

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.07.012

一个连续离散时间模型的传播速度和行波解

王明龙, 黄启华

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 许多物种具有相对独立的扩散和成长季节, 建立了具有阶段结构的脉冲反应-扩散种群模型. 讨论了模型正常数平衡解的存在性, 研究了种群的传播速度 c^* . 最后证明了行波解的存在性.

关键词: 混合模型; 正常数平衡解; 传播速度; 行波解

中图分类号: O175.26

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2022)07-0112-06

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Spreading Speed and Traveling Wave Solution of a Continuous-Discrete Time Model

WANG Minglong, HUANG Qihua

College of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Many species have relatively independent diffusion and growth seasons. In this paper, we formulated an impulsive reaction-diffusion population model with stage structure. The existence and uniqueness of the positive constant equilibrium solution of the model were discussed. The spreading speed of population was studied. Finally, we proved the existence of traveling wave solution.

Key words: impulsive reaction-diffusion equation; positive constant equilibrium; spreading speed; traveling wave

一个生物种群的繁殖、死亡和扩散如何影响其持久性和空间传播是空间生态学中一个非常重要的问题^[1-2], 数学模型在研究此类问题以及空间生态学理论中发挥了重要作用. 其中一类传统的研究空间种群动力学行为的模型是反应-扩散方程模型, 该类模型假设种群的成长和扩散是同时发生的. 然而, 许多物种的繁殖和扩散发生在一年中的不同季节, 例如哺乳动物和水生物种等. 此时, 经典的反应-扩散方程不适合用来描述这些种群的持久性和空间传播等性质. 在文献[3]中, 作者建立了以下具有不同繁殖和扩散的脉冲反应-扩散模型

收稿日期: 2020-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(11871060).

作者简介: 王明龙, 硕士研究生, 主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者: 黄启华, 博士, 教授.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \alpha u_n - \gamma u_n^2, & -\infty < x < +\infty \\ u_n(x, 0) = g(N_n(x)) \\ N_{n+1}(x) = u_n(x, 1) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u_n(x, t)$ (模型(1) 为了记号方便写成 u_n) 表示扩散阶段第 n 年, 时间为 $t \in [0, 1]$, 位置在 x 的种群密度; $N_n(x)$ 表示第 n 年生殖阶段开始时 x 点的种群密度. 并研究了模型(1) 的传播速度、行波解和临界区域尺寸(确保种群持续生存最小的空间尺寸). 模型(1) 的非扩散阶段由离散映射 g 描述, 映射 g 综合了种群的繁殖和生长过程.

近年来阶段结构模型^[4-6] 受到越来越多的重视. 这些模型大多将物种生长分为两个阶段. 许多具有高度结构化生命周期的物种包含多个成长阶段, 在不同的成长阶段, 它们的繁殖率和扩散能力显著不同, 一般在其早期阶段(例如植物的种子) 通过扩散来入侵新的栖息地, 扩散结束后移动范围很小, 通常使用差分方程描述生长过程. 文献[7] 提出了具有阶段结构的连续离散种群模型, 将贝壳类生物分为 3 个生长阶段, 即贝壳类生物扩散的早期的扩散阶段、降落后到性成熟前的幼年阶段和具有繁殖能力的成年阶段.

本文模型生命周期也分为 3 个生长阶段: $u_n(x, t)$ 表示物种扩散早期阶段(例如植物的种子, 浮游生物) 的种群密度, $J_n(x)$ 表示物种扩散完成后静止下来一直到具有繁殖能力前这一阶段(幼年阶段) 的种群密度, $A_n(x)$ 表示物种在有繁殖能力阶段(成年阶段) 的种群密度. 我们对模型(1) 进行延伸, 建立如下多阶段的脉冲反应-扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - m u_n - \gamma u_n^2, & t \in (0, T), -\infty < x < +\infty \\ J_{n+1}(x) = s_1 u_n(x, T) + s_2 J_n(x) \\ A_{n+1}(x) = s_3 J_n(x) + s_4 A_n(x) \\ u_n(x, 0) = f(A_n(x)) \end{cases} \quad (2)$$

这里以植物种群为例: $u_n(x, t)$ 表示第 n 年 t 时刻, 位置在 x 的种子密度; $J_n(x)$ 和 $A_n(x)$ 分别表示第 n 年位置在 x 的幼年和成年阶段的植物种群密度; 扩散系数 $d > 0$, 扩散周期 $T \leq 1$, m 表示扩散过程中由于种子与环境相互作用导致的死亡率, γ 表示扩散过程中由于种子个体间竞争导致的死亡率; s_1 表示种子个体生长到幼年阶段的概率, s_2 和 s_4 分别表示植物幼年和成年个体存活到本阶段下一年的概率, s_3 表示幼年个体生长到成年阶段的概率; f 表示脉冲出生函数.

模型(2) 的第一个方程描述了植物种子的扩散和死亡; 第二和第 3 个方程描述植物种群的存活和生长; 最后一个方程描述了繁殖季节成年植物个体生育种子的过程. 模型(2) 也可用来描述湖泊中贝壳类生物等. 本文主要研究模型在正常数平衡解存在的前提下, 通过对模型线性化的方法, 使用模型参数给出了种群传播速度的具体表达式, 模型的解映射是非紧的, 可以通过应用弱紧性理论^[8-9] 得到行波解的存在性.

对模型作如下假设:

(i) m 和 γ 是正数. $0 < s_1 < 1$, $0 < s_2 < 1$, $0 < s_3 < 1$, $0 < s_4 < 1$, 并且 $0 < s_2 + s_3 < 1$.

(ii) 对于 $A \geq 0$, $f(A)$ 是连续且非减的, $f(0) = 0$, $f(A)$ 在 0 处可微并且 $f'(0) > 0$, $\frac{f(A)}{A}$ 关于 $A > 0$ 是非增的.

使用 Q_1 表示下列初值问题的时间 T 解映射

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - m u_n - \gamma u_n^2, & t \in (0, T), -\infty < x < +\infty \\ u_n(x, 0) = f(A_n(x)) \end{cases} \quad (3)$$

则有 $u_n(x, T) = Q_1[f(A_n(x))]$, 定义向量值算子

$$Q[N_n](x) = \begin{pmatrix} s_1 Q_1[f(A_n(x))] + s_2 J_n(x) \\ s_3 J_n(x) + s_4 A_n(x) \end{pmatrix} \quad (4)$$

这里 $N_n = (J_n, A_n)^T$. 因此模型(2) 能写成递推形式

$$\mathbf{N}_{n+1}(x) = \mathbf{Q}[\mathbf{N}_n](x) \quad (5)$$

1 正常数平衡解

若种群没有扩散, 即 $d = 0$, 则模型(2)退化为:

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} = -mu_n - \gamma u_n^2, t \in (0, T) \\ J_{n+1} = s_1 u_n(T) + s_2 J_n \\ A_{n+1} = s_3 J_n + s_4 A_n \\ u_n(0) = f(A_n) \end{cases} \quad (6)$$

根据模型(6)的第一和第四个方程可以求得

$$u_n(T) = \frac{mf(A_n)}{\gamma(e^{mT} - 1)f(A_n) + me^{mT}} \quad (7)$$

将(7)式代入模型(6)第二个方程, 得到

$$\begin{cases} J_{n+1} = \frac{s_1 mf(A_n)}{\gamma(e^{mT} - 1)f(A_n) + me^{mT}} + s_2 J_n \\ A_{n+1} = s_3 J_n + s_4 A_n \end{cases} \quad (8)$$

模型(8)总是有平凡解 $\mathbf{0}$. 下面考虑非平凡解, (6)式或(8)式的一个正常数平衡解是下列平衡方程

$$\begin{cases} J = \frac{s_1 mf(A)}{\gamma(e^{mT} - 1)f(A) + me^{mT}} + s_2 J \\ A = s_3 J + s_4 A \end{cases} \quad (9)$$

的一个正根. 将(9)式的第二个方程代入到第一个方程得

$$\gamma(e^{mT} - 1)A + me^{mT} \frac{A}{f(A)} - \frac{ms_1 s_3}{(1 - s_2)(1 - s_4)} = 0$$

等价于

$$G(A, f(A)) = 0 \quad (10)$$

这里

$$G(A, f(A)) = \gamma(e^{mT} - 1)A + me^{mT} \frac{A}{f(A)} - \frac{ms_1 s_3}{(1 - s_2)(1 - s_4)}$$

因为 $\frac{A}{f(A)}$ 关于 $A > 0$ 是非减的, 所以 $G(A, f(A))$ 关于 $A > 0$ 是非减的, 并且当 $A \rightarrow +\infty$ 时有 $G(A, f(A)) \rightarrow +\infty$. 因此(10)式存在唯一正常数平衡解的充要条件是当 $A \rightarrow 0$ 时, $G(A, f(A))$ 是负的, 即

$$\frac{s_1 s_3 f'(0)}{(1 - s_2)(1 - s_4)} e^{-mT} > 1 \quad (11)$$

所以当(11)式成立时, 正常数平衡解存在, 定义为 $\boldsymbol{\beta}^* = (J^*, A^*)^T$.

2 传播速度

本节考虑在无界区域种群的传播速度, 模型(2)在 $\mathbf{0}$ 处的线性化模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - mu_n, t \in (0, T), -\infty < x < +\infty \\ J_{n+1}(x) = s_1 u_n(x, T) + s_2 J_n(x) \\ A_{n+1}(x) = s_3 J_n(x) + s_4 A_n(x) \\ u_n(x, 0) = f'(0)A_n(x) \end{cases} \quad (12)$$

对线性模型(12)式求解得到下列积分差分模型

$$\begin{cases} J_{n+1}(x) = s_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mT} k(x-y) f'(0) A_n(y) dy + s_2 J_n(x), & -\infty < x < \infty \\ A_{n+1}(x) = s_3 J_n(x) + s_4 A_n(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (13)$$

这里 $k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi dT}} e^{-\frac{x^2}{4dT}}$ 是正态分布函数. 从而算子 Q 在 $\mathbf{0}$ 处线性化得

$$L[\mathbf{N}_n](x) = \begin{pmatrix} s_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mT} k(x-y) f'(0) A_n(y) dy + s_2 J_n(x) \\ s_3 J_n(x) + s_4 A_n(x) \end{pmatrix} \quad (14)$$

引入对应线性化算子的矩母矩阵 $\mathbf{B}_\mu$, 使其满足下列条件: 对于每个常数向量 α ,

$$\mathbf{B}_\mu \alpha = L[\alpha e^{-\mu x}]|_{x=0}$$

因此

$$\mathbf{B}_\mu = \begin{pmatrix} s_2 & s_1 f'(0) e^{-mT} K(\mu) \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

这里

$$K(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu x} k(x) dx = e^{dT_\mu^2}$$

其中 $K(\mu)$ 是 $k(x)$ 的矩母函数.

$\mathbf{B}_\mu$ 的主特征值 $\lambda(\mu)$ 满足

$$\lambda(\mu) = \frac{(s_2 + s_4) + \sqrt{(s_2 - s_4)^2 + 4s_1 s_3 f'(0) e^{dT_\mu^2 - mT}}}{2}$$

命题 1 若条件(11)成立, 则 $\mathbf{B}_\mu$ 的主特征值 $\lambda(\mu) > 1$.

证 从 $\lambda(\mu)$ 的表达式可以看出它在 $\mu=0$ 有最小值. 所以只需证明 $\lambda(0) > 1$. 根据条件(11)有下列式子等价

$$\begin{aligned} \frac{s_1 s_3 f'(0)}{(1-s_2)(1-s_4)} e^{-mT} &> 1 \\ s_1 s_3 f'(0) e^{-mT} &> 1 - (s_2 + s_4) + s_2 s_4 \\ 4s_1 s_3 f'(0) e^{-mT} - 4s_2 s_4 &> 4 - 4(s_2 + s_4) \\ (s_2 + s_4)^2 + 4s_1 s_3 f'(0) e^{-mT} - 4s_2 s_4 &> (s_2 + s_4)^2 + 4 - 4(s_2 + s_4) \\ (s_2 - s_4)^2 + 4s_1 s_3 f'(0) e^{-mT} &> [2 - (s_2 + s_4)]^2 \\ \sqrt{(s_2 - s_4)^2 + 4s_1 s_3 f'(0) e^{-mT}} &> 2 - (s_2 + s_4) \\ \frac{(s_2 + s_4) + \sqrt{(s_2 - s_4)^2 + 4s_1 s_3 f'(0) e^{-mT}}}{2} &> 1 \end{aligned}$$

因此 $\lambda(\mu) \geq \lambda(0) > 1$. 证明完毕.

$\mathbf{B}_\mu$ 的主特征值 $\lambda(\mu)$ 满足

$$\mathbf{B}_\mu \mathbf{N} = \lambda(\mu) \mathbf{N} \quad (16)$$

这里 $\mathbf{N} = (J, A)^T$. 将(16)式写成下列形式:

$$\begin{aligned} s_2 J + s_1 e^{-mT} f'(0) K(\mu) A &= \lambda(\mu) J \\ s_3 J + s_4 A &= \lambda(\mu) A \end{aligned} \quad (17)$$

通过化简, (17)式等价于

$$\frac{s_2}{\lambda(\mu)} + \frac{s_1 s_3 e^{-mT} f'(0) K(\mu)}{\lambda(\mu)[\lambda(\mu) - s_4]} = 1 \quad (18)$$

引理 1 若假设(i),(ii)成立, 则 $\lambda(\mu)$ 是严格对数凸的.

证 文献[10]的引理6.4表明 $\lambda(\mu)$ 是对数凸的, 即对于 $0 < t < 1$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in I = (-\infty, +\infty)$,

$$\lambda(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) \leq \lambda^t(\mu_1) \lambda^{1-t}(\mu_2) \quad (19)$$

反证, 若(19) 式中的等号成立, 则(18) 式可写成

$$1 = \frac{s_2}{\lambda(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)} + \frac{s_1 s_3 e^{-mT} f'(0) K(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)}{\lambda(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) [\lambda(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) - s_4]} =$$

$$\frac{s_2^t s_2^{1-t}}{\lambda^t(\mu_1) \lambda^{1-t}(\mu_2)} + \frac{(s_1 s_3 e^{-mT} f'(0))^t (s_1 s_3 e^{-mT} f'(0))^{1-t} K(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)}{\lambda^t(\mu_1) \lambda^{1-t}(\mu_2) [\lambda^t(\mu_1) \lambda^{1-t}(\mu_2) - s_4^t s_4^{1-t}]} \quad (20)$$

由于 $K(\mu)$ 满足 $K(\mu)K''(\mu) > (K'(\mu))^2$, 所以 $K(\mu)$ 是严格对数凸函数, 即

$$K(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) < K^t(\mu_1) K^{1-t}(\mu_2)$$

对(20) 式应用赫尔德不等式得

$$1 < \left\{ \frac{s_2}{\lambda(\mu_1)} + \frac{s_1 s_3 e^{-mT} f'(0) K(\mu_1)}{\lambda(\mu_1) [\lambda(\mu_1) - s_4]} \right\}^t \times$$

$$\left\{ \frac{s_2}{\lambda(\mu_2)} + \frac{s_1 s_3 e^{-mT} f'(0) K(\mu_2)}{\lambda(\mu_2) [\lambda(\mu_2) - s_4]} \right\}^{1-t} \quad (21)$$

通过(18), (21) 式得出 $1 < 1$, 这是矛盾的. 所以 $\lambda(\mu)$ 是严格对数凸的. 证明完毕.

根据文献[10], 定义

$$c^* := \inf_{\mu > 0} \Phi(\mu) \quad (22)$$

这里

$$\Phi(\mu) = \frac{\ln(\lambda(\mu))}{\mu} = \frac{\ln\left(\frac{(s_2 + s_4) + \sqrt{(s_2 - s_4)^2 + 4s_1 s_3 f'(0) e^{dT\mu^2 - mT}}}{2}\right)}{\mu}$$

当 $\mu \rightarrow 0^+$, $\Phi(\mu) \rightarrow +\infty$; 当 $\mu \rightarrow +\infty$, $\Phi(\mu) \rightarrow +\infty$. $\Phi(\mu)$ 是严格对数凸和文献[10] 中的引理 6.5 表明, $\Phi(\mu)$ 在有限数 $\bar{\mu}$ 能取得最小值使得 $\Phi(\mu)$ 在 $(0, \bar{\mu})$ 是严格递减, 在 $\mu > \bar{\mu}$ 是严格递增的.

定理 1 若假设(i), (ii) 成立, 并且满足条件(11), 则种群传播速度 c^* 由(22) 式给定, 该传播速度 c^* 可以用数学语言描述如下: 若连续初值函数 $N_0(x)$ 在有界区域外是 $\mathbf{0}$, 但是 $N_0(x) \not\equiv \mathbf{0}$, 并且 $\mathbf{0} \leq N_0(x) < \beta^*$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 系统(2) 的解 $N_n(x)$ 具有下列性质:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq n(c^* + \varepsilon)} \{J_n(x) + A_n(x)\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq n(c^* - \varepsilon)} \{|A^* - A_n(x)| + |J^* - J_n(x)|\} = 0 \quad (23)$$

证 因为初值条件 $f(A_n) \leq f'(0)A_n$ 和 $-mu_n - \gamma u_n^2 \leq -mu_n$, 所以根据比较原理得

$$Q[N_n](x) \leq L[N_n](x)$$

根据文献[3] 中定理 2.1 的证明过程可得 $Q_1[f(\theta A_n)](x) \geq \theta Q_1[f(A_n)](x)$, $0 < \theta \leq 1$, 因此有

$$Q[\theta N_n](x) \geq \theta Q[N_n](x)$$

定义 $L_1^{(\kappa)} := \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)L_1$, $\kappa \in \mathbb{N}^+$. 则存在 $b \in (0, A^*)$, 对充分大的 κ 使得

$$Q_1[f(A)](x) \geq L_1^{(\kappa)}[A](x), \quad 0 \leq A \leq b$$

从而存在向量值函数 $v(x)$,

$$Q[v](x) \geq \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)L[v](x), \quad \mathbf{0} \leq v(x) \leq \beta^*$$

这里 $\beta^* := (b, b)^T$. 综上所述, 从文献[10] 中的定理 3.1—3.4 和命题 3.3 得到模型(2) 具有定义为(22) 满足性质(23) 的传播速度, 证明完毕.

3 行波解

本节研究模型(2) 具有波速为 c 的行波解 $N_n(x) = w(x - nc)$, 模型(2) 能被写成

$$Q[N_n](x) = \begin{pmatrix} s_1 Q_1[f(A_n)](x) + s_2 J_n(x) \\ s_3 J_n(x) + s_4 A_n(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} s_2 & s_1 Q_1[f(\cdot)] \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n(x) \\ A_n(x) \end{pmatrix} \quad (24)$$

可以看出 Q 不是紧算子. 但是因为 Q_1 是紧算子, 并且 $\max\{s_2, s_3, s_4\} < 1$, 根据非紧性 Kuratowski 测度的性质, 所以 Q 满足文献[8]中弱紧性的条件. 模型(2)是单调动力系统, $Q[0]=0$, $Q[\beta^*]=\beta^*$ 并且在 0 , β^* 之间没有其他不动点, Q 具有保序性、平移不变性和连续性等性质. 因此能从[8]中的定理 4.1 和定理 4.2 得到如下结论

定理 2 若假设 (i),(ii) 以及条件(11) 成立, 则有下列结论:

- 1) 若 $c \geq c^*$, 模型(2) 存在连续非增行波解 $w(x - nc)$, 满足 $w(-\infty) = \beta^*$, $w(+\infty) = 0$.
- 2) 若 $c < c^*$, 模型(2) 不存在满足 $w(-\infty) = \beta^*$, $w(+\infty) = 0$ 的连续非增行波解 $w(x - nc)$.

4 结论与讨论

本文研究了具有阶段结构的脉冲反应扩散种群模型, 在正常数平衡解存在的前提下, 通过将模型线性化, 然后通过线性确定性讨论了种群的传播速度, 又由递推算子的弱紧性得出行波解的存在性. 本文中的出生函数是单调非减的并且扩散阶段为自由扩散, 也可讨论出生函数为非单调的和扩散阶段为非局部扩散的情形.

参考文献:

- [1] DYTAMC, SHIGESADA N, KAWASAKI K. Biological Invasions: Theory and Practice [J]. The Journal of Animal Ecology, 1997, 66(6): 918.
- [2] MURRAY J D. Mathematical Biology [M]. New York: Springer New York, 2003.
- [3] LEWIS M A, LI B T. Spreading Speed, Traveling Waves, and Minimal Domain Size in Impulsive Reaction-Diffusion Models [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2012, 74(10): 2383-2402.
- [4] LI K, LI X. Traveling Wave Solutions in a Reaction-Diffusion Competition-Cooperation System with Stage Structure [J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2018, 35(1): 157-193.
- [5] AL-OMARIJFM, GOURLEY S A. Stability and Traveling Fronts in Lotka-Volterra Competition Models with Stage Structure [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2003, 63(6): 2063-2086.
- [6] LIU S Q, CHEN L S, LIU Z J. Extinction and Permanence in Nonautonomous Competitive System with Stage Structure [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 274(2): 667-684.
- [7] HUANG Q H, WANG H, LEWIS M A. A Hybrid Continuous/Discrete-Time Model for Invasion Dynamics of Zebra Mussels in Rivers [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2017, 77(3): 854-880.
- [8] LIANG X, ZHAO X Q. Spreading Speeds and Traveling Waves for Abstract Monostable Evolution Systems [J]. Journal of Functional Analysis, 2010, 259(4): 857-903.
- [9] NUSSBAUM R D. The Fixed Point Index and Asymptotic Fixed Point Theorems for K-Set-Contraactions [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1969, 75(3): 490-496.
- [10] LUI R. Biological Growth and Spread Modeled by Systems of Recursions. I. Mathematical Theory [J]. Mathematical Biosciences, 1989, 93(2): 269-295.

责任编辑 张构