DOI: 10.13718/j. cnki. xdzk. 2022. 07. 011

# 求解二维热传导方程的一个高精度显格式

### 詹涌强

广东交通职业技术学院 基础部数学教研室,广州 510800

摘要:利用待定系数法提出了求解二维热传导方程的一个三层高精度显式差分格式,格式的截断误差达到了 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$ ,通过Fourier分析法证明了当 $r < \frac{1}{6}$ 时,格式是稳定的,最后通过数值实验,说明差分格式是有效的,且理论分析与实际计算相吻合. 关键词:二维热传导方程;显式差分格式;截断误差 中图分类号:O241.82 文献标志码:A 文章编号:1673-9868(2022)07-0106-06 开放科学(资源服务)标识码(OSID):同体在

# A High-Order Accuracy Explicit Difference Scheme for Solving 2-D Heat Conduction Equation

### ZHAN Yongqiang

Department of Mathematics Teaching and Research, Guangdong Communication Polytechnic, Guangzhou 510800, China

Abstract: In the paper, a three-level explicit difference scheme with high accuracy for solving two-dimension heat conduction equation by the method of undetermined parameters was proposed. The truncation error of the scheme was  $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$ . The difference scheme was proved to be stable if  $r < \frac{1}{6}$  by Fourier method. Finally, the numerical experiment showed that the difference scheme was effective, and theoretical analysis is consistent with the practical calculation.

Key words: two-dimension heat conduction equation; explicit difference schemes; truncation error

抛物型方程是偏微分方程中的一种重要方程,它广泛应用于力学、天文学、物理学、生态学及工程 技术等各个领域中,对于上述各领域中的许多问题,为了定量或定性地对它们展开系统的研究,需要建 立各种数学模型,而建立起来的这些数学模型最后都可归结为求解相应的抛物型方程,这些抛物型方程 是没有精确解的,我们只能通过计算机求它们的数值解,常见的数值解法有有限元法、有限体积法、边 界元法和有限差分法等.这些方法中,有限差分法仍然是求解抛物型方程的重要方法.经典的差分格 式,有古典显式格式、古典隐式格式、Crank-Nicolson格式等,这些差分格式形式简单且稳定性条件好, 但它们的截断误差(精度)低,古典显式格式与古典隐式格式的精度仅为 $O(\Delta t + \Delta x^2)$ , Crank-Nicolson格 式的精度为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)^{[1-2]}$ ,与精确解的误差都较大.因此,高精度且稳定性好的抛物型方程的差分格

收稿日期: 2020-12-31

基金项目:国家自然科学基金项目(61070165).

作者简介: 詹涌强, 副教授, 主要从事微分方程数值解法研究.

生态学中提出的各种数学模型、神经轴突中电脉冲的传导及燃烧理论等许多物理现象,以及热的传导、流体在多孔介质中的运动规律等可归结为如下经典的抛物型方程--热传导方程,本文讨论二维的情形:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ 0 < x, \ y < 1, \ t > 0 \\ u(x, \ y, \ 0) = \varphi(x, \ y), \ 0 \le x, \ y \le 1 \\ u(0, \ y, \ t) = f_1(y, \ t), \ u(1, \ y, \ t) = f_2(y, \ t), \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le t \le T \\ u(x, \ 0, \ t) = f_3(x, \ t), \ u(x, \ 1, \ t) = f_4(x, \ t), \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le t \le T \end{cases}$$
(1)

对方程(1)的求解,许多学者提出了一些改进的差分格式,大部分格式精度达到了 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)^{[3-12]}$ ,如 文献[12]构造了一个求解二维抛物型方程的三层显式格式,格式的精度为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ ,稳定性范围是  $r < \frac{1}{2}$ .在文献[11]中也构造了一个三层显式差分格式,格式的精度也是 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ ,稳定性范围是  $\frac{1}{12} \leq r \leq \frac{1}{6}$ .而在本文中则构造了一个精度为 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$ 的高精度差分格式,格式的稳定性条件为 $r < \frac{1}{6}$ ,精度比上述文献所构造的格式精度更高.

## 1 一个差分近似式

设 Δ*t* 为时间步长, Δ*x* 与Δ*y* 为空间*x*, *y* 方向的步长, 为简便起见, 设 Δ*x* = Δ*y*, *x<sub>j</sub>* = *j*Δ*x*, *y<sub>k</sub>* = *k*Δ*x*, *t<sub>n</sub>* = *n*Δ*t*, 记  $u_{jk}^n$  =  $u(x_j, y_k, t_n)$ , 将  $u_{jk}^{n+1}$  与  $u_{jk}^{n-1}$  在节点(*j*Δ*x*, *k*Δ*y*, *n*Δ*t*) 处作 Taylor 展开得

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^{n} + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{jk}^{n} + \frac{\Delta t^{2}}{2} \left(\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}\right)_{jk}^{n} + \frac{\Delta t^{3}}{6} \left(\frac{\partial^{3} u}{\partial t^{3}}\right)_{jk}^{n} + O(\Delta t^{4})$$
$$u_{jk}^{n-1} = u_{jk}^{n} - \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{jk}^{n} + \frac{\Delta t^{2}}{2} \left(\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}\right)_{jk}^{n} - \frac{\Delta t^{3}}{6} \left(\frac{\partial^{3} u}{\partial t^{3}}\right)_{jk}^{n} + O(\Delta t^{4})$$

化简得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{jk}^{n} = \frac{\frac{3}{2}u_{jk}^{n+1} - 2u_{jk}^{n} + \frac{1}{2}u_{jk}^{n-1}}{\Delta t} - \Delta t \left(\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}}\right)_{jk}^{n} + \dots = \frac{\frac{3}{2}u_{jk}^{n+1} - 2u_{jk}^{n} + \frac{1}{2}u_{jk}^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

为方便起见,记

$$\eta_{\iota}u_{jk}^{n} = \frac{\frac{3}{2}u_{jk}^{n+1} - 2u_{jk}^{n} + \frac{1}{2}u_{jk}^{n-1}}{\Delta t}$$

它是一阶偏导数 $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{jk}^{n}$ 的一个差分近似式.

# 2 高精度差分格式的构造

利用上面的差分近似式和已知的差分近似式构造如下的差分格式来逼近方程(1)

$$\eta_{\iota}u_{jk}^{n} + \theta_{1}\Delta_{\iota}u_{jk}^{n} = \frac{1}{\Delta x^{2}} \left(\frac{\theta_{2}}{2}\Box + \theta_{3} \diamondsuit\right) u_{jk}^{n} + \frac{1}{\Delta x^{2}} \left(\frac{\theta_{4}}{2}\Box + \theta_{5} \diamondsuit\right) u_{jk}^{n-1}$$
(2)

$$\Delta_{i}u_{jk}^{n} = \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^{n}}{\Delta t}, \ \eta_{i}u_{jk}^{n} = \frac{\frac{3}{2}u_{jk}^{n+1} - 2u_{jk}^{n} + \frac{1}{2}u_{jk}^{n-1}}{\Delta t}, \ \theta_{i}(i = 1, \dots, 5) \ \text{b} \text{fr} \text{fr} \text{sb}.$$

将(2)式中各节点上的 u在节点( $j\Delta x$ ,  $k\Delta y$ ,  $n\Delta t$ )处作 Taylor 展开, 整理可得

$$(1+\theta_1)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(1+\frac{\theta_1}{2}\right)\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{6}(1+\theta_1)\Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = (\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5)\frac{\partial u}{\partial t} - (\theta_4+\theta_5)\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{6}(1+\theta_1)\Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^3} = (\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac$$

$$\frac{1}{12}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)\Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{12}[4(\theta_2 + \theta_4) - 2(\theta_3 + \theta_5)]\Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{2}(\theta_4 + \theta_5)\Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{1}{12}(\theta_4 + \theta_5)\Delta t\Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{1}{12}(-4\theta_4 + 2\theta_5)\Delta t\Delta x^2 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4}\right) + O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$$

令  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ,为了使格式的截断误差达到  $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$ ,下面方程组成立

$$\begin{cases} 1 + \theta_{1} = \theta_{2} + \theta_{3} + \theta_{4} + \theta_{5} \\ \left(1 + \frac{\theta_{1}}{2}\right)r = -\left(\theta_{4} + \theta_{5}\right)r + \frac{1}{12}\left(\theta_{2} + \theta_{3} + \theta_{4} + \theta_{5}\right) \\ \frac{1}{6}\left(1 + \theta_{1}\right)r^{2} = \frac{1}{2}\left(\theta_{4} + \theta_{5}\right)r^{2} - \frac{1}{12}\left(\theta_{4} + \theta_{5}\right)r \\ 2\left(\theta_{2} + \theta_{4}\right) - \left(\theta_{3} + \theta_{5}\right) = 0 \\ -4\theta_{4} + 2\theta_{5} = 0 \end{cases}$$

$$(3)$$

解方程组(3)可得

$$\theta_{1} = -\frac{96r^{2} - 18r + 1}{60r^{2} - 12r + 1} \qquad \theta_{2} = \frac{2r(-4r + 1)}{60r^{2} - 12r + 1} \qquad \theta_{3} = \frac{4r(-4r + 1)}{60r^{2} - 12r + 1} \\ \theta_{4} = \frac{-4r^{2}}{60r^{2} - 12r + 1} \qquad \theta_{5} = \frac{-8r^{2}}{60r^{2} - 12r + 1}$$

将各参数的值代回(2)式中,即得到一个截断误差为 $O(\Delta t^3 + \Delta x^4)$ 的三层显式差分格式

$$u_{jk}^{n+1} = \left[\frac{2(24r^2 - 6r + 1)}{1 - 12r^2} + \frac{2r^2(-4r + 1)}{1 - 12r^2}\Box + \frac{8r^2(-4r + 1)}{1 - 12r^2}\diamondsuit\right]u_{jk}^n + \left[-\frac{60r^2 - 12r + 1}{1 - 12r^2} - \frac{4r^3}{1 - 12r^2}\Box - \frac{16r^3}{1 - 12r^2}\diamondsuit\right]u_{jk}^{n-1}$$

$$(4)$$

# 3 差分格式的稳定性分析

下面利用 Fourier 分析法分析格式(4)的稳定性,首先写出与格式(4)等价的两层格式组

$$\begin{cases} u_{jk}^{n+1} = \left[\frac{2(24r^2 - 6r + 1)}{1 - 12r^2} + \frac{2r^2(-4r + 1)}{1 - 12r^2} \Box + \frac{8r^2(-4r + 1)}{1 - 12r^2} \diamondsuit\right] u_{jk}^n + \\ \left[-\frac{60r^2 - 12r + 1}{1 - 12r^2} - \frac{4r^3}{1 - 12r^2} \Box - \frac{16r^3}{1 - 12r^2} \diamondsuit\right] v_{jk}^n \end{cases}$$
(5)  
$$v_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n$$

取 $u_{jk}^{n} = U^{n} e^{i(j\theta + k\varphi)}$ ,  $v_{jk}^{n} = V^{n} e^{i(j\theta + k\varphi)}$ , 其中 $i = \sqrt{-1}$ , 通过计算可知  $\Box u_{jk}^{n} = -4s_{2}u_{jk}^{n}$ ,  $\Diamond u_{jk}^{n} = -4s_{1}u_{jk}^{n}$ , 代 人(5) 式并整理得

$$\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ V^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^k \\ V^k \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}(s_1, s_2) \begin{bmatrix} U^k \\ V^k \end{bmatrix}$$

其中:

$$g_{11} = \frac{2(24r^2 - 6r + 1)}{1 - 12r^2} - \frac{8r^2(-4r + 1)}{1 - 12r^2}s_2 - \frac{32r^2(-4r + 1)}{1 - 12r^2}s_1$$
$$g_{12} = -\frac{60r^2 - 12r + 1}{1 - 12r^2} + \frac{16r^3}{1 - 12r^2}s_2 + \frac{64r^3}{1 - 12r^2}s_1$$
$$g_{21} = 1 \qquad g_{22} = 0$$
$$s_1 = \sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}, \ s_1 \in [0, 2]$$
$$s_2 = \sin^2\frac{\theta + \varphi}{2} + \sin^2\frac{\theta - \varphi}{2}, \ s_2 \in [0, 2]$$

传播矩阵  $G(s_1, s_2)$  的特征方程为

$$\lambda^2 - g_{11}\lambda - g_{12} = 0 \tag{6}$$

**引理 1<sup>[13]</sup>**特征方程(6)的根满足 | λ<sub>1,2</sub> | ≤ 1 的充要条件是

$$g_{11} \mid \leq 1 - g_{12} \leq 2 \tag{7}$$

**引理 2**<sup>[13]</sup> 差分格式(4) 稳定,即矩阵族  $G^n(s_1, s_2)(0 \le s_1, s_2 \le 2, n = 1, 2, \dots)$ 一致有界的充要条件是

1) | λ<sub>1,2</sub> | ≤ 1(λ<sub>1,2</sub> 是方程(6) 的两个根).

2) 使  $1 - \frac{g_{11}^2}{4} = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$  成立的 $(s_1, s_2)$  或不存在,或不属于区域 $[0, 2] \times [0, 2]$ .

**定理1** 当  $r < \frac{1}{6}$  时差分格式(4) 稳定且收敛.

证 由引理 2 的条件 2) 可知,当  $g_{12} \neq -1$ 时, $1 - \frac{g_{11}^2}{4} = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 对所有的  $s_1$ 和  $s_2$ 都不成立, 因此由(7) 式知,格式(4) 稳定的条件为 $-1 + g_{12} \leq g_{11} \leq 1 - g_{12} < 2$ .

先讨论  $g_{11} \leq 1 - g_{12}$ ,可得

$$\frac{8r^2(6r-1)s_2 + 32r^2(6r-1)s_1}{1-12r^2} \leqslant 0 \tag{8}$$

为确定起见,不妨假定

$$1 - 12r^2 > 0$$

该式成立的条件是

$$0 < r < \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{9}$$

当(9) 式成立时,(8) 式可化简为

$$8r^2(6r-1)(s_2+4s_1) \leqslant 0$$

该式成立的条件为

$$r \leqslant \frac{1}{6} \tag{10}$$

综合考虑(9),(10) 式,可得当  $r \leq \frac{1}{6}$  时有  $g_{11} \leq 1 - g_{12}$ .

而当 
$$r \leq \frac{1}{6}$$
 再由  $1 - g_{12} < 2$  可得

$$-3(6r-1) + 4r^2s_2 + 16r^2s_1 > 0 \tag{11}$$

由  $s_1, s_2$  的取值范围可知, (11) 式成立的一个充分条件为  $r < \frac{1}{6}$ .

最后由
$$-1+g_{12} \leq g_{11}$$
可得

$$24r^{2} - 6r + 1 + 2r^{2}(2r - 1)(s_{2} + 4s_{1}) \ge 0$$
(12)

由  $s_1, s_2 \in [0, 2]$  和  $r < \frac{1}{6}$ , (12) 式成立的一个充分条件为

$$24r^2 - 6r + 1 + 20r^2(2r - 1) \ge 0$$

也即

$$40r^3 + 4r^2 - 6r + 1 \ge 0 \tag{13}$$

而当 $r < \frac{1}{6}$ 时, (13) 式恒成立.

综上所述,由Lax的稳定性与收敛性定理,定理1得证.

### 4 数值算例

在本节中,通过两个数值算例,利用 MATLAB 软件进行数值模拟,将本文提出的格式(4) 与文献[11]

和文献[12]格式进行比较,进一步证明本文提出的格式是一种高精度的差分格式.

### 例1 考虑如下带有初边值问题的二维热传导方程

数值解与精确解之间的绝对误差及3种格式所花费的时间(表1).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ (0 < x, \ y < 1, \ t > 0) \\ u(x, \ y, \ 0) = \sin(x + y), \ (0 \leqslant x, \ y \leqslant 1) \\ u(0, \ y, \ t) = e^{-2t} \sin y, \ u(1, \ y, \ t) = e^{-2t} \sin(1 + y), \ (0 \leqslant y \leqslant 1, \ t \ge 0) \\ u(x, \ 0, \ t) = e^{-2t} \sin x, \ u(x, \ 1, \ t) = e^{-2t} \sin(x + 1), \ (0 \leqslant x \leqslant 1, \ t \ge 0) \end{cases}$$
(14)

在本例中取 Δx = Δy = 0.05,  $r = \frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{5}$ , 由 Δt = rΔ x<sup>2</sup> 可知 Δt 的取值分别为 $\frac{1}{4800}$ ,  $\frac{1}{4000}$ ,  $\frac{1}{2800}$ ,  $\frac{1}{2000}$ , 为方便计算, 第一层的值  $u_{jk}^{1}$  利用方程(14)的精确解  $u(x, y, t) = e^{-2t} \sin(x + y)$ 计算得 到. 将本文格式、文献[11]格式及古典显格式进行比较,分别计算层数 n = 800 时,部分节点处 3 种格式的

CPU 时间/ (x, y)项目 r (0.15, 0.15) (0.35, 0.35)(0.55, 0.55)(0.75, 0.75)s 1 1.975 047e-10 格式(4) 7.109 244e-10 9.558 904e-10 6.492 074e-10 8.450 747 12 文献[11]格式 6.033 943e-10 2.171 964e-09 2.920 318e-09 1.983 292e-09 8.493 206 古典显格式 2.191 072e-10 7.884 783e-10 1.059 976e-09 7.196 020e-10 8.171 446 1 格式(4) 3.897 061e-10 6.841 191e-10 9.176 982e-10 6.194 003e-10 8.418 364 10 文献[11]格式 1.264 302e-09 4.559 371e-09 6.116 015e-09 4.127 886e-09 8.556 216 古典显格式 7.571 654e-07 2.729 784e-06 3.661 203e-06 2.470 183e-06 8.279 274  $\frac{1}{7}$ 格式(4) 1.640 623e-10 5.926 370e-10 7.932 438e-10 5.323 070e-10 8.395 074 文献[11]格式 4.402 095e-10 1.590 163e-09 2.128 414e-09 1.428 244e-09 8.366 890 古典显格式 2.335 418e-06 8.433 934e-06 1.128 709e-05 7.571 601e-06 8.240 116  $\frac{1}{5}$ 格式(4) 溢出 溢出 溢出 溢出 文献[11]格式 溢出 溢出 溢出 溢出 古典显格式 3.663 315e-06 1.323 454e-05 1.770 268e-05 1.185 925e-05 8.343 550

表 1 在  $\Delta x = \Delta y = 0.05$ , n = 800 时 3 种格式数值解与精确值的误差绝对值和计算效率的比较

从表 1 中我们可以看到, r 在稳定性范围内时,本文格式比文献[11]格式和古典显式格式具有更高的 精度,而当 $r = \frac{1}{5}$ 时,本文格式与文献[11]格式均不稳定,故数值解溢出.在机器耗时方面,古典显式格式 是一个两层格式,计算效率最高,而本文格式与文献[11]格式均为三层格式,计算效率差别不大,但都比 古典显式格式低.

例 2

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \ 0 < x, \ y < \pi, \ t > 0 \\ u(x, \ y, \ 0) = \sin x \ \sin y, \ 0 \le x, \ y \le \pi \\ u(0, \ y, \ t) = u(\pi, \ y, \ t) = 0, \ 0 \le y \le \pi, \ t \ge 0 \\ u(x, \ 0, \ t) = u(x, \ \pi, \ t) = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0 \end{cases}$$
(15)

为验证差分格式(4)的空间精度与时间精度,取 $r = \frac{1}{8}$ ,  $\Delta x$ 分别等于 $\frac{\pi}{10}$ ,  $\frac{\pi}{20}$ ,  $\frac{\pi}{40}$ ,  $\frac{\pi}{80}$ , 由 $\Delta t = r\Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{8}$ ,可知 $\Delta t$ 分别等于 $\frac{\pi^2}{800}$ ,  $\frac{\pi^2}{3\ 200}$ ,  $\frac{\pi^2}{12\ 800}$ ,  $\frac{\pi^2}{51\ 200}$ , 为方便计算,第一层的值 $u_{jk}^1$ 利用方程(15)的精确解 $u(x, y, t) = e^{-r} \sin x \sin y$ 来计算.利用本文格式、文献[12]格式计算到层数n = 500时,在部分节点处将

这两种格式的数值解与精确解进行比较,结果如表 2. 从表 2 可以看出,当 $r = \frac{1}{8}$ ,本文格式相比文献[12]格

式精度更高,随着 Δx 的逐渐减小,本文格式的数值解与精确解越来越接近,也验证了本文格式的收敛性. 表 2 算例 2 中本文格式与文献[12]格式和精确解之间的比较

		(x, y)				
$\Delta x$	项目	$\left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}\right)$	$\left(\frac{9\pi}{10}, \ \frac{9\pi}{10}\right)$
$\frac{\pi}{10}$	精确解	1.999 944e-04	0.001 370 782 5	0.002 094 369 4	0.001 370 782 5	1.999 944e-04
	格式(4)解	1.999 891e-04	0.001 379 375 1	0.002 094 219 0	0.001 379 375 1	1.999 891e-04
	文献[12]	1.998 215e-04	0.001 369 597 2	0.002 092 558 4	0.001 369 597 2	1.998 215e-04
$\frac{\pi}{20}$	精确解	0.020 428 103 5	0.140 016 305 0	0.213 925 878 1	0.140 016 305 0	0.020 428 103 5
	格式(4)解	0.020 428 782 9	0.140 016 107 0	0.213 925 520 0	0.140 016 107 0	0.020 428 782 9
	文献[12]	0.020 427 833 0	0.140 014 450 8	0.213 923 045 2	0.140 014 450 8	0.020 427 833 0
$\frac{\pi}{40}$	精确解	0.064 942 732 6	0.445 124 111 7	0.680 089 125 8	0.445 124 111 7	0.064 942 732 6
	格式(4)解	0.064 942 736 8	0.445 124 103 1	0.680 088 959 9	0.445 124 103 1	0.064 942 736 8
	文献[12]	0.064 942 719 3	0.445 124 020 0	0.680 088 985 8	0.445 124 020 0	0.064 942 719 3
$\frac{\pi}{80}$	精确解	0.086 717 387 5	0.594 369 816 5	0.908 116 272 2	0.594 369 816 5	0.086 717 387 5
	格式(4)解	0.086 717 387 5	0.594 369 816 3	0.908 116 268 7	0.594 369 816 3	0.086 717 387 5
	文献[12]	0.086 717 387 2	0.594 369 814 6	0.908 116 269 2	0.594 369 814 6	0.086 717 387 2

从以上两个数值算例可以看出,本文格式的收敛性及稳定性与理论分析一致,说明本文格式是一种有 效的差分格式.

#### 参考文献:

- [1] 陆金甫,关治. 偏微分方程数值解法 [M]. 2 版. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [2] 戴嘉尊,邱建贤. 微分方程数值解法 [M]. 南京:东南大学出版社, 2002.
- [3] ZHU L Y, JU L L, ZHAO W D. Fast High-Order Compact Exponential Time Differencing Runge-Kutta Methods for Second-Order Semilinear Parabolic Equations [J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 67(3): 1043-1065.
- [4] JAKUBËLIENË K, ĈIUPAILA R, SAPAGOVAS M. Semi-Implicit Difference Scheme for a Two-Dimensional Parabolic Equation with an Integral Boundary Condition [J]. Mathematical Modelling and Analysis, 2017, 22(5): 617-633.
- [5] ZHAO X P, LIU F N, LIU B. Finite Difference Discretization of a Fourth-Order Parabolic Equation Describing Crystal Surface Growth [J]. Applicable Analysis, 2015, 94(9): 1964-1975.
- [6] LIAO H L, SUN Z Z. Maximum Norm Error Bounds of ADI and Compact ADI Methods for Solving Parabolic Equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2010, 26(1): 37-60.
- [7] SAJAVIĈIUS S. Stability of the Weighted Splitting Finite-Difference Scheme for a Two-Dimensional Parabolic Equation with Two Nonlocal Integral Conditions [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2012, 64(11): 3485-3499.
- [8] SAPAGOVAS M, JAKUBËLIENË K. Alternating Direction Method for Two-Dimensional Parabolic Equation with Nonlocal Integral Condition [J]. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2012, 17(1): 91-98.
- [9] MA M S, MA J Y, GU S M. A High-Order Accuracy Explicit Difference Scheme with Branching Stability for Solving Higher-Dimensional Heat-Conduction Equation [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2008, 23(3): 446-452.
- [10] 詹涌强. 二维抛物型方程的一族高精度分支稳定显格式 [J]. 高等学校计算数学学报, 2021, 43(1): 16-27.
- [11] 詹涌强, 谭志明, 陈妙玲. 二维抛物型方程的高精度显式差分格式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(5): 6-10.
- [12] 马明书, 申培萍, 张利霞. 二维抛物型方程的高精度分支稳定显格式 [J]. 工程数学学报, 1999, 16(3): 139-142.
- [13] 马驷良. 二阶矩阵族 G<sup>n</sup>(k, Δt)-致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用 [J]. 高等学校计算数学学报, 1980, 2(2): 41-54.

### 责任编辑 张枸