $\varphi: E(G) \rightarrow [k]$ 是阶数至少为3的简单图 $G$ 的一个 $k$ -正常边染色,  $f_\varphi(v)$ 表示所有与点 $v$ 相关联的边所染颜色的加和. 如果对 $\forall uv \in E(G)$ , 都有 $f_\varphi(u) \neq f_\varphi(v)$ , 则称 $\varphi$ 是图 $G$ 的一个 $k$ -邻和可区别边染色, 简记为 $k$ -NSDPEC.  $\chi'_s(G) = \min\{k \mid G \text{ 有 } k\text{-NSDPEC}\}$ .

**定义2**<sup>[14]</sup> 边数等于顶点数加1的简单连通图叫做双圈图.

**定义3** 设图 $H$ 是无悬挂点的双圈图, 则 $H \in \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$ .

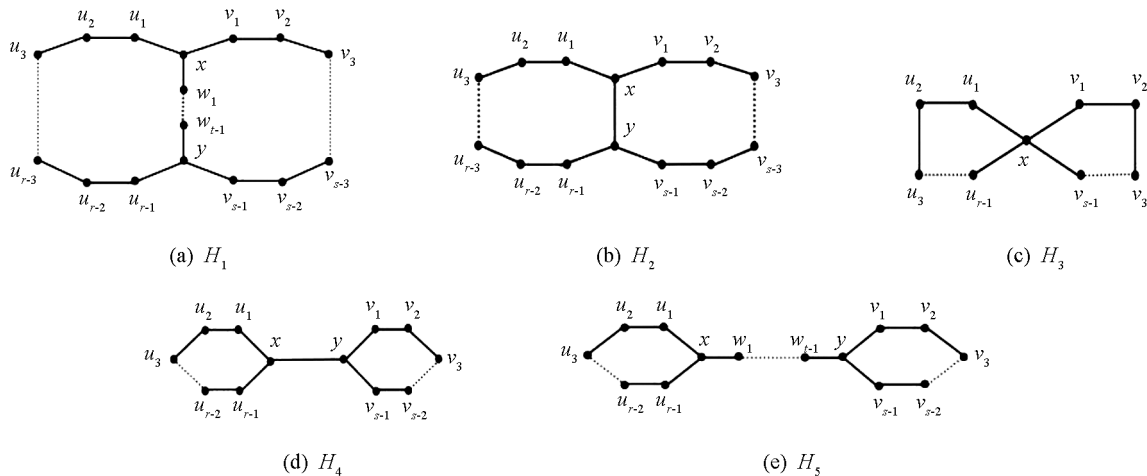


图1 无悬挂点的双圈图

**引理1**<sup>[15]</sup> 对任意阶数至少为3的图 $G$ , 有 $\chi'_s(G) \geq \Delta(G)$ . 若 $G_\Delta \neq \emptyset$ , 则 $\chi'_s(G) \geq \Delta(G) + 1$ .

**引理2** 若图 $G$ 有一个圈长恒等于 $1 \pmod{3}$ 的圈, 且该圈仅有1个3度点, 则 $\chi'_s(G) \geq 4$ .

**证** 记圈长 $r(r \equiv 1 \pmod{3})$ 的圈为 $C = v_1 v_2 \cdots v_r v_1$ , 且 $d_G(v_1) = 3, d_G(v_i) = 2(2 \leq i \leq r)$ . 由引理1得,  $\chi'_s(G) \geq 3$ . 假设 $G$ 有3-NSDPEC, 则用1, 2, 3依次循环染 $v_1 v_2, \dots, v_{r-1} v_r$ . 由于边 $v_1 v_2, v_{r-1} v_r$ 分别染1, 3, 根据正常边染色的条件,  $v_r v_1$ 只能染2, 则 $f(v_{r-1}) = f(v_r) = 5$ , 矛盾. 则 $\chi'_s(G) \geq 4$ .

**引理3(组合零点定理)**<sup>[16]</sup> 设 $F$ 为任一数域,  $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $F = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上的多项式. 设 $\text{dep}(P) = \sum_{i=1}^n k_i$ , 其中 $k_i$ 为非负整数,  $P$ 中 $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ 的系数非零. 若 $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq F$ 且 $|S_i| > k_i (1 \leq i \leq n)$ , 则存在 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$ , 使得 $P(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0$ .

## 2 主要结论

**定理1** 记树高都为0的双圈图分别为 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$ (如图1所示), 则

(i)  $\chi'_{\Sigma}(H_1)=\begin{cases}4 & r,s,t \text{ 中仅有 } 2 \text{ 个数恒等于 } 1(\bmod 3) \\ 3 & \text{其他} \end{cases};$

(ii)  $\chi'_{\Sigma}(H_i)=4(i=2,3,4);$

(iii)  $\chi'_{\Sigma}(H_5)=\begin{cases}4 & r\equiv 1(\bmod 3) \text{ 或 } s\equiv 1(\bmod 3) \\ 3 & \text{其他} \end{cases}.$

证 对于图  $H_1$ . 记  $P_1=xu_1\cdots u_{r-1}y$ ,  $P_2=xv_1\cdots v_{s-1}y$ ,  $P_3=xw_1\cdots w_{t-1}y$ , 显然这 3 条路是对称、等价的, 且  $\chi'_{\Sigma}(H_1)\geq 3$ . 现根据路长  $r,s,t$  分别给出  $H_1$  的  $\binom{3}{1}+\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{1}{1}=10$  种染色(如表 1).

表 1  $H_1$  的邻和可区别边染色

| $r,s,t$                                                      | $P_1$                     | $P_2$                     | $P_3$                     |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $r,s,t\equiv 0(\bmod 3)$                                     | $(123)^{\frac{r}{3}}$     | $(231)^{\frac{s}{3}}$     | $(312)^{\frac{t}{3}}$     |
| $r,s,t\equiv 1(\bmod 3)$                                     | $(231)^{\frac{r-1}{3}}2$  | $(312)^{\frac{s-1}{3}}3$  | $(123)^{\frac{t-1}{3}}1$  |
| $r,s,t\equiv 2(\bmod 3)$                                     | $(231)^{\frac{r-2}{3}}23$ | $(312)^{\frac{s-2}{3}}31$ | $(123)^{\frac{t-2}{3}}12$ |
| $r,s\equiv 0(\bmod 3), t\equiv 1(\bmod 3)$                   | $(213)^{\frac{r}{3}}$     | $(312)^{\frac{s}{3}}$     | $(123)^{\frac{t-1}{3}}1$  |
| $r,s\equiv 0(\bmod 3), t\equiv 2(\bmod 3)$                   | $(213)^{\frac{r}{3}}$     | $(321)^{\frac{s}{3}}$     | $(123)^{\frac{t-2}{3}}12$ |
| $r,s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 0(\bmod 3)$                   | $(132)^{\frac{r-1}{3}}1$  | $(231)^{\frac{s-1}{3}}4$  | $(312)^{\frac{t}{3}}$     |
| $r,s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 2(\bmod 3)$                   | $(231)^{\frac{r-1}{3}}2$  | $(312)^{\frac{s-1}{3}}3$  | $(123)^{\frac{t-2}{3}}14$ |
| $r,s\equiv 2(\bmod 3), t\equiv 0(\bmod 3)$                   | $(123)^{\frac{r-2}{3}}12$ | $(231)^{\frac{s-2}{3}}23$ | $(321)^{\frac{t}{3}}$     |
| $r,s\equiv 2(\bmod 3), t\equiv 1(\bmod 3)$                   | $(231)^{\frac{r-2}{3}}23$ | $(321)^{\frac{s-2}{3}}32$ | $(123)^{\frac{t-1}{3}}1$  |
| $r\equiv 0(\bmod 3), s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 2(\bmod 3)$ | $(123)^{\frac{r}{3}}$     | $(231)^{\frac{s-1}{3}}2$  | $(312)^{\frac{t-2}{3}}31$ |

现需证当  $r,s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 0(\bmod 3)$  或  $r,s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 2(\bmod 3)$  时,  $H_1$  无 3-NSDPEC. 反证法: 假设当  $r,s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 0(\bmod 3)$  时,  $H_1$  有 3-NSDPEC. 不妨令  $P_1$  依次循环染 1,3,2,  $P_3$  依次循环染 3,1,2, 路  $xv_1\cdots v_{s-1}$  依次循环染 2,3,1. 因为边  $yu_{r-1}$  染 1, 边  $yw_{t-1}$  染 2, 边  $yv_{s-1}$  只能染 3, 则  $f(v_{s-1})=f(v_{s-2})=4$ , 矛盾. 故  $\chi'_{\Sigma}(H_1)\geq 4$ .  $r,s\equiv 1(\bmod 3), t\equiv 2(\bmod 3)$  时的证明类似. 定理 1 成立.

对于图  $H_2$ . 由引理 1 得,  $\chi'_{\Sigma}(H_2)\geq 4$ . 下面给出  $H_2$  的一个 4-NSDPEC: 边  $xy,yu_{r-1},xv_1$  分别染 3,4,4, 路  $xu_1u_2\cdots u_{r-1}$  依次循环染 2,1,3, 路  $yv_{s-1}v_{s-2}\cdots v_1$  依次循环染 1,2,3. 定理 1 成立.

对于图  $H_3$ . 由引理 1 得,  $\chi'_{\Sigma}(H_3)\geq 4$ . 下面给出  $H_3$  的一个 4-NSDPEC: 边  $xu_{r-1},xv_{s-1}$  分别染 2,4, 路  $xu_1u_2\cdots u_{r-1}$  依次循环染 1,4,3, 路  $xv_1v_2\cdots v_{s-1}$  依次循环染 3,1,2. 定理 1 成立.

对于图  $H_4$ . 由引理 1 得  $\chi'_{\Sigma}(H_4)\geq 4$ . 下面给出  $H_4$  的一个 4-NSDPEC: 边  $xu_{r-1},xy,yv_{s-1}$  分别染 2,1,4, 路  $xu_1u_2\cdots u_{r-1}$  依次循环染 4,1,3, 路  $yv_1v_2\cdots v_{s-1}$  依次循环染 3,1,2. 定理 1 成立.

对于图  $H_5$ . 由引理 1 得,  $\chi'_{\Sigma}(H_5)\geq 3$ .

若  $r\equiv 1(\bmod 3)$  或  $s\equiv 1(\bmod 3)$ . 由引理 2 知,  $\chi'_{\Sigma}(H_5)\geq 4$ . 下面给出  $H_5$  的一个 4-NSDPEC: 边  $xu_{r-1}$  染 4, 路  $xu_1\cdots u_{r-1}$  依次循环染 3,2,1, 边  $yv_{s-1}$  染 2, 路  $yv_1\cdots v_{s-1}$  依次循环染 3,1,4. 边  $yw_{t-1}$  染 4, 路  $xw_1\cdots w_{t-1}$  依次循环染 1,3,2. 定理 1 成立.

若  $r\not\equiv 1(\bmod 3)$  且  $s\not\equiv 1(\bmod 3)$ . 给出  $H_5$  的一个 3-NSDPEC: 路  $xw_1\cdots w_{t-1}y$  依次循环染 1,2,3. 令  $yw_{t-1}$  染  $a$ , 且  $\{1,2,3\}\setminus\{a\}=\{b,c\}$ . 当  $s\equiv 0(\bmod 3)$  时, 圈  $yv_1\cdots v_{s-1}y$  依次循环染  $c,a,b$ ; 当  $s\equiv 2(\bmod 3)$

时,圈  $yv_1 \cdots v_{s-1}y$  依次循环染  $b, c, a$ . 圈  $xu_1 \cdots u_{r-1}x$  与  $yv_1 \cdots v_{s-1}y$  的染法相似. 定理 1 成立.

将有根树的树高大于 0 且  $\Delta(G)=3$  的双圈图分为 3 种:  $\alpha$ -型双圈图,  $\beta$ -型双圈图,  $\gamma$ -型双圈图.

$\alpha$ -型双圈图: 设图  $G$  是  $n$  阶双圈图 ( $n \geq 16$ ), 且同时满足: (a)  $\Delta(G)=3$ ,  $G_\Delta = \emptyset$ ; (b) 图  $G$  是在  $H_1$  的基础上连接着树, 且在连接  $(x, y)$  的 3 条路中, 有任意 2 条路的路长都恒等于  $1 \pmod{3}$ , 另一条路的路长恒等于  $2 \pmod{3}$ ; (c) 在路长恒等于  $2 \pmod{3}$  的路中, 存在内点  $z$ , 使得  $(x, z)$  与  $(z, y)$  的路长均为  $1 \pmod{3}$ ; (d) 任意  $v \in V(H_1) \setminus z$ ,  $d_G(v) = d_{H_1}(v)$ .

$\beta$ -型双圈图: 设图  $G$  是  $n$  阶双圈图 ( $n \geq 10$ ), 且同时满足: (a)  $\Delta(G)=3$ ,  $G_\Delta = \emptyset$ ; (b)  $G$  中存在圈  $C$ , 该圈圈长为  $r$  ( $r \equiv 1 \pmod{3}$ ), 且圈上仅有 1 个 3 度点.

$\gamma$ -型双圈图: 除  $\alpha$ -型双圈图、 $\beta$ -型双圈图之外的  $\Delta(G)=3$  的  $n$  阶 ( $n \geq 4$ ) 双圈图.

**定理 2** 若图  $G$  是  $\alpha$ -型双圈图或者  $\beta$ -型双圈图, 则  $\chi'_s(G) = 4$ .

**证** 由引理 2 与定理 1 的证明可知, 不论图  $G$  是  $\alpha$ -型双圈图还是  $\beta$ -型双圈图, 都有  $\chi'_s(G) \geq 4$ .

情形 1 有根树最大高度为 1.

若图  $G$  是  $\alpha$ -型双圈图. 记路  $P_1$  的长  $r \equiv 1 \pmod{3}$ , 路  $P_2$  的长  $s \equiv 1 \pmod{3}$ , 路  $P_3$  的长  $t \equiv 2 \pmod{3}$ . 在表 1 中  $r, s \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $t \equiv 2 \pmod{3}$  时 4-NSDPEC 的基础上, 给出  $G$  的一个 4-NSDPEC: 因  $G_\Delta = \emptyset$ , 故  $t \geq 8$ . 在  $H_1$  中, 点  $z$  与其圈上的 2 个邻点的色集合分别是  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ , 则给  $z$  的悬挂边染 3 即可.

若图  $G$  是  $\beta$ -型双圈图.  $G$  只能由  $H_5$  连接悬挂边所得, 且悬挂边不可能同时在  $G$  的 2 个圈长都恒为  $1 \pmod{3}$  的圈上, 也不可能圈长为 3 的圈上, 有可能在路  $w_2 \cdots w_{t-2}$  ( $t \geq 4$ ) 上. 给  $G$  增加悬挂边, 使  $G$  的 3 条路的所有顶点都有悬挂边 (记该图为  $G_0$ ). 在定理 1 的  $H_5$  的 4-NSDPEC 的基础上, 给出  $G_0$  的一个 4-NSDPEC: 路  $u_2 \cdots u_{r-2}$  上的  $u_i$  ( $2 \leq i \leq r-2$ ) 的悬挂边染 4; 路  $v_2 \cdots v_{s-2}$  上的  $v_i$  ( $i \equiv 2 \pmod{3}$ ) 的悬挂边染 3, 其他点的悬挂边染 2; 路  $w_2 \cdots w_{t-2}$  上的  $w_i$  ( $2 \leq i \leq t-2$ ) 的悬挂边染 4.

现在去掉所有添加的悬挂边, 容易得到图  $G$  的一个 4-NSDPEC.

情形 2 有根树最大高度大于 1.

选树上具有最大高度的路, 其悬挂点为  $v$ .  $v$  的邻点  $w$  不在圈上,  $w$  仅有一个非悬挂邻点  $u$ . 反证法: 设  $G$  是一个极小反例, 即  $G$  是  $\Delta(G)=3$ , 且使  $|V(G)| + |E(G)|$  最小的不存在 4-NSDPEC 的图, 则  $G$  的任意真子图  $G'$  有一个 4-NSDPEC  $\varphi'$ . 令  $G' = G - wv$ , 下面在  $G'$  的基础上, 给边  $wv$  染色, 将  $\varphi'$  拓展为  $G$  的 4-NSDPEC  $\varphi$ .

若  $d_G(w) \neq d_G(u)$ , 则给边  $wv$  正常边染色就会使  $w$  与  $u$  邻点可区别. 又因为  $d_G(w) \leq 3$ ,  $d_{G'}(w) \leq 2$ , 故在  $\varphi'$  下,  $w$  至少有 2 色未表现, 总有一种色给  $wv$ , 使得  $w$  与  $u$  邻和可区别, 得到  $G$  的一个 4-NSDPEC. 与  $G$  是极小反例矛盾.

若  $d_G(w) = d_G(u) = 2$ , 则给边  $wv$  染上  $G'$  中点  $u$  未表现的色, 即可使得  $w$  与  $u$  邻和可区别, 得到  $G$  的一个 4-NSDPEC. 与  $G$  是极小反例矛盾.

综上所述, 定理 2 成立.

**定理 3** 若图  $G$  是  $\gamma$ -型双圈图, 则

$$\chi'_s(G) = \begin{cases} 3 & G_\Delta = \emptyset \\ 4 & G_\Delta \neq \emptyset \end{cases}$$

**证** 记图  $G_i$  是在  $H_i$  的基础上连接有根树得到的双圈图, 因为  $\Delta(G)=3$ , 故  $i \neq 3$ .

情形 1 有根树最大高度为 1.

情形 1.1 若  $G_\Delta = \emptyset$ , 则  $G = G_1, G_5$ . 由引理 1 知  $\chi'_s(G) \geq 3$ , 下面给出图  $G$  的一个 3-NSDPEC.

当  $G = G_1$  时, 根据图  $H_1$  的 3 条路的路长, 分以下几种情况讨论:

1) 若  $H_1$  的 3 条路的路长是表 1 中除  $r, s \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $t \equiv 0 \pmod{3}$  或  $r, s \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $t \equiv 2 \pmod{3}$  之

外的 8 种情况,则在定理 1 中  $H_1$  的 3-NSDPEC 的基础上,给  $G$  所有悬挂边正常边染色,使  $G$  中所有 3 度点的色集合都是  $\{1, 2, 3\}$ ,即得到  $G$  的一个 3-NSDPEC.

2) 若  $H_1$  的 3 条路的路长是  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 0(\pmod{3})$  的情况. 图  $G$  的悬挂点可以在  $P_1, P_2$  或  $P_3$  上.

若  $P_1$  的点  $u_j (j \neq 2, r-1)$  上存在悬挂点,记其中一个悬挂点为  $v$ . 给边  $xu_1, u_1u_2, \dots, u_{j-1}u_j, u_jv, u_ju_{j+1}, \dots, u_{r-1}y$  染  $(132)^{\frac{r-1}{3}} 13, P_2$  染  $(231)^{\frac{s-1}{3}} 2, P_3$  染  $(321)^{\frac{t}{3}}$ , 则  $S(y) = S(x) = \{1, 2, 3\}$ . 若 3 条路还存在其他悬挂边,则给其正常边染色,使  $G$  所有 3 度点的色集合都是  $\{1, 2, 3\}$ ,即得到  $G$  的一个 3-NSDPEC.

若  $P_2$  的点  $v_j (j \neq 2, s-1)$  上存在悬挂点,记其中一个悬挂点为  $v$ . 给  $P_1$  染  $(132)^{\frac{r-1}{3}} 1$ , 边  $xv_1, v_1v_2, \dots, v_{j-1}v_j, v_jv, v_jv_{j+1}, \dots, v_{s-1}y$  染  $(231)^{\frac{s-1}{3}} 23, P_3$  染  $(312)^{\frac{t}{3}}$ , 则  $S(y) = S(x) = \{1, 2, 3\}$ . 若 3 条路还存在其他悬挂边,则给其正常边染色,使  $G$  所有 3 度点的色集合都是  $\{1, 2, 3\}$ ,即得到  $G$  的一个 3-NSDPEC.

若  $P_3$  的点  $w_j (j \neq 2, t-1)$  上存在悬挂点,记其中一个悬挂点为  $v$ . 给  $P_1$  染  $(132)^{\frac{r-1}{3}} 1, P_2$  染  $(231)^{\frac{s-1}{3}} 2$ , 边  $xw_1, w_1w_2, \dots, w_{j-1}w_j, w_jv, w_jw_{j+1}, \dots, w_{t-1}y$  染  $(312)^{\frac{t}{3}} 3$ , 则  $S(y) = S(x) = \{1, 2, 3\}$ . 若 3 条路上还存在其他悬挂边,则给其正常边染色,使  $G$  所有 3 度点的色集合都是  $\{1, 2, 3\}$ ,即得到  $G$  的一个 3-NSDPEC.

3) 若图  $H_1$  的 3 条路的路长是  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 2(\pmod{3})$  的情况,证明方法与  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 0(\pmod{3})$  的情况类似.

当  $G = G_5$  时,方法与  $G = G_1$  时类似.

情形 1.2 若  $G_\Delta \neq \emptyset$ , 则  $G = G_1, G_2, G_4, G_5$ . 由引理 1 得  $\chi'_s(G) \geq 4$ . 给图  $G$  增加悬挂边,使得图  $G$  上的点,除悬挂点外,都是 3 度点(记该图为  $G'_i (i=1, 2, 4, 5)$ ). 下面在定理 1 中  $H_i (i=1, 2, 4, 5)$  的邻和可区别边染色的基础上,给出图  $G'_i (i=1, 2, 4, 5)$  的一个 4-NSDPEC:

给出图  $G'_1$  的一个 4-NSDPEC:

1) 当  $H_1$  是表 1 中除  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 0(\pmod{3})$  或  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 2(\pmod{3})$  外的 8 种情况时,则给  $G'_1$  的所有悬挂边染 4.

2) 当  $H_1$  是  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 0(\pmod{3})$  情况时,给  $P_1$  上的  $u_{r-1}$  的悬挂边染 3, 其他点的悬挂边染 4. 给  $P_2$  上的  $v_{s-1}$  的悬挂边染 3, 点  $v_i (i \equiv 2(\pmod{3}))$  的悬挂边染 2, 其他点的悬挂边染 4. 给  $P_3$  上的  $w_{t-1}$  的悬挂边染 3, 其他点的悬挂边染 4.

3) 当  $H_1$  是  $r, s \equiv 1(\pmod{3}), t \equiv 2(\pmod{3})$  的情况时,给  $w_{t-1}$  的悬挂边染 2,  $v_{s-1}$  的悬挂边染 1, 其他悬挂边染 4.

去掉所有添加的悬挂边,即得到  $G_1$  的一个 4-NSDPEC.

给出图  $G'_2$  的一个 4-NSDPEC: 先看路  $xu_1u_2 \dots u_{r-1}y$ . 当  $r \equiv 2(\pmod{3})$  时,给  $u_1, \dots, u_{r-2}$  的悬挂边依次循环染 3, 4, 4,  $u_{r-1}$  的悬挂边染 1. 特别地,当  $r = 2$  时,  $u_1$  的悬挂边染 1. 当  $r \not\equiv 2(\pmod{3})$  时,给  $u_1, \dots, u_{r-2}$  的悬挂边依次循环染 3, 4, 4,  $u_{r-1}$  的悬挂边染 2. 再看路  $xv_1 \dots v_{s-1}y$ . 当  $s \equiv 2(\pmod{3})$  时,给  $v_1$  的悬挂边染 2, 点  $v_{s-1}, \dots, v_2$  的悬挂边依次循环染 3, 4, 4. 特别地,当  $s = 2$  时,  $v_1$  的悬挂边染 2. 当  $s \not\equiv 2(\pmod{3})$  时,给  $v_1$  的悬挂边染 1, 点  $v_{s-1}, \dots, v_2$  的悬挂边依次循环染 3, 4, 4.

去掉所有添加的悬挂边,即得到  $G_2$  的一个 4-NSDPEC. 若  $G = G_4$  或  $G = G_5$ , 染法类似.

情形 2 有根树的最大高度大于 1. 当  $G_\Delta = \emptyset$  时,  $\chi'_s(G) \geq 3$ ; 当  $G_\Delta \neq \emptyset$  时,  $\chi'_s(G) \geq 4$ . 反证法: 设  $G$  是一个极小反例,即  $G$  是  $\Delta(G) = 3$ , 且使  $|V(G)| + |E(G)|$  最小的不存在  $s$ -NSDPEC 的图,  $G$  的任何真子图  $G'$  有一个  $s$ -NSDPEC  $\varphi'$ . 其中

$$s = \begin{cases} 3 & G_\Delta = \emptyset \\ 4 & G_\Delta \neq \emptyset \end{cases}$$

选树上有最大高度的路, 其悬挂点为  $v$ .  $v$  的邻点  $w$  不在圈上,  $w$  仅有一个非悬挂邻点  $u$ . 令  $G' = G - wv$ , 下面在  $G'$  的基础上, 给  $wv$  染色, 将  $\varphi'$  拓展为  $G$  的  $s$ -NSDPEC  $\varphi$ .

情形 2.1 若  $G_\Delta = \emptyset$ , 则  $\chi'_s(G) \geq 3$ .  
当  $d_G(w) \neq d_G(u)$  时, 若  $d_G(w) = 3$ , 则给  $wv$  正常边染色, 必有  $f_\varphi(w) \neq f_\varphi(u)$ ; 若  $d_G(w) = 2$ , 则  $d_G(u) = 1$ , 在  $G'$  中  $w$  有 2 色未表现, 故总有 1 色给  $wv$ , 使得  $f_\varphi(w) \neq f_\varphi(u)$ , 从而得到图  $G$  的一个 3-NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

当  $d_G(w) = d_G(u)$  时, 给  $wv$  染上  $u$  未在  $G'$  表现的色, 即得到  $G$  的一个 3-NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

情形 2.2 若  $G_\Delta \neq \emptyset$ , 则  $\chi'_s(G) \geq 4$ .  
当  $d_G(w) \neq d_G(u)$  时, 因  $d_G(w) \leq 3$ ,  $d_{G'}(w) \leq 2$ , 则在  $G'$  中  $w$  至少有 2 色未表现, 则总有 1 色给  $wv$ , 使得  $f_\varphi(w) \neq f_\varphi(u)$ , 从而得到  $G$  的一个 4-NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.  
当  $d_G(w) = d_G(u)$ , 且  $\varphi'$  的点  $w$  表现的色都在  $u$  上表现时, 则给  $wv$  染上  $u$  未在  $G'$  中表现的色, 即可得到图  $G$  的一个 4-NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

当  $d_G(w) = d_G(u)$ , 且  $\varphi'$  的点  $w$  表现的某色没在  $u$  上表现时, 由于  $d_G(w) \leq 3$ ,  $d_{G'}(w) \leq 2$ , 则在  $G'$  中  $w$  至少有 2 色未表现, 总有 1 色给  $wv$ , 使得  $f_\varphi(w) \neq f_\varphi(u)$ , 从而得到  $G$  的一个 4-NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

综上所述, 定理 3 成立.

**定理 4** 若图  $G$  是  $\Delta(G) \geq 4$  的, 且有根树最大高度大于 0 的双圈图, 则

$$\chi'_s(G) = \begin{cases} \Delta(G) & G_\Delta = \emptyset \\ \Delta(G) + 1 & G_\Delta \neq \emptyset \end{cases}$$

**证** 记图  $G_i$  是在  $H_i (1 \leq i \leq 5)$  的基础上连接有根树得到的双圈图.

情形 1 若有根树的最大高度为 1, 则根据有根树的位置和圈上相邻点的度分 3 种情况讨论.  
情形 1.1 图  $H$  上所有 2 度点  $z$  在图  $G$  中的度也为 2, 即  $d_H(z) = d_G(z) = 2$ . 则悬挂边只能在  $x$  或  $y$  处. 不妨设  $d_G(x) = k$ ,  $d_G(y) = l$ , 且  $k \geq l \geq 1$ .

若  $G = G_1$ , 则  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G) = k + 3$ . 由于  $G$  中的  $H_1$  有 4-NSDPEC, 则与点  $y$  相邻的 2 度点的色集合的所有元素之和范围是  $3 \sim 7$ . 显然  $d_G(y) \geq 3$ . 当  $d_G(y) = 3$  时,  $G$  中  $y$  与  $y$  的邻点一定邻和可区别; 当  $d_G(y) \geq 4$  时,  $f(y) \geq 10$ , 则对  $y$  的悬挂边正常边染色就能使  $y$  与  $y$  的邻点邻和可区别.

又因为  $k \geq l \geq 1$ , 故  $d_G(x) = \Delta(G)$ , 则对点  $x$  的所有悬挂边正常边染色就能使得点  $x$  与  $x$  的邻点邻和可区别, 即得到图  $G$  的一个  $\Delta(G)$ -NSDPEC.

当  $G = G_i (2 \leq i \leq 5)$  时, 方法与  $G = G_1$  类似.

情形 1.2 图  $H$  上存在 2 度点  $z$ , 使得  $d_H(z) = 2$  且  $d_G(z) \geq 3$ , 且对任意满足该条件的点  $z$ , 有  $d_G(z) = d_G(z') = d_G(z'')$ . 其中  $z', z''$  是  $z$  在  $H$  上的 2 个邻点.

由于  $G_\Delta \neq \emptyset$ , 故  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G) + 1$ . 反证法: 设  $G$  是一个极小反例,  $G$  的任何真子图  $G'$  都有一个  $(\Delta(G) + 1)$ -NSDPEC. 所有满足情形 1.2 的双圈图  $G$  都有结构 1 (如图 2(a) 所示), 且  $\Delta(G) = k + 2$ .



图 2 满足情形 1.2 与情形 1.3(2) 的双圈图的基本结构

令  $G' = G - zz_1 - zz_2$ , 对  $zz_1, zz_2$  重新染色  $x_1, x_2$ .  $f'(z)$  表示在  $G'$  中  $z$  的色集合的所有元素的加和. 边  $zz_1, zz_2$  可用颜色集分别为  $S_1, S_2$ , 由正常边染色的条件得

$$|S_1| = |S_2| = (\Delta(G) + 1) - (\Delta(G) - 2) = 3$$

再由邻和可区别边染色的条件得

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + f'(z) - f(z'))(x_1 + x_2 + f'(z) - f(z''))$$

去掉  $Q(x_1, x_2)$  的常数得  $Q'(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 = x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - x_2^3$ . 因  $x_1^2x_2$  的系数为  $1 \neq 0$ , 由引理 3, 可在  $S_1, S_2$  中选取  $x_1, x_2$ , 即得到  $G$  的一个  $(\Delta(G) + 1)$ -NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

情形 1.3 图  $H$  上存在一个 2 度点  $z$ , 使得  $d_H(z) = 2$  且  $d_G(z) \geq 3$ , 且  $d_G(z) \neq d_G(z')$ . 其中  $z', z''$  是点  $z$  在  $H$  上的 2 个邻点.

若  $G_\Delta = \emptyset$ , 则  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G)$ . 反证法: 设  $G$  是一个极小反例, 则  $G$  的任何真子图  $G'$  都有一个  $\Delta(G)$ -NSDPEC.

1) 当  $H = H_3$ ,  $\Delta(G) = 4$ , 且  $x$  是  $G$  的唯一最大度点时. 令  $G' = G - zv$ ,  $zv$  是悬挂边. 因 3 度点  $z$  与其邻点仅有  $1 + 2 + 3 = 2 + 4$ ,  $1 + 2 + 4 = 3 + 4$  邻和相等的情况. 故  $z$  与  $z', z''$  的公共边染 2, 4, 导致  $z$  最多与一个 2 度点邻和相等. 在  $G'$  的 4-NSDPEC 的基础上,  $zv$  有 2 色未表现, 则总存在 1 色给  $zv$ , 得到  $G$  的一个 4-NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

2) 其他情况时, 令  $G$  的最大度点为  $u$ ,  $uv$  是悬挂边. 令  $G' = G - uv$ , 对  $uv$  正常边染色即得到  $G$  的一个  $\Delta(G)$ -NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

若  $G_\Delta \neq \emptyset$ , 则  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G) + 1$ . 反证法: 设  $G$  是一个极小反例, 则  $G$  的任何真子图  $G'$  都有一个  $(\Delta(G) + 1)$ -NSDPEC. 由于  $G_\Delta \neq \emptyset$ , 当  $G$  有 1 个最大度点在  $H$  的 2 度点上时, 则  $G$  一定有结构 1, 证明方法如情形 1.2. 当  $G$  中最大度点都不在  $H$  的 2 度点上时, 即最大度点只能同时在  $x, y$  处. 且圈上一定存在点  $u (u \neq x, y)$ , 使得  $3 \leq d_G(u) \leq \Delta(G) - 1$ .  $G$  一定有结构 2 (如图 2(b) 所示).

令  $G' = G - uu_1$ , 则对  $uu_1$  重新染色  $x_1$ . 记  $uu_1$  可用颜色集为  $S_1$ . 由正常边染色的条件得

$$|S_1| = (\Delta(G) + 1) - (d_G(u) - 1) \geq (\Delta(G) + 1) - (\Delta(G) - 2) = 3$$

再由邻和可区别边染色的条件得

$$Q(x_1) = (x_1 + f'(u) - f(u'))(x_1 + f'(u) - f(u''))$$

去掉  $Q(x_1)$  的常数得到另一个多项式:  $Q'(x_1) = x_1^2$ .

由于  $x_1^2$  的系数为  $1 \neq 0$ , 则可在  $S_1$  中选取满足邻和可区别边染色条件的  $x_1$ , 得到图  $G$  的一个  $(\Delta(G) + 1)$ -NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

情形 2 有根树的最大高度大于 1.

当  $G_\Delta = \emptyset$  时,  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G)$ ; 当  $G_\Delta \neq \emptyset$  时,  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G) + 1$ . 反证法: 设  $G$  是一个极小反例, 即  $G$  是使  $|V(G)| + |E(G)|$  最小的不存在  $s$ -NSDPEC 的图,  $G$  的任何真子图  $G'$  有一个  $s$ -NSDPEC  $\varphi'$ . 其中

$$s = \begin{cases} \Delta(G) & G_\Delta = \emptyset \\ \Delta(G) + 1 & G_\Delta \neq \emptyset \end{cases}$$

选树上具有最大高度的路, 其悬挂点为  $v$ . 点  $v$  的邻点  $w$  不在圈上, 且  $w$  仅有 1 个非悬挂邻点  $u$ . 令  $G' = G - wv$ , 下面在  $G'$  的基础上, 给边  $wv$  染色, 将  $\varphi'$  拓展为  $G$  的  $s$ -NSDPEC  $\varphi$ .

情形 2.1 若  $G_\Delta = \emptyset$ , 则  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G)$ . 下面分 3 种情况去证明图  $G$  有  $\Delta(G)$ -NSDPEC.

当  $d_G(w) \neq d_G(u)$  时, 给  $wv$  正常边染色可使  $S_\varphi(w) \neq S_\varphi(u)$ . 故给  $wv$  染色时, 只需考虑  $f_\varphi(w)$  与  $f_\varphi(u)$  是否相等. 若  $d_G(w) = \Delta(G)$ , 给  $wv$  正常边染色, 必有  $f_\varphi(w) \neq f_\varphi(u)$ ; 若  $d_G(w) \leq \Delta(G) - 1$ ,

则  $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 2$ , 即在  $G'$  中  $w$  至少有 2 色未表现, 且最多有 1 色给  $wv$ , 使得  $f_\varphi(w) = f_\varphi(u)$ . 故总有 1 色给  $wv$ , 使得  $w$  与  $u$  邻和可区别, 从而得到  $G$  的一个  $\Delta(G)$ -NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

当  $d_G(w) = d_G(u)$ , 且  $\varphi'$  的点  $w$  表现的色都在  $u$  上表现时, 给边  $wv$  染上点  $u$  未在  $\varphi'$  中表现的色, 即可得到图  $G$  的一个  $\Delta(G)$ -NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

当  $d_G(w) = d_G(u)$ , 且  $\varphi'$  的点  $w$  表现的某色未在  $u$  上表现时, 由于  $d_G(w) \leq \Delta(G) - 1$ , 则  $d_{G'}(w) \leq \Delta(G) - 2$ , 即在  $G'$  中  $w$  至少有 2 色未表现, 且最多有 1 色给  $wv$ , 使得  $f_\varphi(w) = f_\varphi(u)$ . 故总有 1 色给  $wv$ , 使得  $w$  与  $u$  邻和可区别, 从而得到  $G$  的一个  $\Delta(G)$ -NSDPEC. 与  $G$  是最小反例矛盾.

情形 2.2 若  $G_\Delta \neq \emptyset$ , 则  $\chi'_s(G) \geq \Delta(G) + 1$ . 证明图  $G$  有  $(\Delta(G) + 1)$ -NSDPEC 时, 证明思路分 3 种:  $d_G(w) \neq d_G(u)$ ;  $d_G(w) = d_G(u)$  且  $\varphi'$  的点  $w$  表现的色都在点  $u$  上表现;  $d_G(w) = d_G(u)$  且  $\varphi'$  的点  $w$  表现的某种色没有在点  $u$  上表现. 详细过程与情形 2.1 类似.

综上所述, 定理 4 成立.

## 参考文献:

- [1] FLANDRIN E, MARCZYK A, PRZYBYLO J, et al. Neighbor Sum Distinguishing Index [J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29(5): 1329-1336.
- [2] CHEN X E, LIU S Y. Adjacent Vertex Distinguishing Proper Edge Colorings of Bicyclic Graphs [J]. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2018, 48(4): 401-411.
- [3] 潘文华, 徐常青. 无  $K_4$ -因子式的图的邻和可区别边染色 [J]. 数学进展, 2017, 46(6): 839-847.
- [4] 杨笑蕊, 强会英, 李雨虹. 两类冠图的邻和可区别全染色 [J]. 兰州交通大学学报, 2019, 38(5): 114-117.
- [5] 朱海洋, 王淑玲, 刘嫚, 等. 平面图的单射染色 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(4): 7-13.
- [6] 王文杰, 黄丽娜, 李沐春.  $T$ -型六角系统的点可区别边染色 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(10): 77-82.
- [7] 谭钧铭, 强会英, 王洪申. 单圈图的邻和可区别边染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(2): 78-83, 91.
- [8] 霍京京. 图的邻点及邻和可区别染色 [D]. 苏州: 苏州大学, 2017.
- [9] 陈祥恩, 张爽, 李泽鹏.  $K_{2,4,p}$  的点可区别 IE-全染色 [J]. 电子与信息学报, 2020, 42(12): 2999-3004.
- [10] 林育青. 一类图的邻点可区别全染色 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(20): 263-271.
- [11] 姚京京. 图的邻和可区别染色 [D]. 天津: 河北工业大学, 2015.
- [12] 谭钧铭, 强会英, 姚丽. 路和圈的广义 Mycielski 图的邻和可区别全染色 [J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2021, 20(1): 1-5.
- [13] 李红杰. 简单图的邻和可区别边染色 [D]. 济南: 山东大学, 2016.
- [14] 尚华辉, 闫晓芳, 苗连英. 关于双圈图的动态色数 [J]. 太原理工大学学报, 2018, 49(4): 642-644.
- [15] 田双亮, 杨环, 杨青, 等. 路的联的邻和可区别边染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(9): 29-35.
- [16] DING L H, WANG G H, YAN G Y. Neighbor Sum Distinguishing Total Colorings Via the Combinatorial Nullstellensatz [J]. Science China Mathematics, 2014, 57(9): 1875-1882.

责任编辑 廖坤