DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.06.011

亚正规对偶截断 Toeplitz 算子

丁宣浩[1,2], 黄雨浩[1], 桑元琦[3], 李永宁[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067;2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室,重庆 400067;
3. 西南财经大学 经济数学学院,成都 611130

摘要: 记 H^2 是开单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ 上的经典 Hardy 空间,$L^2=L^2(\mathbb{T})$ 是单位圆周 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$ 上的平方可积函数构成的空间. 令 u 是非常值内函数,研究了定义在模型空间的正交补空间上的对偶截断 Toeplitz 算子,这是一类新的 Toeplitz 算子. 证明了不存在解析的次正规对偶截断 Toeplitz 算子,并运用经典的 Toeplitz 算子理论完全刻画了亚正规对偶截断 Toeplitz 算子的符号.

关 键 词: Hardy 空间;模型空间;对偶截断 Toeplitz 算子;亚正规算子

中图分类号: O177.1 **文献标志码:** A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文 章 编 号: 1673-9868(2022)06-0094-05

Hyponormal Dual Truncated Toeplitz Operators

DING Xuanhao[1,2], HUANG Yuhao[1], SANG Yuanqi[3], LI Yongning[1,2]

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China;
3. School of Economic Mathematics, Southwest University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China

Abstract: Let H^2 be the Hardy space on the unit disk $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, and let $L^2=L^2(\mathbb{T})$ be the space of square integrable functions on the unit circle $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$. Let u be a nonconstant inner function, the dual truncated Toeplitz operators defined on the orthogonal complement of the model space is studied, which is a new class of Toeplitz operators. This paper proved that there is no analytic subnormal dual truncated Toeplitz operators established, also applied classical Toeplitz operator theory to completely characterized the symbols of hyponormal dual truncated Toeplitz operators.

Key words: Hardy spaces; model spaces; dual truncated Toeplitz operators; hyponormal operators

记 H^2 表示开单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ 上的 Hardy 空间,$L^2=L^2(\mathbb{T})$ 是单位圆周 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$ 上的平方可积函数构成的空间,L^∞ 表示由 $\mathbb{T}$ 上全体本性有界函数构成的空间,H^∞ 是 $\mathbb{D}$ 上有界解

收稿日期:2021-10-13
基金项目:国家自然科学基金项目(11871122,12101092);重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0595,cstc2020jcyj-msxmX0318);重庆市教委科学技术研究项目(KJQN202100822).
作者简介:丁宣浩,教授,博士,主要从事函数空间上算子理论的研究.
通信作者:李永宁,副教授.

析函数构成的全体.

对于每一个非常值的内函数 u，我们称

$$K_u^2 = H^2 \ominus uH^2$$

为模型空间. $P_u = P - M_u P M_{\bar{u}}$ 表示从 L^2 到 K_u^2 的正交投影，其中 P 是从 L^2 到 H^2 的正交投影. 取 L^2 中的一个函数 f，可以定义以 f 为符号的 Toeplitz 算子 T_f：

$$T_f x = P(fx) \qquad x \in H^2$$

模型空间正交补上的对偶截断 Toeplitz 算子 D_f 定义为

$$D_f y = (I - P_u)(fy) \qquad y \in (K_u^2)^{\perp}$$

文献[1-2]发现对偶截断 Toeplitz 算子与 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子[3]有许多相同的性质. 例如：对偶截断 Toeplitz 算子是有界的当且仅当其符号是有界的；紧的对偶截断 Toeplitz 算子只能是零算子；对偶截断 Toeplitz 算子为零算子当且仅当其符号为零；符号为连续函数的对偶截断 Toeplitz 算子生成的 C^*-代数模去紧算子后构成的理想 $*$-等距同构于 $\mathbb{T}$ 上的连续函数全体[2].

因此，我们特别考虑是否 D_f 是次正规算子当且仅当 T_f 是次正规算子?

为了说明我们的研究动机，首先来回顾次正规算子的定义以及 Halmos 第五问题的历史.

对于 Hilbert 空间 H 上的算子 S，如果 S 存在一个包含 H 的 Hilbert 空间 K，且其上的正规算子 N 满足 $S = N|_H$，则称 S 为次正规算子. 次正规算子理论在许多问题中都有广泛应用[4]. 文献[5]对 Toeplitz 算子提出了著名的 Halmos 第五问题“是否次正规 Toepltiz 算子不是解析的就是正规的?”文献[6]给出了 Halmos 第五问题成立的充分条件. 文献[7]认为这个猜测几乎是正确的. 然而，Halmos 第五问题首先被我国著名算子理论学家孙顺华先生解决[8-9]. 此外，文献[10]也对这个问题进行了研究. 但是至今数学家无法给出次正规 Toeplitz 算子的符号刻画.

对偶截断 Toeplitz 算子与 Toeplitz 算子有许多差异. 文献[11]的定理 9 证明了两个解析 Toeplitz 算子的乘积还是 Toeplitz 算子. 然而，我们很容易构造出两个解析对偶截断 Toeplitz 算子，其乘积不是对偶截断 Toeplitz 算子[1]. 更多关于 Toeplitz 算子和 Hankel 算子的相关研究可参见文献[12-13].

本文的第一部分，我们考虑了对偶截断 Toeplitz 算子版本的 Halmos 第五问题，证明了不存在解析的次正规对偶截断 Toeplitz 算子. 本文的第二部分，我们完全刻画了亚正规的对偶截断 Toeplitz 算子.

1　解析对偶截断 Toeplitz 算子

令 M_f 为 L^2 上的乘法算子，定义为

$$M_f \varphi = f\varphi$$

M_f 正是解析 Toeplitz 算子 T_f 的正规延拓. 因此，Hardy 空间 H^2 上每一个解析的 Toeplitz 算子 T_f 都是次正规的. D_f（f 是解析函数）在 uH^2 上的限制 $D_f|_{uH^2}$ 是次正规的，但是我们不知道解析对偶截断 Toeplitz 算子是否是次正规的. 因此我们考虑如下的问题：

问题 1　是否每个解析对偶截断 Toeplitz 算子都是次正规的?

下面的定理 1 将给出问题 1 的否定回答.

定理 1　如果 f 是一个非常数的解析函数，则 D_f 不是次正规的.

证　假设 D_f 是次正规的，则存在正规延拓 N，使得

$$N|_{(K_u^2)^{\perp}} = D_f$$

此外，$N + \lambda I$ 也是正规算子，并且满足

$$(N + \lambda I)|_{(K_u^2)^{\perp}} = D_f + \lambda I$$

其中 λ 是常数. 因此，$D_f + \lambda I$ 是次正规的. 不失一般性，假设 $f(0) = 0$. 令 $f = zf_1$，其中 $f_1 \in H^2$. 因为次正规算子必是亚正规的，所以 D_f 是亚正规的. Hilbert 空间 H 上的算子 T 为亚正规算子当且当

$$T^* T \geqslant TT^*$$

当且当

$$\|Tx\| \geqslant \|T^{*}x\| \qquad \forall x \in H$$
$$\|D_{f}y\| \geqslant \|D_{\bar{f}}y\| \qquad \forall y \in (K_{u}^{2})^{\perp}$$

因为

$$H^{2} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} u^{i} K_{u}^{2}$$

所以存在$\{x_{j}\}_{j=0}^{\infty} \subset K_{u}^{2}$，使得

$$f_{1} = \sum_{j=0}^{\infty} u^{j} x_{j}$$

和

$$\|f\|^{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \|x_{j}\|^{2}$$

根据假设，f 不是常数，则存在非负整数 l，使得 $x_{l} \neq 0$. 令 $y = \bar{z}\,\bar{u}^{l}$，因此 $y \in \bar{z}\ \overline{H^{2}} \subseteq [K_{u}^{2}]^{\perp}$，我们可以得到

$$\|D_{f}y\| = \|(I-P+uP\bar{u})(fy)\| = \left\|(I-P+uP\bar{u})\left[\left(z\sum_{j=0}^{\infty}u^{j}x_{j}\right)(\bar{z}\,\bar{u}^{l})\right]\right\| =$$
$$\left\|(I-P+uP\bar{u})\left(\bar{u}^{l}\sum_{j=0}^{\infty}u^{j}x_{j}\right)\right\|$$

因为 $x_{l} \in K_{u}^{2}$，所以$(I-P+uP\bar{u})x_{l}=0$. 根据模型空间的定义，我们可以得到

$$\bar{u}K_{u}^{2} \subset \bar{z}\ \overline{H^{2}}$$

因此

$$\left\|(I-P+uP\bar{u})\left(\bar{u}^{l}\sum_{j=0}^{\infty}u^{j}x_{j}\right)\right\|^{2} = \left\|\bar{u}^{l}\sum_{j\neq l,\ j\geqslant 0}u^{j}x_{j}\right\|^{2} = \sum_{j\neq l,\ j\geqslant 0}\|x_{j}\|^{2}$$

进一步，

$$\|D_{\bar{f}}y\| = \|(I-P+uP\bar{u})(\bar{f}\,\bar{z}\,\bar{u}^{l})\|^{2} = \|f\|^{2} = \sum_{j=0}^{\infty}\|x_{j}\|^{2}$$

矛盾，则

$$\|D_{f}y\| < \|D_{\bar{f}}y\|$$

2 亚正规对偶截断 Toeplitz 算子

因为每个解析对偶截断Toeplitz算子不是次正规的，我们将对偶截断Toeplitz算子的Halmos第五问题改写为如下形式：

问题 2 是否每个次正规的对偶截断 Toeplitz 算子都是正规的?

首先，我们用复对称算子的方法给出问题2的肯定回答. 然后，运用经典的Toeplitz算子理论，完全刻画正规对偶截断 Toeplitz 算子的符号.

对于 Hilbert 空间上的算子 T，存在一个等距且共轭线性的对合映射 C，使得

$$CTC = T^{*}$$

在 L^{2} 上有一个经典的对合映射 C，其定义为

$$(Cf)(\zeta) = u(\zeta)\overline{\zeta f(\zeta)}$$

因为 C 是将$[K_{u}^{2}]^{\perp}$ 映回自身的双射[14]，运用类似于文献[15]中命题3的方法，容易验证每个对偶截断Toeplitz 算子都是复对称的. 文献[16]证明了复对称算子 T 如果是亚正规的，则 T 一定是正规算子. 因为次正规算子一定是亚正规的，因此问题 2 的猜测是正确的. 虽然这个结论不是新的，但是对于对偶截断Toeplitz 算子的研究却是新的发现.

定理 2 如果 $f \in L^{\infty}$，则下面的 3 条陈述是等价的：

(i) D_{f} 是亚正规算子；

(ii) D_f 是正规算子；

(iii) 存在常数 c 和 d 以及一个实值函数 $\varphi \in L^\infty$，满足 $f = c\varphi + d$.

证　(i)⇔(ii)　由上面的讨论，我们知道亚正规的对偶截断 Toeplitz 算子都是正规的. 反过来，根据定义，每个正规算子一定是亚正规的.

(ii)⇒(iii)　假设 D_f 是正规的，则

$$D_f D_f^* = D_f^* D_f$$

对于 $y \in (K_u^2)^\perp$，我们得到

$$M_u P M_{\bar{u}} f D_{\bar{f}} y = M_u P M_{\bar{u}} \bar{f} D_f y \tag{1}$$

展开(1) 式可得

$$P\bar{u} f(M_u P M_{\bar{u}} \bar{f} + (I - P)\bar{f}) y = P\bar{u}\,\bar{f}(M_u P M_{\bar{u}} f + (I - P) f) y \tag{2}$$

取 $y = ux$，$x \in H^2$，则(2) 式变为

$$PfP\bar{f}x + Pf\bar{f}x - P\bar{u}fP\bar{f}ux = PfP\bar{f}x + Pf\bar{f}x - P\bar{u}\,\bar{f}Pfux \tag{3}$$

因此

$$T_f T_{\bar{f}} - T_{\bar{f}} T_f = T_{\bar{u}f} T_{u\bar{f}} - T_{\bar{u}\bar{f}} T_{uf}$$

根据文献[3] 的命题 7.5，可得

$$T_f T_{\bar{f}} - T_{\bar{f}} T_f = T_{\bar{u}^n f} T_{u^n \bar{f}} - T_{\bar{u}^n \bar{f}} T_{u^n f}$$

运用文献[17] 的引理 2.1，可得 $T_{\bar{u}^n} \to 0$，其中

$$F \in L^2 \qquad P(\bar{u}^n F) = P(\bar{u}^n (PF))$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \| P(\bar{u}^n F) \|_2 = 0$$

进一步有

$$\| (I - P)(\bar{u}^n F) \|_2 = \| VPVu^n F \|_2 = \| VP\bar{u}^n (VF) \|_2 \to 0 \qquad n \to \infty \tag{4}$$

计算下式

$$\begin{aligned}\langle T_{\bar{u}^n f} T_{u^n \bar{f}} k_z, k_z \rangle &= \langle P[\bar{u}^n f P(u^n \bar{f} k_z)], k_z \rangle = \\ &\langle \bar{u}^n f P(u^n \bar{f} k_z), k_z \rangle = \\ &\langle | f |^2 k_z, k_z \rangle - \langle \bar{u}^n f (I - P)(u^n \bar{f} k_z), k_z \rangle = \\ &\langle | f |^2 k_z, k_z \rangle - \langle (I - P)(u^n \bar{f} k_z), u^n \bar{f} k_z \rangle\end{aligned}$$

其中 $k_\lambda = \dfrac{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}{1 - w\bar{\lambda}}$ 表示正规化的再生核. 运用 Cauchy-Schwarz 不等式，可得

$$| \langle (I - P)(u^n \bar{f} k_z), u^n \bar{f} k_z \rangle | \leqslant \| (I - P)(u^n \bar{f} k_z) \|_2 \| \bar{f} k_z \|_2$$

由(4) 式可得

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{\bar{u}^n f} T_{u^n \bar{f}} k_z, k_z \rangle = \langle | f |^2 k_z, k_z \rangle$$

类似地，有

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{\bar{u}^n \bar{f}} T_{u^n f} k_z, k_z \rangle = \langle | f |^2 k_z, k_z \rangle$$

因此

$$\langle (T_f T_{\bar{f}} - T_{\bar{f}} T_f) k_z, k_z \rangle = 0$$

由于 Berezin 变换是单射，因此 $T_f T_{\bar{f}} = T_{\bar{f}} T_f$，则 T_f 是正规算子. 根据文献[11]，存在常数 c 和 d 以及一个实值函数 $\varphi \in L^\infty$，满足 $f = c\varphi + d$.

(iii)⇒(ii)　因为 $D_f^* = D_{\bar{f}}$，容易验证具有上面形式的算子都是正规算子.

注 1　Hardy 空间上的 Toeplitz 算子反酉等价于$(H^2)^\perp$ 上的对偶 Toeplitz 算子$(H^2)^\perp$[18-19].

但是对于模型空间的情况就完全不同了，对偶截断 Toeplitz 算子 D_f 是正规的当且当 T_f 是正规的(定

理 2)，当且当存在常数 c 和 d 以及一个实值函数 $\varphi \in L^{\infty}$，满足 $f = c\varphi + d$. 正规截断 Toeplitz 算子与正规对偶截断 Toeplitz 算子的符号有巨大区别，并且是复杂的[20-21].

参考文献:

[1] DING X H, SANG Y Q. Dual Truncated Toeplitz Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 461(1): 929-946.

[2] SANG Y Q, QIN Y S, DING X H. Dual Truncated Toeplitz C^*-Algebras [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2019, 13(2): 275-292.

[3] DOUGLAS R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory [M]. New-York, NY: Springer, 2012.

[4] GILLESPIE T A. The Theory of Subnormal Operators [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1993, 25(6): 618-620.

[5] HALMOS P R. Ten Problems in Hilbert Space [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1970, 76(5): 887-934.

[6] ABRAHAMSE M B. Subnormal Toeplitz Operators and Functions of Bounded Type [J]. Duke Mathematical Journal, 1976, 43(3): 597-604.

[7] HALMOS P R. Ten Years in Hilbert Space [J]. Integral Equations and Operator Theory, 1979, 2(4): 529-564.

[8] SUN S H. On Hyponormal Weighted Shift [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1984, 5B(1): 101-108.

[9] SUN S H. On Hyponormal Weighted Shift (II) [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1985, 6B(3): 231-233.

[10] COWEN C C. Some Subnormal Toeplitz Operators [J]. Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik(Crelles Journal), 1984, 351: 216-220.

[11] BROWN A, HALMOS P R. Algebraic Properties of Toeplitz operators [J]. Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik(Crelles Journal), 1964, 213: 89-102.

[12] 李永宁，梁焕超，丁宣浩. 圆周上的小 Hankel 算子 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 89-94.

[13] 丁宣浩，梁焕超，李永宁. 可交换的 Toeplitz 算子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(2): 27-31.

[14] SARASON D. Algebraic Properties of Truncated Toeplitz Operators [J]. Operators and Matrices, 2007, 1(4): 491-526.

[15] GARCIA S, PUTINAR M. Complex Symmetric Operators and Applications [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2006, 358(3): 1285-1315.

[16] WANG X H, GAO Z S. A Note on Aluthge Transforms of Complex Symmetric Operators and Applications [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2009, 65(4): 573-580.

[17] GUO K Y, WANG K. On Operators Which Commute with Analytic Toeplitz Operators Modulo the Finite Rank Operators [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2006, 134(9): 2571-2576.

[18] GUEDIRI H. Dual Toeplitz Operators on the Sphere [J]. Acta Mathematica Sinica(English Series), 2013, 29(9): 1791-1808.

[19] STROETHOFF K, ZHENG D C. Algebraic and Spectral Properties of Dual Toeplitz Operators [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2002, 354(6): 2495-2520.

[20] CHALENDAR I, TIMOTIN D. Commutation Relations for Truncated Toeplitz Operators [J]. Operators and Matrices, 2014(3): 877-888.

[21] CHU C. Normal Truncated Toeplitz Operators [J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2018, 12(4): 849-857.

责任编辑 廖坤