第 44 卷第 6 期　　西 南 大 学 学 报(自然科学版)　　2022 年 6 月
Vol. 44　No. 6　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jun.　2022

DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2022.06.010

一类分数阶 p-q 型临界椭圆边值问题的非平凡解

张爱旎，　邓志颖

重庆邮电大学 理学院，重庆 400065

摘要：讨论了一类分数阶 p-q 型临界椭圆边值问题，应用山路引理，证得了该问题在适当条件下非平凡解的存在性.

关　键　词：非平凡解；Sobolev 临界指数；山路引理

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2022)06-0088-06

开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

On Nontrivial Solutions for a Fractional Elliptic System Involving p-q-Laplacian and Critical Exponent

ZHANG Aini，　DENG Zhiying

School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract: This paper is dedicated to study a fractional elliptic system involving p-q-Laplacian and critical exponent. We obtain a nontrivial solution under the proper conditions by using the mountain pass theorem.

Key words: nontrivial solution; Sobolev critical exponent; mountain pass theorem

本文讨论含有 Sobolev 临界指数项的分数阶 p-q 型椭圆系统

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u+(-\Delta)_q^s u=a(x)|u|^{r-2}u+\dfrac{1}{p_s^*}H_u(u,v) & x\in\Omega \\ (-\Delta)_p^s v+(-\Delta)_q^s v=b(x)|v|^{r-2}v+\dfrac{1}{p_s^*}H_v(u,v) & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为有界光滑区域，$0<s<1$，$1<q<p<\dfrac{N}{s}$，$1<r<p_s^*$，$p_s^*=\dfrac{Np}{N-ps}$ 为分数阶 Sobolev 临界指数，$H\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}_+)$ 是 p_s^* 齐次函数，H_u，H_v 分别是 H 对 u 和 v 的偏导数，$(H_u,H_v)=\nabla H$. 设 $m>1$，$(-\Delta)_m^s$ 为分数阶 m-Laplace 算子，定义为

$$(-\Delta)_m^s u(x)=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_\varepsilon(x)}\frac{|u(y)-u(x)|^{m-2}(u(y)-u(x))}{|x-y|^{N+ms}}\mathrm{d}y \qquad x\in\mathbb{R}^N$$

形如方程组(1)的分数阶椭圆边值问题具有很强的物理背景和广阔的应用前景，广泛应用于诸多领域，例

收稿日期：2021-10-11

基金项目：国家自然科学基金项目(11971339)；重庆邮电大学金课建设基金项目(XJKXX20201-15).

作者简介：张爱旎，硕士研究生，主要从事非线性椭圆边值问题的研究.

如反常扩散问题、极小曲面问题、最优化问题、相变问题等[1-2].

近年来，p-q 型临界椭圆边值问题受到了学者们的广泛关注. 例如文献[3] 讨论了 p-q 型椭圆耦合系统

$$\begin{cases} -\Delta_p u-\Delta_q u=\lambda\,|u|^{r-2}u+\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u\,|v|^{\beta} & x\in\Omega \\ -\Delta_p v-\Delta_q v=\theta\,|v|^{r-2}v+\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}\,|v|^{\beta-2}v & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是包含原点的有界光滑区域，$1<q<p<r<p^*$，$\lambda,\theta>0$，$\alpha,\beta>1$ 满足 $\alpha+\beta=p^*$，p^* 是 Sobolev 临界指数. 应用山路引理和 Lusternik-Schnirelmann(简称 LS) 畴数理论，得到了在一定条件下问题(2) 至少存在 cat(Ω) 个正解. 有关带有临界指数项的结论还可参见文献[4-10].

近年来，分数阶临界椭圆边值问题引起了人们的广泛兴趣，目前已获得了一定的研究成果[11-17]. 例如文献[14] 研究了分数阶 p-q 型椭圆耦合系统

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u+(-\Delta)_q^s u=\lambda\,|u|^{r-2}u+\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u\,|v|^{\beta} & x\in\Omega \\ (-\Delta)_p^s v+(-\Delta)_q^s v=\mu\,|v|^{r-2}v+\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}\,|v|^{\beta-2}v & x\in\Omega \\ u=v=0 & x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域，$0<s<1$，$1<r<q<p<\dfrac{N}{s}$，$\lambda,\mu>0$，$\alpha,\beta>1$ 满足 $\alpha+\beta=p_s^*$，p_s^* 是分数阶 Sobolev 临界指数. 应用形变引理以及 LS 畴数理论，证明了问题(3) 存在无穷多个解.

研究方程组(1) 的主要困难在于：一方面，方程组(1) 含有 Sobolev 临界指数项，使得对应的能量泛函失去紧性；另一方面，p-q 型方程没有 p-Laplace 方程的齐次性，从而通常的变分方法和分析技巧受到很大的限制. 本文应用山路引理克服了上述困难.

设 $a(x),b(x),H$ 满足下述条件：

(K_1) $a(x),b(x)>0$，$a(x),b(x)\in L^{\theta}(\Omega)$，$\theta=\dfrac{p_s^*}{p_s^*-r}$，并且

$$|a|_{\theta}=\left(\int_{\Omega}|a(x)|^{\theta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}}\qquad |b|_{\theta}=\left(\int_{\Omega}|b(x)|^{\theta}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

(K_2) $a_0=\inf\limits_{x\in\Omega}a(x)>0$，$b_0=\inf\limits_{x\in\Omega}b(x)>0$；

(H_1) H 是 p_s^* 齐次函数，满足

$$H(\eta\zeta,\eta\tau)=\eta^{p_s^*}H(\zeta,\tau)\qquad \forall\,\eta>0,(\zeta,\tau)\in\mathbb{R}^2$$

(H_2) $H(-\zeta,-\tau)=H(\zeta,\tau)$，$\forall(\zeta,\tau)\in\mathbb{R}^2$；

(H_3) $0<H_{\min}=\min\{H(\zeta,\tau):(\zeta,\tau)\in\mathbb{R}^2,|\zeta|^{p_s^*}+|\tau|^{p_s^*}=1\}$.

定理 1　设 $N>p^2s$，$1<q<p\leqslant\max\left\{p,\dfrac{Nq}{N-ps}\right\}<r<p_s^*$，如果条件($K_1$)—($K_2$)，($H_1$)—($H_3$)成立，则方程组(1) 至少存在一个非平凡解.

全文中，设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为有界光滑区域，$s\in(0,1)$，$p>1$，C,C_1 均代表正常数. 用 $X^{s,p}(\Omega)$ 表示通常的分数阶 Sobolev 空间，

$$X_0^{s,p}(\Omega)=\{u\in X^{s,p}(\Omega):u=0\ (\text{a.e. }x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega)\}$$

其范数定义为

$$\|u\|_{s,p}=\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}\backslash(\Omega^c\times\Omega^c)}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

设乘积空间

$$W_p=X_0^{s,p}(\Omega)\times X_0^{s,p}(\Omega)\qquad W_q=X_0^{s,q}(\Omega)\times X_0^{s,q}(\Omega)$$

这两个 Banach 空间的范数分别定义为

$$\|(u,v)\|_{s,p}=(\|u\|_{s,p}^{p}+\|v\|_{s,p}^{p})^{\frac{1}{p}} \qquad \|(u,v)\|_{s,q}=(\|u\|_{s,q}^{q}+\|v\|_{s,q}^{q})^{\frac{1}{q}}$$

令空间 $E=W_p\cap W_q$，赋以范数

$$\|(u,v)\|_{E}=\|(u,v)\|_{s,p}+\|(u,v)\|_{s,q}$$

下面我们定义分数阶 Sobolev 最佳临界常数

$$S=\inf_{u\in X_0^{s,p}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{s,p}^{p}}{\left(\int_{\Omega}|u|^{p_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_s^*}}} \tag{4}$$

$$S_H=\inf_{(u,v)\in E\setminus\{(0,0)\}}\frac{\|(u,v)\|_{s,p}^{p}}{\left(\int_{\Omega}H(u,v)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_s^*}}} \tag{5}$$

引理 1 如果条件$(H_1)-(H_3)$成立，则有 $S_H=\widetilde{H}_{\max}^{-1}S$.

证 该证明与文献[18]中引理 3.2 的证明类似.

现定义方程组(1)所对应的能量泛函 $J:E\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$J(u,v)=\frac{1}{p}\|(u,v)\|_{s,p}^{p}+\frac{1}{q}\|(u,v)\|_{s,q}^{q}-\frac{1}{r}\int_{\Omega}(a(x)|u|^{r}+b(x)|v|^{r})\mathrm{d}x-\frac{1}{p_s^*}\int_{\Omega}H(u,v)\mathrm{d}x \tag{6}$$

容易验证 $J(u,v)\in C^1(E,\mathbb{R})$，从而泛函 $J(u,v)$ 在 E 中的临界点对应于方程组(1)的弱解. 我们称$(u,v)\in E$ 是方程组(1)的弱解，当且仅当对 $\forall(\varphi,\psi)\in E$，都有

$$0=\langle J'(u,v),(\varphi,\psi)\rangle=A_{p,s}(u,\varphi)+A_{q,s}(u,\varphi)+A_{p,s}(v,\psi)+A_{q,s}(v,\psi)-\int_{\Omega}(a(x)|u|^{r-2}u\varphi+b(x)|v|^{r-2}v\psi)\mathrm{d}x-\frac{1}{p_s^*}\int_{\Omega}H_u(u,v)\varphi\mathrm{d}x-\frac{1}{p_s^*}\int_{\Omega}H_v(u,v)\psi\mathrm{d}x \tag{7}$$

其中

$$A_{p,s}(u,\varphi)=\int_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c\times\Omega^c)}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

引理 2 若$\{(u_n,v_n)\}\subset E$ 是 $J(u,v)$ 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，则$\{(u_n,v_n)\}$在 E 中有界.

证 若$\{(u_n,v_n)\}\subset E$ 是 $J(u,v)$ 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，则有

$$\begin{aligned}&C(1+\|(u_n,v_n)\|_E)\geqslant\\&J(u_n,v_n)-\frac{1}{r}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle=\\&\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|(u_n,v_n)\|_{s,p}^{p}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\|(u_n,v_n)\|_{s,q}^{q}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p_s^*}\right)\int_{\Omega}H(u_n,v_n)\mathrm{d}x\geqslant\\&\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|(u_n,v_n)\|_{s,p}^{p}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\|(u_n,v_n)\|_{s,q}^{q}\end{aligned} \tag{8}$$

应用反证法，假设当 $n\to\infty$ 时，有 $\|(u_n,v_n)\|_E\to\infty$. 下面将分 3 种情况进行讨论：

情形 1 $\|(u_n,v_n)\|_{s,p}\to\infty$，$\|(u_n,v_n)\|_{s,q}\to\infty$. 当 n 足够大时，有 $\|(u_n,v_n)\|_{s,p}^{p-q}\geqslant 1$ 且 $\|(u_n,v_n)\|_{s,p}^{p}\geqslant\|(u_n,v_n)\|_{s,p}^{q}$. 由不等式$(a+b)^q\leqslant C_q(a^q+b^q)$和(8)式，可知

$$\begin{aligned}C(1+\|(u_n,v_n)\|_E)&\geqslant\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{r},\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right\}(\|(u_n,v_n)\|_{s,p}^{q}+\|(u_n,v_n)\|_{s,q}^{q})\geqslant\\&\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{r},\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right\}C_q^{-1}(\|(u_n,v_n)\|_{s,p}+\|(u_n,v_n)\|_{s,q})^{q}=\\&\min\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{r},\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right\}C_q^{-1}\|(u_n,v_n)\|_{E}^{q}\end{aligned}$$

由此可知 $\|(u_n,v_n)\|_E$ 有界，矛盾.

情形 2　$\|(u_n, v_n)\|_{s,p}$ 有界，$\|(u_n, v_n)\|_{s,q}\to\infty$. 根据(8)式，可知

$$C(1+\|(u_n, v_n)\|_{s,p}+\|(u_n, v_n)\|_{s,q})\geqslant\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q}$$

从而可知

$$C\left(\frac{1}{\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q}}+\frac{\|(u_n, v_n)\|_{s,p}}{\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q}}+\frac{1}{\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q-1}}\right)\geqslant\frac{1}{q}-\frac{1}{r}$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $0\geqslant\frac{1}{q}-\frac{1}{r}>0$，矛盾.

情形 3　$\|(u_n, v_n)\|_{s,p}\to\infty$，$\|(u_n, v_n)\|_{s,q}$ 有界. 与情形 2 同理，矛盾.

引理 3　若$\{(u_n, v_n)\}\subset E$ 是 $J(u, v)$ 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，且在 E 中有$(u_n, v_n)\rightharpoonup(u, v)$，则有 $J'(u, v)=0$ 和 $J(u, v)>0$.

证　由文献[11]的引理 3.3 可知，$J'(u, v)=0$，即

$$\int_\Omega(a(x)|u|^r+b(x)|v|^r)\mathrm{d}x=\|(u, v)\|_{s,p}^{p}+\|(u, v)\|_{s,q}^{q}-\int_\Omega H(u, v)\mathrm{d}x \tag{9}$$

由于 $q<p<r<p_s^*$，故

$$J(u, v)=J(u, v)-\frac{1}{r}\langle J'(u, v), (u, v)\rangle=$$

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\|(u, v)\|_{s,p}^{p}+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\|(u, v)\|_{s,q}^{q}+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p_s^*}\right)\int_\Omega H(u, v)\mathrm{d}x>0$$

引理 4　设 $1<q<p<r<p_s^*$，如果

$$-\infty<c<\frac{s}{N}S_H^{\frac{N}{p_s}} \tag{10}$$

成立，那么泛函 J 在 E 中满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　设$\{(u_n, v_n)\}\subset E$ 是 $J(u, v)$ 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，即满足

$$\frac{1}{p}\|(u_n, v_n)\|_{s,p}^{p}+\frac{1}{q}\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q}-\frac{1}{r}\int_\Omega(a(x)|u_n|^r+b(x)|v_n|^r)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{p_s^*}\int_\Omega H(u_n, v_n)\mathrm{d}x=c+o(1) \tag{11}$$

$$\|(u_n, v_n)\|_{s,p}^{p}+\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q}-\int_\Omega(a(x)|u_n|^r+b(x)|v_n|^r)\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega H(u_n, v_n)\mathrm{d}x=o(1)\|(u_n, v_n)\|_{s,p} \tag{12}$$

由引理 2 和引理 3 可知，$\{(u_n, v_n)\}$ 在 E 中有界，从而$\{(u_n, v_n)\}$存在子列(仍记为$\{(u_n, v_n)\}$)，在 E 中有$(u_n, v_n)\rightharpoonup(u, v)$，且$(u, v)$ 是 $J(u, v)$ 的一个临界点. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$u_n\rightharpoonup u, \ v_n\rightharpoonup v \qquad x\in X_0^{s,p}(\Omega)$$
$$u_n\to u, \ v_n\to v \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^N$$
$$u_n\to u, \ v_n\to v \qquad x\in L^t(\Omega),\ 1\leqslant t<p_s^*$$

并且当 $n\to\infty$ 时，由 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$\int_\Omega(a(x)|u_n|^r+b(x)|v_n|^r)\mathrm{d}x\to\int_\Omega(a(x)|u|^r+b(x)|v|^r)\mathrm{d}x$$

现设$(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)=(u_n-u, v_n-v)$，应用 Brezis-Lieb 引理[19]，有

$$\|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,p}^{p}=\|(u_n, v_n)\|_{s,p}^{p}-\|(u, v)\|_{s,p}^{p}+o(1) \tag{13}$$

$$\|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,q}^{q}=\|(u_n, v_n)\|_{s,q}^{q}-\|(u, v)\|_{s,q}^{q}+o(1) \tag{14}$$

和

$$\int_\Omega H(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\mathrm{d}x=\int_\Omega H(u_n, v_n)\mathrm{d}x-\int_\Omega H(u, v)\mathrm{d}x+o(1) \tag{15}$$

同时，对任意的$(\varphi, \psi) \in E$，若有

$$\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n, v_n), (\varphi, \psi)\rangle = \langle J'(u, v), (\varphi, \psi)\rangle = 0$$

那么$(u, v) \in E$是方程组(1)的弱解，将(13)-(15)式代入(11)和(12)式，可得

$$\frac{1}{p}\|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,p}^{p} + \frac{1}{q}\|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,q}^{q} - \frac{1}{p_s^*}\int_\Omega H(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\mathrm{d}x = c - J(u, v) + o(1) \tag{16}$$

$$\|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,p}^{p} + \|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,q}^{q} = \int_\Omega H(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\mathrm{d}x + o(1) \tag{17}$$

不失一般性，设

$$\|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,p}^{p} = a + o(1) \qquad \|(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\|_{s,q}^{q} = b + o(1)$$

$$\int_\Omega H(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)\mathrm{d}x = l + o(1)$$

由(5)和(17)式可知

$$a \geqslant S_H l^{\frac{p}{p_s^*}} \geqslant S_H a^{\frac{p}{p_s^*}} \tag{18}$$

当$a=0$时，显然引理4成立．现假设$a>0$，由(18)式可得$a \geqslant S_H^{\frac{N}{p_s}}$．结合(17)，(18)式以及$J(u, v)>0$，当$n\to\infty$时，有

$$c = \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b - \frac{l}{p_s^*} + J(u, v) \geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_s^*}\right)a \geqslant \frac{s}{N}S_H^{\frac{N}{p_s}}$$

这与(10)式矛盾，由此可知$a=0$，在E中有$(u_n, v_n)\to(u, v)$，引理4得证．

引理5 设$N > p^2 s$，$1<q<p\leqslant \max\left\{p, \frac{Nq}{N-ps}\right\}<r<p_s^*$，如果条件$(\mathrm{K}_1)$-$(\mathrm{K}_2)$，$(\mathrm{H}_1)$成立，则存在$(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\in E$，使得

$$\sup_{t\geqslant 0} J(t\bar{u}_0, t\bar{v}_0) < \frac{s}{N}S_H^{\frac{N}{p_s}}$$

证 证明与文献[15]中引理4.1、引理4.2、定理1.2的证明类似．

引理6 设$1<q<p<r<p_s^*$，如果条件(K_1)成立，则有：

(ⅰ) $J(0, 0)=0$，存在常数$\rho>0$，使得对所有满足$\|(u, v)\|_{s,p}=\rho$的$(u, v)\in E$，都有$J(u, v)\geqslant\beta>0$成立；

(ⅱ) 存在$(u_0, v_0)\in E$，满足$\|(u_0, v_0)\|_{s,p}>\rho$，使得$J(u_0, v_0)<0$．

证 (ⅰ) 显然$J(0, 0)=0$成立．由(5)和(17)式可知

$$J(u, v) \geqslant \frac{1}{p}\|(u, v)\|_{s,p}^{p} - \frac{1}{r}\int_\Omega (a(x)|u|^r + b(x)|v|^r)\mathrm{d}x - \frac{1}{p_s^*}\int_\Omega H(u, v)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{p}\|(u, v)\|_{s,p}^{p} - \frac{1}{r}\left(|a|_\theta^{\frac{p}{p-r}} + |b|_\theta^{\frac{p}{p-r}}\right)^{\frac{p-r}{p}} S^{-\frac{r}{p}}\|(u, v)\|_{s,p}^{r} - \frac{1}{p_s^*}S_H^{-\frac{p_s^*}{p}}\|(u, v)\|_{s,p}^{p_s^*}$$

因此，存在常数$\rho, \beta>0$，使得对所有满足$\|(u, v)\|_{s,p}=\rho$的(u, v)，都有$J(u, v)\geqslant\beta$成立．

(ⅱ) 固定$(u, v)\in E$，且$u_+\neq 0$，$v_+\neq 0$，可得

$$J(tu, tv) = \frac{t^p}{p}\|(u, v)\|_{s,p}^{p} + \frac{t^q}{q}\|(u, v)\|_{s,q}^{q} - \frac{t^r}{r}\int_\Omega (a(x)|u|^r + b(x)|v|^r)\mathrm{d}x -$$

$$\frac{t^{p_s^*}}{p_s^*}\int_\Omega H(u, v)\mathrm{d}x$$

当$t\to\infty$时，$J(tu, tv)\to-\infty$，因此存在$t_0>0$，使得当$\|(t_0u, t_0v)\|_{s,p}>\rho$时，有$J(t_0u, t_0v)<0$．令$(u_0, v_0)=(t_0u, t_0v)$，则有(ⅱ)成立．

定理1的证明 设$c_1 = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$，其中$\Gamma$是$E$中联结0与$e$的道路的集合，即

$$\Gamma = \{\gamma\in C([0, 1], E): \gamma(0)=0, \gamma(1)=e\}$$

由山路引理可知，存在序列$\{(u_n, v_n)\} \subset E$，使得 $J(u_n, v_n) \to c_1 \geqslant \beta$，$J'(u_n, v_n) \to 0 (n \to \infty)$．$(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ 由引理 5 给出，结合引理 6，可得

$$0 < \beta \leqslant c_1 \leqslant \sup_{t \in [0, 1]} J(tt_0 \bar{u}_0, tt_0 \bar{v}_0) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} J(t\bar{u}_0, t\bar{v}_0) < \frac{s}{N} S_H^{\frac{N}{p_s}}$$

再结合引理 4，可得泛函 J 的一个临界点(u_1, v_1)，因为 $J(u_1, v_1) = c_1 > 0$，故(u_1, v_1)是方程组(1)的非平凡解．

参考文献：

[1] DI NEZZA E, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bulletin Des Sciences Mathématiques, 2012, 136(5): 521-573.

[2] BUCUR C, VALDINOCI E. Nonlocal Diffusion and Applications [M]. Cham: Springer, 2016.

[3] YIN H H. Existence of Multiple Positive Solutions for a p-q-Laplacian System with Critical Nonlinearities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 403(1): 200-214.

[4] LI Q, YANG Z D. Multiplicity of Positive Solutions for a p-q-Laplacian System with Concave and Critical Nonlinearities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 423(1): 660-680.

[5] FIGUEIREDO G M. Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of p&q Elliptic Problems with Critical Exponent [J]. Mathematische Nachrichten, 2013, 286(11/12): 1129-1141.

[6] HSU T S, LIN H L. Multiplicity of Positive Solutions for a p&q-Laplacian Type Equation with Critical Nonlinearities [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014: 558-577.

[7] CHAVES M F, ERCOLE G, MIYAGAKI O H. Existence of a Nontrivial Solution for a (p, q)-Laplacian Equation with p-Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$ [J]. Boundary Value Problems, 2014, 2014: 1-15.

[8] CANDITO P, MARANO S A, PERERA K. On a Class of Critical (p, q)-Laplacian Problems [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2015, 22(6): 1959-1972.

[9] SHAHROKHI-DEHKORDI M S. On a Class of $(p; q)$-Laplacian Problems Involving the Critical Sobolev-Hardy Exponents in Starshaped Domain [J]. Communications in Mathematics, 2017, 25(1): 13-20.

[10] 贾润杰，商彦英．一类边界奇异临界椭圆方程正解的存在性 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(6)：36-41．

[11] CHEN W J, SQUASSINA M. Critical Nonlocal Systems with Concave-Convex Powers [J]. Advanced Nonlinear Studies, 2016, 16(4): 821-842.

[12] FISCELLA A, MOLICA BISCI G, SERVADEI R. Multiplicity Results for Fractional Laplace Problems with Critical Growth [J]. Manuscripta Mathematica, 2018, 155(3/4): 369-388.

[13] BUCUR C, MEDINA M. A Fractional Elliptic Problem in $\mathbb{R}^n$ with Critical Growth and Convex Nonlinearities [J]. Manuscripta Mathematica, 2019, 158(3): 371-400.

[14] CHEN W J, GUI Y Y. Multiplicity of Solutions for Fractional p&q-Laplacian System Involving Critical Concave-Convex Nonlinearities [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 96: 81-88.

[15] CHEN W J. Existence of Solutions for Critical Fractional p&q-Laplacian System [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2021, 66(4): 626-641.

[16] ZHI Z, YANG Z D. On a Fractional p-q Laplacian Equation with Critical Nonlinearity [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2020, 2020: 3021-3035.

[17] 余芳，陈文晶．带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性 [J]．西南大学学报(自然科学版)，2020，42(10)：116-123．

[18] DENG Z Y, ZHANG R, HUANG Y S. Multiple Symmetric Results for Singular Quasilinear Elliptic Systems with Critical Homogeneous Nonlinearity [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, 40(5): 1538-1552.

[19] BRASCO L, SQUASSINA M, YANG Y, et al. Global Compactness Results for Nonlocal Problems [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series S, 2018, 11(3): 391-424.

责任编辑　廖坤