

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.07.010

复合 P-G 风险下最优投资组合-便宜再保-阈值分红问题

孙宗岐¹, 杨鹏^{2,3}, 吴静², 杨阳²

1. 西京学院 医学院, 西安 710123; 2. 西京学院 理学院, 西安 710123;
3. 西安交通大学 数学与统计学院, 西安 710048

摘要: 研究复合 Poisson-Geometric 风险下带无风险资本的投资组合-比例再保-阈值分红问题, 通过使用动态规划原理得到并求解 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程, 解得最优投资-便宜再保策略与最优分红函数的解析解, 最后分析了无风险利率等关键参数对最优策略与最优分红函数的影响, 验证了结果的合理性, 提出了管理建议.

关键词: 复合 Poisson-Geometric 过程; 无风险投资; 风险投资;

便宜再保; 阈值分红; HJB 方程

中图分类号: O211.63 文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 1673-9868(2022)07-0096-10



Optimal Investment Portfolio-Cheap Reinsurance-Threshold Dividend Strategies under Compound Poisson-Geometric Risk Process

SUN Zongqi¹, YANG Peng^{2,3}, WU Jing², YANG Yang²

1. School of Medical, Xi'jing University, Xi'an 710123, China;

2. School of Science, Xi'jing University, Xi'an 710123, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710048, China

Abstract: In this paper, the portfolio-proportional reinsurance-threshold dividend problem with risk-free capital under compound Poisson-Geometric risk was studied. The HJB equation was obtained by using the principle of dynamic programming, and the analytic solution of the optimal investment-cheap reinsurance strategy and the optimal dividend function were solved. Finally, the influence of key parameters such as risk-free interest rate on optimal strategy and optimal dividend function was analyzed to verify the rationality of the results and put forward management suggestions.

收稿日期: 2021-03-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371152); 教育部人文社科一般项目(21XJC910001); 陕西省教育厅自然科学专项(20JK0963).

作者简介: 孙宗岐, 硕士, 副教授, 主要从事随机分析与金融优化研究.

Key words: compound Poisson-Geometric process; risk-free investment; risk investment; cheap-reinsurance; threshold dividend; HJB equation

复合 Poisson-Geometric 过程作为对复合 Poisson 过程的一种稀疏化推广, 在国外亦被称为 Polya-Aeppli 过程, 其相关理论可参考文献[1-2]. 它作为描述带免赔机制和无赔款保费优待制度的保险赔付模型, 更加准确地刻画了保险事故中的赔付过程. 自该过程被提出, 就普遍受到了国内外研究者的关注. 在该风险模型下, 文献[3]讨论了保险公司的破产概率问题; 文献[4]又研究了破产时刻的分布; 文献[5]利用鞅方法再一次研究了破产概率问题; 文献[6]考虑了随机初始值约束的线性生灭过程; 文献[7]讨论了具有退保和投资依赖的保险风险模型, 利用鞅方法得到了破产概率的上界, 破产概率的显式表达等; 文献[8-9]还讨论过双复合 Poisson-Geometric 风险的破产概率问题; 文献[10]考虑了该风险下均值-方差准则的投资-再保问题; 文献[11-12]讨论了复合 Poisson-Geometric 过程的破产时刻、破产概率问题. 但是以上研究主要针对复合 Poisson-Geometric 风险下的破产概率问题, 而对该风险下的分红问题研究较少.

分红策略一般分为障碍分红和阈值分红. 文献[13]研究了保险公司的阈值分红问题, 但只是在复合 Poisson 过程下讨论问题, 同时也没有考虑保险事务中普遍存在的再保和投资的事实; 文献[14]研究了保险公司的障碍分红问题, 也只在复合 Poisson 过程下讨论问题, 而没有考虑再保与投资问题; 文献[15]讨论了双复合 Poisson 风险的有界分红; 文献[16-18]虽然在复合 Poisson-Geometric 过程下考虑过带初始注资、风险资本投资和比例再保险的最大分红问题, 但是没有考虑无风险资本投资, 这也与保险实务的运作不符.

为了弥补在复合 Poisson-Geometric 风险下对保险分红问题研究的不足, 文章考虑了带无风险资本投资、风险资本投资、比例再保险的最优阈值分红问题. 通过分析模型参数对最优投资-再保策略以及最优红利的影响, 给保险公司的管理提出了建议.

1 建立模型

文章所假设的随机过程和随机变量都定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上, 产生的 σ -域流 $\{\mathcal{F}_t: t \geq 0\}$ 完备且右连续. 允许连续交易且资产可任意分割, 无摩擦、自融资且无套利.

1.1 赔付过程、盈余过程、财富过程和分红策略的模型

本节先给出赔付过程、盈余过程、财富过程和阈值分红策略的数学描述, 最后再给出保险公司的最优控制问题.

1.1.1 赔付过程

文献[1-2]分别提出了复合 Poisson-Geometric 分布与过程. 关于复合 Poisson-Geometric 分布的定义也可参考文献[16], 下面只给出复合 Poisson-Geometric 过程的定义.

定义 1^[2] 设 $\lambda > 0, 0 \leq \gamma < 1$, 称随机过程 $\{N(t)\}$ 是服从参数 λ, γ 的复合 Poisson-Geometric 过程, 如果满足

- 1) $N(0) = 0$;
- 2) $N(t)$ 具有独立平稳增量;
- 3) 对任意 $t \geq 0$, $N(t)$ 服从参数为 λ, γ 的复合 Poisson-Geometric 分布, 且

$$E[N(t)] = \frac{\lambda t}{1 - \gamma}, \text{Var}[N(t)] = \frac{(1 + \gamma)\lambda t}{(1 - \gamma)^2}$$

注 1 当 $\gamma = 0$ 时, 复合 Poisson-Geometric 过程退化为一般的 Poisson 过程, 常称 γ 为偏离系数.

设 $S(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$ 表示到时刻 t 为止的累积赔付额, 其中: Y_i 表示第 i 次支赔时的赔付额, $N_1(t)$ 为服

从参数是 λ, γ 的复合 Poisson-Geometric 过程, 表示到时刻 t 为止发生赔付的次数, 偏离系数 γ 表示了赔付过程因免赔而被稀疏的程度.

1.1.2 盈余过程

复合 Poisson-Geometric 风险(简称复合 P-G 风险)下, Cramer-Ludberg 盈余模型被推广为

$$R(t) = x + ct - S(t) \quad (1)$$

其中: x 表示初始盈余, c 表示保费率, $S(t)$ 表示到时刻 t 为止的累积赔付.

假设 Y_i 服从参数为 $\frac{1}{m}$ 的指数分布, 则由文献[2] 的引理 4, 可知

$$E(S(t)) = \alpha_1 t, \alpha_1 = \frac{\lambda p_1}{1 - \gamma}$$

$$\text{Var}(S(t)) = \alpha_2^2 t, \alpha_2^2 = \left(p_2 + \frac{2\gamma p_1^2}{1 - \gamma}\right) \frac{\lambda}{1 - \gamma}$$

其中 $p_1 = E[Y_i] = m$, $p_2 = E[Y_i^2] = 2m^2$. 根据文献[19] 的研究, 经典的盈余过程(1) 可近似地用扩散过程

$$dR(t) = c dt - \alpha_1 dt + \sqrt{\alpha_2^2} dB_1(t) \quad (2)$$

来描述, 其中 $B_1(t)$ 是一维标准布朗运动. 假设 $\{N(t)\}$, $\{B_1(t)\}$, $\{Y_i\}$ 相互独立. 为安全起见, 保费率须

满足 $c = (1 + \theta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma}$, $\theta > 0$ 称为保险负载系数. 则盈余过程(2) 可近似表示为扩散过程

$$dR(t) = \frac{\theta \lambda m}{1 - \gamma} dt + \frac{m \sqrt{2\lambda}}{1 - \gamma} dB_1(t)$$

1.1.3 财富过程

在破产前, 保险公司将部分财富 $\pi(t, x)$ 投资到一个价格 $P(t)$ 满足

$$dP(t) = P(t)(\mu_0 dt + \sigma_0 dB_2(t)), P(0) = p_0$$

的风险资产(比如股票)上. 这里 μ_0 是风险资产的单位风险资产的期望收益率, σ_0 是单位风险资产的期望波动率, $B_2(t)$ 是一维标准布朗运动, 设 $B_2(t)$ 与 $B_1(t)$ 的相关系数为 ρ . 最后将剩余财富投资于价格 $P_0(t)$ 满足

$$dP_0(t) = P_0(t)r_0 dt$$

的无风险资产上, 其中单位无风险资产的收益率为 $r_0 (< \mu_0)$. 则财富过程 $X(t)$ 满足

$$dX(t) = \left\{ [X(t) - \pi(t, x)]r_0 + \pi(t, x)\mu_0 + \frac{\theta \lambda m}{1 - \gamma} \right\} dt + \frac{m \sqrt{2\lambda}}{1 - \gamma} dB_1(t) + \pi(t, x)\sigma_0 dB_2(t)$$

这里进一步考虑再保业务, 并假设再保的自留比例(风险暴露)为 $q(t, x)$, 再保的负载系数为 $\eta (\geq \theta)$, 则财富过程可进一步表示为

$$dX(t) = \left\{ [X(t) - \pi(t, x)]r_0 + \pi(t, x)\mu_0 + (1 + \theta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} - q(t, x) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} - (1 - q(t, x))(1 + \eta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} \right\} dt + q(t, x) \frac{m \sqrt{2\lambda}}{1 - \gamma} dB_1(t) + \pi(t, x)\sigma_0 dB_2(t)$$

也即

$$dX(t) = \left[X(t)r_0 + \pi(t, x)(\mu_0 - r_0) + (\theta - \eta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} + q(t, x)\eta \frac{\lambda m}{1 - \gamma} \right] dt + q(t, x) \frac{m \sqrt{2\lambda}}{1 - \gamma} dB_1(t) + \pi(t, x)\sigma_0 dB_2(t) \quad (3)$$

1.1.4 阈值分红策略的描述

保险公司对股东或投保人按阈值分红策略进行红利分配. 设 $b > 0$, 当修正财富低于 b 时, 不分红; 修正财富超过 b 时, 将超出的部分按一个有界的比例 l 进行分红, 其中 $0 \leq l \leq \alpha$; 这种分红策略常被称为阈值分红.

设 $\bar{D}(t)$ 是时刻 t 的分红, 则 $\tilde{X}(t) = X(t) - \bar{D}(t)$ 表示修正财富. 设 $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid \tilde{X}(t) \leq 0\}$ 为保险公司的破产时刻, 则对于 $t \leq \tau$ 有 $\bar{D}(t) = \int_0^t \alpha I_{\{\tilde{X}(s) \geq b\}} ds$. 直到破产发生时, 阈值分红的累积现值 $D = \int_0^\tau e^{-\delta t} d\bar{D}(t)$.

1.2 最优控制问题

称满足

- 1) $0 \leq q(t, x) \leq 1$;
- 2) $\int_0^\tau \pi^2(t, x) dt < \infty$ a. e. ;

的控制策略 $(\pi(t, x), q(t, x))$ 为允许策略, 又称允许策略的集合为可行集, 记作 Π .

对 $\forall x \geq 0$, 用 $J(x; b) = E[D \mid \tilde{X}(0) = x]$ 表示破产前阈值红利的累积现值的期望, 则保险公司的目标是: 使得最终阈值红利累积现值的期望达到最大, 即

$$V(x; b) = \sup_{\pi, q \in \Pi} J^{\pi, q}(x; b)$$

称其为最优分红函数. 为此, 可构建如下的最优控制问题

$$\begin{cases} V(x; b) = \max_{\pi, q \in \Pi} J(x; b) \\ \text{s. t. } dX(t) = \left[X(t)r_0 + \pi(t, x)(\mu_0 - r_0) + (\theta - \eta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} + q(t, x)\eta \frac{\lambda m}{1 - \gamma} \right] dt + \\ \quad q(t, x) \frac{m\sqrt{2\lambda}}{1 - \gamma} dB_1(t) + \pi(t, x)\sigma_0 dB_2(t) \end{cases} \quad (4)$$

满足

$$V'(x; b) > 0, V''(x; b) < 0, V(0; b) = 0, V'(0; b) = \infty, V'(b; b) = 1, V(b-; b) = V(b+; b) \quad (5)$$

为了能得到最优控制问题的解, 先给出以下检验性定理.

引理 1^[20] 设 $W(x; b)$ 为定义在 $[0, +\infty)$ 上的二次连续可微的函数, 且 $W'(x; b) > 0, W''(x; b) < 0$. 如果 $W(x; b), V(x; b)$ 分别是上述方程(4)与下述方程(6)和(7)的经典解, 那么 $W(x; b)$ 与 $V(x; b)$ 一致, 且满足 HJB 方程的 $(\pi^*(x), q^*(x))$ 就是最优投资策略, 即 $V(x; b) = W(x; b) = J^{\pi^*, q^*}(x; b)$.

2 阈值分红策略下模型的求解

运用最优控制原理把本文的随机最优控制问题转化为 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程, 再求解最优控制策略.

2.1 阈值分红策略下的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

依文献[13]中 2.5.1 节的结论, 阈值分红策略下的最优分红函数 $V(x; b)$ 满足如下 HJB 方程. 当 $0 \leq x \leq b$ 时,

$$\sup_{\pi, q \in \Pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{2\lambda m^2}{(1 - \gamma)^2} q^2(t, x) + 2\rho \frac{\sqrt{2\lambda} m \sigma_0}{1 - \gamma} q(t, x) \pi(t, x) + \sigma_0^2 \pi^2(t, x) \right] V''(x; b) + \right.$$

$$\left[x r_0 + \pi(t, x)(\mu_0 - r_0) + (\theta - \eta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} + q(t, x) \frac{\eta \lambda m}{1 - \gamma} \right] V'(x; b) - \delta V(x; b) \Big\} = 0 \quad (6)$$

当 $x > b$ 时,

$$\sup_{\pi, q \in \Pi} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{2\lambda m^2}{(1 - \gamma)^2} q^2(t, x) + 2\rho \frac{\sqrt{2\lambda} m \sigma_0}{1 - \gamma} q(t, x) \pi(t, x) + \sigma_0^2 \pi^2(t, x) \right] V''(x; b) + \right. \\ \left. \left[x r_0 + \pi(t, x)(\mu_0 - r_0) + (\theta - \eta) \frac{\lambda m}{1 - \gamma} + q(t, x) \frac{\eta \lambda m}{1 - \gamma} - \alpha \right] V'(x; b) - \delta V(x; b) + \alpha \right\} = 0 \quad (7)$$

2.2 阈值分红策略下最优投资-再保策略与最优分红函数

定理 1 当 $x \geq b$ 时, 便宜再保险下的最优投资-再保策略为

$$\pi^*(x) = \frac{[2(\mu_0 - r_0) - \sqrt{2\lambda} \rho \sigma_0 \eta]}{2\sigma_0^2(1 - \rho^2)} \frac{x - \frac{\alpha}{r_0}}{1 - k} \\ q^*(x) = \frac{(1 - \gamma)[\lambda \eta \sigma_0 - (\mu_0 - r_0) \sqrt{2\lambda} \rho]}{2\lambda m \sigma_0(1 - \rho^2)} \frac{x - \frac{\alpha}{r_0}}{1 - k}$$

最优阈值分红函数为

$$V(x; b) = \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{k} \left(x - \frac{\alpha}{r_0} \right)^k \left(b - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{1-k}$$

其中

$$k = \frac{(A + \delta + r_0) - \sqrt{\Delta}}{2r_0} \quad \Delta = (A + \delta + r_0)^2 - 4r_0\delta, b > \frac{\alpha}{r_0}$$

证 当 $x \geq b$ 时, 对 HJB 方程(7) 利用一阶最优性条件, 可得

$$\pi^*(t, x) = - \frac{[2(\mu_0 - r_0) - \sqrt{2\lambda} \rho \sigma_0 \eta]}{2\sigma_0^2(1 - \rho^2)} \frac{V'_1}{V''_1} \\ q^*(t, x) = - \frac{(1 - \gamma)[\lambda \eta \sigma_0 - (\mu_0 - r_0) \sqrt{2\lambda} \rho]}{2\lambda m \sigma_0(1 - \rho^2)} \frac{V'_1}{V''_1}$$

代入 HJB 方程(7), 有

$$A \frac{V'_1}{V''_1} + \delta \frac{V - \frac{\alpha}{r_0}}{V'} = x r_0 - (\alpha + B) \quad (8)$$

其中, 当 $0 \leq \rho < 1, \eta \geq \theta, \mu_0 > r_0$ 时,

$$A = \frac{[\sqrt{\lambda} \eta \sigma_0 - \sqrt{2}(\mu_0 - r_0)]^2 + 2\sqrt{2\lambda} \eta \sigma_0(\mu_0 - r_0)(1 - \rho)}{4\sigma_0^2(1 - \rho^2)} > 0 \\ B = \frac{\lambda m(\eta - \theta)}{1 - \gamma} \geq 0$$

很难得到方程(8) 满足条件(5) 的显式解. 而在 $\eta = \theta$ 的情形下, 能得到方程的显式解, 此时, 再保险常被称为便宜再保险.

当 $B = 0$, 不妨假设方程(9) 有形如 $V(x; b) = \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{k} \left(x - \frac{\alpha}{r_0} \right)^k \left(b - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{1-k}$ 的解, 则

$$V'(x; b) = \left(x - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{k-1} \left(b - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{1-k}$$

且有

$$V''(x; b) = (k - 1) \left(x - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{k-2} \left(b - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{1-k}$$

此时, 方程(8) 不难化为

$$r_0 k^2 - (A + \delta + r_0)k + \delta = 0$$

显然

$$\Delta = (A + \delta + r_0)^2 - 4r_0\delta = (\delta - r_0)^2 + A^2 + 2A(\delta + r_0) > 0$$

解得

$$k = \frac{(A + \delta + r_0)^2 - \sqrt{\Delta}}{2r_0} > 0$$

不难证明 $0 < k < 1$. 进而, 可验证

$$V(x; b) = \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{k} \left(x - \frac{\alpha}{r_0} \right)^k \left(b - \frac{\alpha}{r_0} \right)^{1-k}$$

满足边界条件(5), 故最优投资-再保策略为

$$\pi^*(x) = \frac{[2(\mu_0 - r_0) - \sqrt{2\lambda}\rho\sigma_0\eta]}{2\sigma_0^2(1 - \rho^2)} \frac{x - \frac{\alpha}{r_0}}{1 - k}$$

$$q^*(x) = \frac{(1 - \gamma)[\lambda\eta\sigma_0 - (\mu_0 - r_0)\sqrt{2\lambda}\rho]}{2\lambda m\sigma_0(1 - \rho^2)} \frac{x - \frac{\alpha}{r_0}}{1 - k}$$

定理 2 当 $0 \leq x \leq b$ 时, 便宜再保险下, 最优投资-再保策略为

$$\pi^*(x) = \frac{[2(\mu_0 - r_0) - \sqrt{2\lambda}\rho\sigma_0\eta]}{2\sigma_0^2(1 - \rho^2)} \frac{x}{1 - k}$$

$$q^*(x) = \frac{(1 - \gamma)[\lambda\eta\sigma_0 - (\mu_0 - r_0)\sqrt{2\lambda}\rho]}{2\lambda m\sigma_0(1 - \rho^2)} \frac{x}{1 - k}$$

最优阈值分红函数为

$$V(x; b) = \frac{b - \frac{\alpha(\delta - kr_0)}{\delta r_0}}{k} \left(\frac{x}{b} \right)^k$$

其中

$$k = \frac{(A + \delta + r_0) - \sqrt{\Delta}}{2r_0} \quad \Delta = (A + \delta + r_0)^2 - 4r_0\delta$$

证 与定理 1 证明类似, 这里不再赘述. 显然在 $\delta = kr_0$ 时, 该解满足边界条件(5).

2.3 允许策略的等价条件

$\pi(t, x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0} \geq \rho \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$, 其经济学意义是: 单位资本风险收益 $\frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0}$ 不低于保险单位风险收益 $\frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$ 带来的相关性风险收益 $\rho \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$, 这是因为投资风险资本的单位风险收益要比因承接的保险业务而给风险资本带来的相关性风险收益高的缘故.

$q(t, x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2} \geq \frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0}$, 因此当且仅当 $1 \times \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2} \geq \frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0} \geq \rho \times \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$ 时, 有 $\pi(t, x) \geq 0$, $q(t, x) \geq 0$. $1 \times \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2} \geq \frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0} \geq \rho \times \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$ 的经济解释是: 单位资本风险收益 $\frac{\mu_0 - r_0}{\sigma_0}$ 不低于保险单位风险收益带来的相关性收益 $\rho \frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$, 但却不超过保险单位风险收益 $\frac{\sqrt{2\lambda}\theta}{2}$, 这是因为保险单位风险带

来的收益一般来说要比资本单位风险带来的收益高的缘故;这也是保险公司的主要业务是保险业务,而风险投资业务只是辅助业务的原因所在.

$q(t, x) \leq 1 \Leftrightarrow b \leq \frac{2\lambda m \sigma_0}{\lambda \eta \sigma_0 - (\mu_0 - r_0) \sqrt{2\lambda} \rho} \frac{(1 - \rho^2)(1 - k)}{1 - \gamma}$, 即只需阈值分红的分红界 b 在有界的范围内, 就可保证 $q(t, x) \leq 1$. 以下数值分析都在允许策略的等价条件下进行.

3 便宜再保情形下的参数分析与经济解释

下面, 首先将模型中涉及的保险参数 x, m, λ, γ , 投资参数 $r_0, \mu_0, \sigma_0, \alpha$, 保险风险与投资风险之间的相关系数 ρ , 结合文章中的结果, 通过数值算例, 对参数做数值分析, 并作经济解释.

例 1 先给出几个参数, $\lambda = 3, m = 1, \gamma = 0.3, \eta = \theta = 0.3, \rho = 0.3, \mu_0 = 0.1, \sigma_0 = 1, \delta = 0.2, \alpha = 0.02, b = 3$. 利用 Matlab 软件得到最优阈值分红函数与初始盈余和无风险利率之间的关系图(图 1)、最优投资策略与初始盈余和无风险利率之间的关系图(图 2)、最优再保策略与初始盈余和无风险收益率之间的关系图(图 3).

从图 1 可以看出: 最优阈值分红函数 $V(x)$ 是初始盈余 x 的增函数, 也是无风险利率 r_0 的增函数. 这是因为初始准备金越高, 财富水平也越高, 分红就越多; 无风险利率越大, 无风险资本收益越多, 财富水平越高, 分红自然越多.

从图 2 可以看出: 初始盈余越大, 即初始准备金越充足, 此时为了追求更高的盈余水平, 保险公司应该增加风险资本投资. 无风险利率越大, 最优投资策略越小. 这是因为无风险资本投资能带来更多收益的情况下, 保险公司当然会趋利避害, 增加无风险资本的投资, 降低风险资本的投资. 同时在分红界右侧, 风险投资减少. 这是因为有分红的存在, 财富减少, 财富水平降低, 减少风险资本投资有利于降低保险公司整体风险水平.

从图 3 可以看出: 最优再保策略是初始盈余的减函数, 这是因为初始准备金越充足, 整体风险水平越低, 再保险的比例自然会下降. 在分红界的右侧, 无风险资本利率增大. 由于风险资本投资减少, 整体风险水平降低, 保险公司的偿付能力提高, 因此再保比例自然降低. 但在分红界左侧, 为增强偿付能力, 提高财富水平, 应随无风险利率的提高继续增加再保险, 以持续降低整体风险, 尽快实现分红.

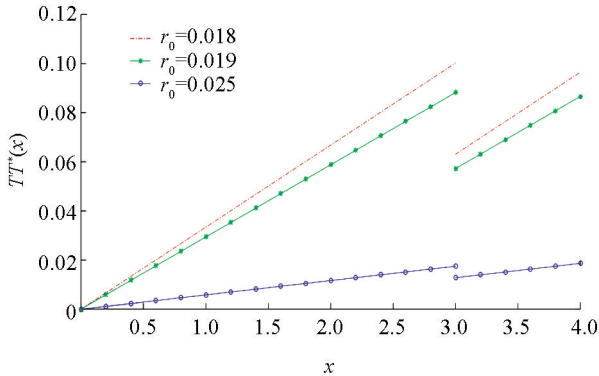


图 2 最优投资策略 $\pi^*(x)$ 与初始盈余 x 和无风险利率 r_0 之间的关系

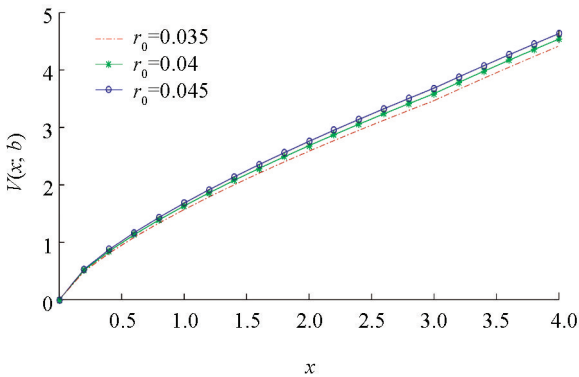


图 1 最优阈值分红函数 $V(x; b)$ 与初始盈余 x 和无风险利率 r_0 之间的关系

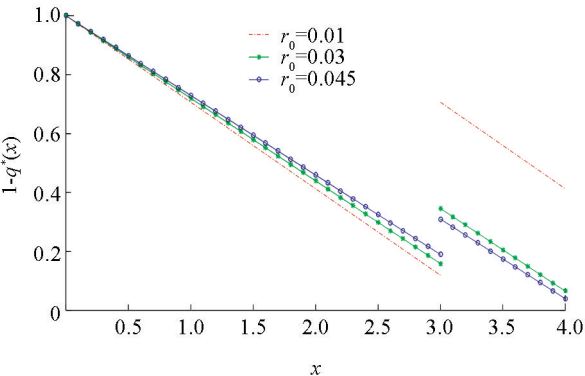


图 3 最优再保策略 $1 - q^*(x)$ 与初始盈余 x 和无风险收益率 r_0 之间的关系

例 2 先给出几个参数, $\lambda=3, m=1, \gamma=0.3, \eta=\theta=0.3, \rho=0.3, x=3.5, \sigma_0=0.5, \delta=0.2, \alpha=0.02, b=3$. 利用 Matlab 软件得到最优阈值分红函数与无风险利率和资本风险收益率之间的关系图(图 4)、最优投资策略与无风险利率和风险资本收益率之间的关系图(图 5)、最优再保策略与无风险利率和风险收益率之间的关系图(图 6).

从图 4 可以看出: 最优阈值分红是无风险利率与风险利率的增函数. 这与资本收益率越高, 投资回报越大, 财富水平越高, 分红越多的一般性认识一致.

从图 5 可以看出: 最优投资策略是无风险利率的减函数, 是风险资本收益率的增函数. 这是因为无风险利率较高时, 保险公司更愿意转投没有任何风险的无风险资产. 若风险资产收益率较高, 则保险公司更愿意投资到风险资产, 以取得更加可观的收益回报, 来提高财富水平, 增加分红.

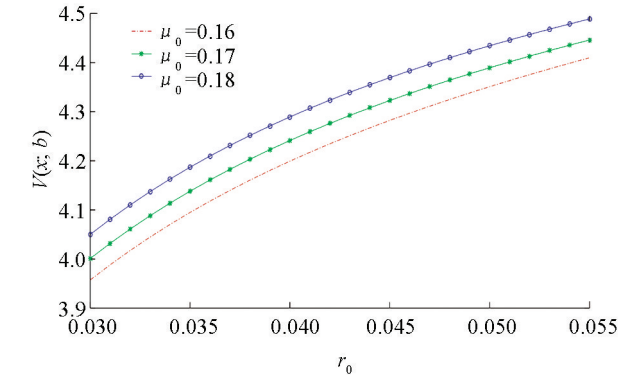


图 4 最优阈值分红函数 $V(x; b)$ 与无风险利率 r_0 和资本风险收益率 μ_0 之间的关系

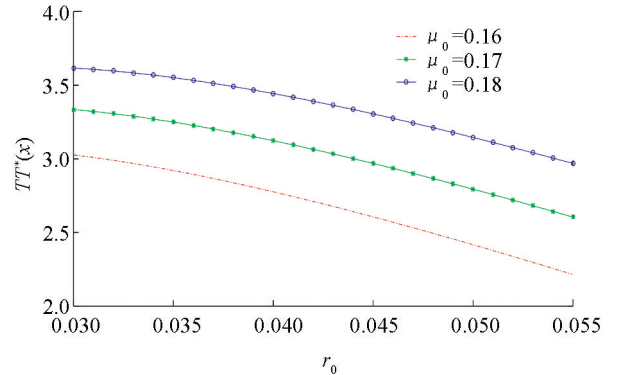


图 5 最优投资策略 $\pi^*(x)$ 与无风险利率 r_0 和风险资本收益率 μ_0 之间的关系

从图 6 可以看出: 无风险利率越高, 最优再保比例越小; 资本风险收益率越高, 最优再保比例也越高. 这是因为无风险利率越高, 转投无风险资产越多, 回报会越多, 财富水平提高, 偿付能力提高, 再保比例自然可以降低, 此时更能增加分红, 风险资本收益率增大. 由于风险投资增加, 整体风险水平提高, 此时自然需要提高再保比例, 转移风险.

例 3 先给出几个参数, $\lambda=3, m=1, \gamma=0.3, \eta=\theta=0.3, r_0=0.03, x=3.5, \mu_0=0.16, \delta=0.2, \alpha=0.02, b=3$. 利用 Matlab 软件得到最优阈值分红函数与资本风险波动率和相关系数之间的关系图(图 7)、最优投资策略与资本风险波动率和相关系数之间的关系图(图 8)、最优再保策略与资本风险波动率和相关系数之间的关系图(图 9).

从图 7 可以看出: 最优阈值分红函数 $V(x; b)$ 是资本风险波动率 σ_0 和相关系数 ρ 的减函数, 显然这与风险水平越高, 分红越少的一般性认识一致.

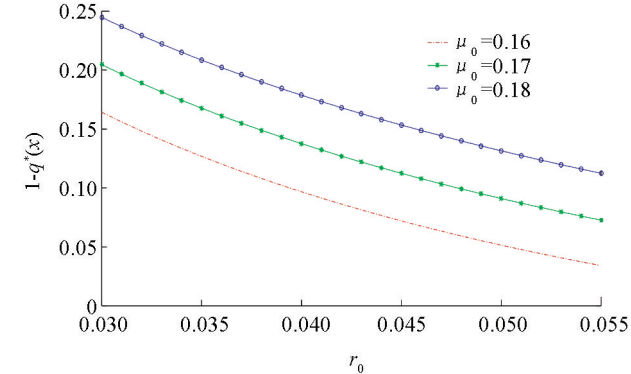


图 6 最优再保策略 $1 - q^*(x)$ 与无风险利率 r_0 和风险收益率 μ_0 之间的关系

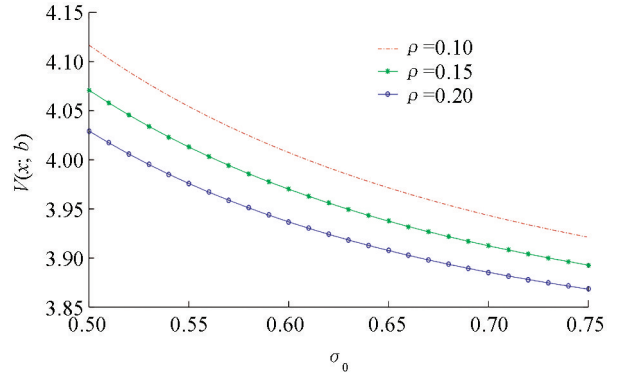


图 7 最优阈值分红函数 $V(x; b)$ 与资本风险波动率 σ_0 和相关系数 ρ 之间的关系

从图 8 可以看出：最优投资策略 $\pi^*(x)$ 是资本风险波动率 σ_0 和相关系数 ρ 的减函数，这也与风险越大，风险投资应该减少的一般认识相一致。

从图 9 可以看出：最优再保策略 $1-q^*(x)$ 是风险资本波动率 σ_0 和相关系数 ρ 的减函数。这是因为风险资本波动率越大，且相关性风险也越大时，整体风险增加，风险投资随之减少，整体投资风险降低，保险公司的赔付能力有所提高，所以降低再保比例反而更有利于分红。

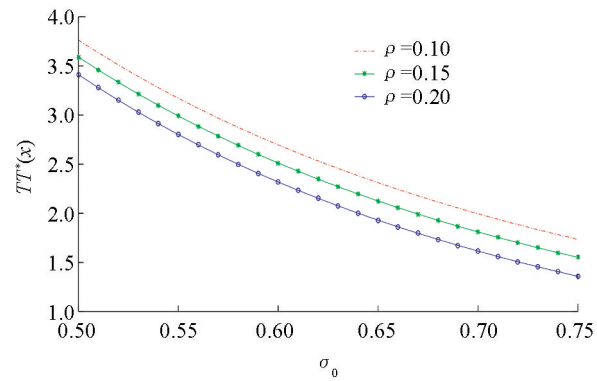


图 8 最优投资策略 $\pi^*(x)$ 与
资本风险波动率 σ_0 和相关系数 ρ 之间的关系

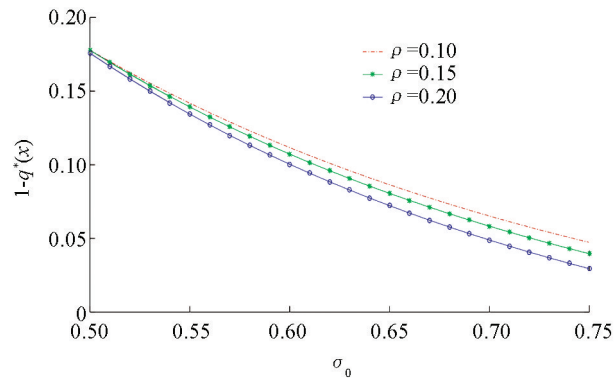


图 9 最优再保策略 $1-q^*(x)$ 与
资本风险波动率 σ_0 和相关系数 ρ 之间的关系

4 结论

文章考虑了无风险资本投资，完善了复合 Poisson-Geometric 风险下保险风险模型的研究。从激发投保热情，增加投保人分红的角度看，投资收益率高的无风险资产显然更利于分红；从风险控制的角度看，投资较高收益率的无风险资产显然能够降低风险资产投资所带来的风险；从风险转移的角度看，投资高收益率的无风险资本时，则需要降低再保，此时反而更有利于分红。

在实际的金融市场中，无风险收益率并非始终是常数，而是跳跃的。因此，考虑随机市场环境中的保险公司最优投资-再保-分红问题应该更能接近目前保险金融的实际运行状态。探讨复合 Poisson-Geometric 风险下具有随机情形的分红问题将是一个值得研究的问题。

参考文献：

[1] 毛泽春, 刘锦萼. 一类索赔次数的回归模型及其在风险分级中的应用 [J]. 应用概率统计, 2004, 20(4): 359-367.

[2] 毛泽春, 刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率 [J]. 应用数学学报, 2005, 28(3): 419-428.

[3] MINKOVA L D. The Pólya-Aeppli Process and Ruin Problems [J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2004, 3(4): 221-234.

[4] CHUKOVA S, MINKOVA L D. Pólya-Aeppli of Order k Risk Model [J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2015, 44(3): 551-564.

[5] MEGLENA L, KTASIMIRA K. Pólya-Aeppli Risk Model [C] //The 44th Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics. New York: IEEE Computer Society Press, 2018.

[6] TCHORBADJIEFF A, MAYSTER P. Models Induced from Critical Birth-Death Process with Random Initial Conditions [J]. Journal of Applied Statistics, 2020, 47(13-15): 2862-2878.

- [7] YU W G, HUANG Y J. A Dependent Insurance Risk Model with Surrender and Investment under the Thinning Process [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(1): 134246.
- [8] 王贵红, 赵金娥, 何树红. 常利率下分红双复合 Poisson 风险模型的期望折现罚金函数 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(1): 94-99.
- [9] 王月明, 魏广华, 郭楠, 等. 带借贷利率和干扰的双 Poisson-Geometric 风险过程模型 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(11): 54-63.
- [10] 杨鹏, 杨志江, 孔祥鑫. Poisson-Geometric 模型下时间一致的最优再保险-投资策略选择 [J]. 应用数学, 2019, 32(4): 729-738.
- [11] 孙宗岐, 杨鹏. 带投资和障碍分红的破产时刻 Laplace 变换 [J]. 深圳大学学报(理工版), 2021, 38(2): 214-220.
- [12] 孙宗岐, 刘宣会. 复合 Poisson-Geometric 风险下带投资和障碍分红的 Gerber-shiu 函数 [J]. 运筹与管理, 2021, 30(10): 141-145.
- [13] ZHANG Z M, HAN X. The Compound Poisson Risk Model under a Mixed Dividend Strategy [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 315(5): 1-12.
- [14] DONG H, ZHAO X H. On Periodic Dividends for the Classical Risk Model with Debit Interest [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 29(2): 1-8.
- [15] 赵金娥, 李明. 双复合 Poisson 风险模型总红利现值的研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(1): 104-109.
- [16] 孙宗岐, 陈志平. 复合 Poisson-Geometric 风险下保险公司的最优投资-再保-混合分红策略 [J]. 工程数学学报, 2016, 33(5): 463-479.
- [17] 孙宗岐, 陈志平. 基于注资-阈值分红的随机微分投资-再保博弈 [J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(21): 108-121.
- [18] 孙宗岐, 杨鹏. 确定风险投资和有界分红下复合 Poisson-Geometric 风险模型研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(7): 1-10.
- [19] TAKSAR M I, MARKUSSEN C. Optimal Dynamic Reinsurance Policies for Large Insurance Portfolios [J]. Finance and Stochastics, 2003, 7(1): 97-121.
- [20] SCHMIDLI H. Stochastic Control in Insurance [M]. London: Springer Verlag, 2008.

责任编辑 张构