DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2022.07.013

含参数集值向量优化问题超有效点集的连通性

吴昌耀[1,2], 陈剑尘[1], 何焕民[2]

1. 南昌航空大学,数学与信息科学学院,南昌 330063;2. 汕头市林百欣科学技术中等专业学校,广东 汕头 515057

摘要:研究了含参数集值向量优化问题超有效点集的连通性.首先,在 Hausdorff 局部凸的拓扑线性空间中,给出了含参数的超有效点集的概念.然后,在参数扰动且含参数的目标集值映射为锥弧连通的条件下,讨论了含参数的超有效点集的连通性.最后,给出了含参数集值向量优化问题超有效点集的连通性定理.

关 键 词:向量优化;含参超有效点;C-弧连通;连通性;集值映射

中图分类号:O224 **文献标志码**:A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文 章 编 号:1673-9868(2022)07-0118-08

Connectedness of Super Efficient Point Sets for Set-Valued Vector Optimization Problems with Parameters

WU Changyao[1,2], CHEN Jianchen[1], He Huanmin[2]

1. School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China;
2. Shantou Linbaixin Science and Technology Secondary Vocational School, Shantou Guangdong 515057, China

Abstract: In this paper, we study the connectedness of super efficient point sets for set-valued vector optimization problems with parameters. Firstly, in Hausdorff locally convex topological linear space, the concept of super efficient point set with parameters is given. Then, under the condition that the parameters are perturbed and the objective set-valued mapping with parameters is cone-arc-connected, the connectedness of super efficient point sets with parameters is discussed. Finally, the connectedness theorem of super efficient point sets for set-valued vector optimization problems with parameters is given.

Key words: vector optimization; Super efficient points with parameters; C-arc-connected; connectedness; set-valued mapping

关于集值向量最优化问题,自文献[1-2],在赋范向量空间中,给出超有效点的相关定义以来,已有不

收稿日期:2020-10-09
基金项目:国家自然科学基金项目(11061023);江西省自然科学基金项目(2010GZS0176);江西省教育厅科技项目(GJJ171544);南昌航空大学研究生创新专项(YC2019037).
作者简介:吴昌耀,硕士研究生,主要从事向量优化,非线性分析的研究.

少专家和学者对超有效性进行研究[3-6]．受文献[6]启发，本文对含参数的集值向量优化问题超有效点集的连通性进行研究．首先，引入含参数超有效点集的相关概念，然后，在含参数的目标集值映射是 C-弧连通的，可行域为弧连通紧且参数扰动的情况下，证明了含参数集值向量优化问题的超有效点集的连通性．

1　预备知识

本文假设 X，Y 和 Z 均为 Hausdorff 局部凸的拓扑线性空间，Y^* 为 Y 的拓扑对偶空间．$N(0)$ 为 Y 的零点邻域基．设 $M \subset Y$ 且 $M \neq \varnothing$，分别用 $\mathrm{int}(M)$，$\mathrm{cl}(M)$，$\mathrm{conv}(M)$，表示 M 的内部、闭包以及凸包．由 M 生成的锥记为 $\mathrm{cone}(M)=\{lm: l \geqslant 0,\ m \in M\}$．

设 $C \subset Y$ 为非空闭凸点锥，且 $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$(其中 $\mathrm{int}(C)$ 表示 C 的内部)．C^* 为 C 的拓扑对偶锥，记为

$$C^*=\{f \in Y^*: f(c) \geqslant 0,\ \forall c \in C\}$$

$C^\#$ 为 C 的对偶锥 C^* 的拟内部，记为

$$C^\#=\{f \in Y^*: f(c) > 0,\ \forall c \in C\backslash\{0\}\}$$

非空凸子集 $B \subseteq C$ 称为 C 的基，若 $C=\mathrm{cone}(B)$ 且 $0 \notin \mathrm{cl}(B)$．显然有：

(i) $C^\# \subset C^*$；

(ii) 有基底的锥一定是点锥．

另外，以下结论也是成立的：

(i) $C^\# \neq \varnothing \Leftrightarrow C$ 有基；

(ii) $\mathrm{int}(C^*) \neq \varnothing \Leftrightarrow C$ 具有有界基．

定义 1[7]　设 $D \subset Y$ 为非空子集．$y^* \in D$ 称为 D 关于 C 的有效点，记为 $y^* \in E(D, C)$，如果 $(D-y^*) \cap (-C) \subset C$．如果 C 为点锥，则 $y^* \in D$ 为有效点 $\Leftrightarrow (y^*-D) \cap C=\{0\} \Leftrightarrow (y^*-C) \cap D=\{y^*\}$．

定义 2[7]　设 $D \subset Y$ 为非空子集．$y^* \in D$ 称为 D 关于 C 的超有效点，记为 $y^* \in SE(D, C)$，设 $N(0)$ 是 Y 的零点邻域基，若对 $\forall V \in N(0)$，都 $\exists U \in N(0)$，使得

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(D-y^*)) \cap (U-C) \subset V$$

注 1　显然，超有效点必为有效点，即 $SE(D, C) \subset E(D, C)$．反之不成立．

引理 1[3]　设 $D \subset Y$ 为非空子集，$C \subset Y$ 是闭凸点锥，且 C 有有界基 B，则

$$SE(D, C)=SE(D+C, C)$$

接下来，我们介绍一下集值映射的一些基本概念和结论．

定义 3　设 $A \subset X$ 为非空的凸子集，$C \subset Y$ 为凸锥，$F: A \longrightarrow 2^Y$ 为集值映射：

(i) F 称为 C-凸的[8]，如果 $\forall x_1, x_2 \in A$，$\forall t \in [0, 1]$，有

$$tF(x_1)+(1-t)F(x_2) \subset F(tx_1+(1-t)x_2)+C$$

(ii) F 称为 C-类凸的[9]，如果

$$\mathrm{conv}(F(A)) \subset F(A)+C$$

注 2　$F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 C-类凸的 $\Leftrightarrow F(A)+C$ 为凸集．

定义 4[10]　$A \subseteq X$ 称为弧连通的，如果 $\forall x_1, x_2 \in A$，存在一个连续映射 $\varphi_{x_1, x_2}: [0, 1] \longrightarrow A$，使得

$$\varphi_{x_1, x_2}(0)=x_1,\ \varphi_{x_1, x_2}(1)=x_2$$

定义 5[11]　设 $\varnothing \neq A \subseteq X$ 为弧连通集，集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 称为 C-弧连通的，如果 $\forall t \in [0, 1]$，$\forall x_1, x_2 \in A$，有

$$(1-t)F(x_1)+tF(x_2) \subseteq F(\varphi_{x_1, x_2}(t))+C$$

称 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 $(-C)$-弧连通的，如果 $\forall t \in [0, 1]$，$\forall x_1, x_2 \in A$，有

$$(1-t)F(x_1)+tF(x_2) \subseteq F(\varphi_{x_1, x_2}(t))-C$$

注 3　C-弧连通的必为 C-类凸的，反之不成立．

例 1 设 $X=\mathbb{R}^2$，$A_1=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$，$C=\mathbb{R}^2_+$，$F: A_1 \longrightarrow 2^Y$ 定义为：

$$F(x)=\{(x_1,x_2),(1,1)\},\ \forall x=(x_1,x_2)\in A_1$$

则 F 在 A_1 上是 C-类凸的，但 F 不是 C-弧连通的.

引理 2[12] 如果集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 是 C-弧连通的，则 $F(A)+C$ 是凸集.

注 4 由注1和引理2可知，C-弧连通的集值映射必为 C-类凸的集值映射，则以下命题(引理3、引理4、推论1、引理5)中的 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 C-类凸集值映射，设定为 C-弧连通的，命题依然成立.

引理 3[3] 设 $\varnothing \neq A \subset X$ 为子集，集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 C-类凸的，C 具有有界基 B，则

$$SE(F(A),C)=SE(F(A)+C,C)=SE(\mathrm{conv}(F(A)),C)$$

引理 4[3] 设 $\varnothing \neq A \subset X$ 为子集，集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 C-类凸的，C 具有有界基 B. 则 $y^* \in SE(F(A),C)$ 的充要条件是：$\exists h \in \mathrm{int}(C^*)$，使得

$$h(y^*)=\min\{h(y) \mid \forall y \in F(A)\}$$

推论 1[3] 设 $\varnothing \neq A \subset X$ 为子集，集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 C-类凸的，C 具有有界基 B，则有

$$SE(F(A),C)=\bigcup\{PE(F(A),h) \mid h \in \mathrm{int}(C^*)\}$$

其中

$$PE(F(A),h)=\{\overline{y} \in F(A) \mid h(\overline{y}) \leqslant h(y),\ \forall y \in F(A)\}$$

引理 5[3] 设 $\varnothing \neq A \subset X$ 为子集，集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 为 C-类凸的，$h \in \mathrm{int}(C^*)$. 则

$$PE(F(A),h)=PE(\mathrm{conv}(F(A)),h)$$

引理 6[13] 设 X 和 Y 均为 Hausdorff 拓扑空间，其中 X 是紧的，如果集值映射 $F: X \longrightarrow 2^Y$ 为上半连续的，且 $\forall x \in X$，$F(x)$ 是紧的，则 $F(X)$ 必是紧的.

定义 6[14] 设 $A \subset X$ 为任一非空子集，称集值映射 $F: A \longrightarrow 2^Y$ 在 $x_0 \in A$ 处均为上半连续的，如果对 $F(x_0)$ 任意给定的邻域 $\widetilde{V} \subset Y$，都存在 x_0 的邻域 $\widetilde{U}$，使得 $F(\widetilde{U}) \subset \widetilde{V}$，$\forall x \in \widetilde{U}$.

称 F 在 A 上是上半连续的，如果 F 在 A 上每一点均是上半连续的.

引理 7[12] 称 $F: A \subset X \longrightarrow 2^Y$ 为上半连续集值映射，如果满足：

(i) $A \subset X$ 为连通集；

(ii) $\forall x \in A$，$F(x)$ 是非空连通集，则 $F(A)$ 为连通集.

定义 7[15] 设 X 为拓扑线性空间. 集合 $A \subset X$ 称为有界，如果它能被 X 中的每一个零元邻域吸收，即对于每一个 $V \in N(0)$，存在一个 $l>0$，使得 $A \subset lV$.

定义 8[15] 设 X 为拓扑线性空间，则在 X 上由 X^* 生成的 F－拓扑称为弱拓扑，记为 T_{X^*} 或 T_W. 相应的局部凸空间记为(X,T_{X^*})，(X,T_W) 或 X_W.

若集合 A 关于弱拓扑有界，则称 A 为弱有界，或称为 $A \subset X_W$ 有界.

引理 8[15] (Banach-Mackey) 设 X 为局部凸空间，则 $A \subset X$ 有界当且仅当 $A \subset X_W$ 有界.

引理 9[16] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 $n \geqslant 1$ 个弧连通空间. 则积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是弧连通空间.

引理 10[17] 设 X, Y 和 Z 均是拓扑空间. 设 $\widetilde{F}: X \longrightarrow Y$，$\widetilde{G}: Y \longrightarrow Z$ 均是集值映射.

(i) 如果 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{G}$ 均是下半连续的，则 $\widetilde{G} \circ \widetilde{F}$ 也是下半连续的.

(ii) 如果 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{G}$ 均是上半连续的，则 $\widetilde{G} \circ \widetilde{F}$ 也是上半连续的.

引理 11[18-19] 设 X，Y 均为 Hausdorff 拓扑线性空间，$F: X \longrightarrow 2^Y$ 是集值映射，$x_0 \in X$，$F(x_0)$ 是紧集，则 F 在 $x_0 \in X$ 处是上半连续的当且仅当对于 X 中的任意的网 $\{x_\alpha: \alpha \in I\}$ 且 $x_\alpha \rightarrow x_0$，Y 中的任意的网 $\{y_\alpha: \alpha \in I\}$ 且 $y_\alpha \in F(x_\alpha)$，$\forall \alpha \in I$，均存在 $y_0 \in F(x_0)$ 和 $\{y_\alpha: \alpha \in I\}$ 的一个子网 $\{y_\beta: \beta \in \Delta\}$，使得 $y_\beta \rightarrow y_0$.

2 含参超有效点集的连通性

设 X, Y 和 Z 均为 Hausdorff 局部凸的拓扑线性空间，$E \subset X$ 为非空子集，$\Lambda \subset Z$ 为非空子集，$H: \Lambda \longrightarrow$

2^E 是集值映射，含参数 $\lambda \in \Lambda$ 的目标集值映射 $F: E \times \Lambda \longrightarrow 2^Y$，且 $\forall x \in E$，$\forall \lambda \in \Lambda$，$F(x, \lambda) \neq \varnothing$，$\forall \lambda \in \Lambda$，$H(\lambda) \neq \varnothing$.

考虑以下含参数集值向量优化问题(PSVOP)：

$$\min_{x \in H(\lambda)} F(x, \lambda)$$

定义 9　设 $x^* \in H(\lambda)$，$y^* \in F(x^*, \lambda)$ 称为 $F(H(\lambda), \lambda)$ 关于 C 的(PSVOP)中的含参超有效点，设 $N(0)$ 是 Y 的零点邻域基，若对 $\forall V \in N(0)$，都 $\exists U \in N(0)$，使得

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(F(H(\lambda), \lambda) - x^*)) \cap (U - C) \subset V$$

(PSVOP) 中的含参超有效点的全体记为 $SE(F(H(\lambda), \lambda), C)$.

命题 1　设 X, Y, Z 均为 Hausdorff 局部凸的拓扑线性空间，$E \subset X$ 为非空的紧子集，且 E 为弧连通的，$\Lambda \subset Z$ 为非空的弧连通集，$C \subset Y$ 为闭凸点锥，且 C 具有有界基 B. 如果同时满足下列条件：

(i) $F: E \times \Lambda \longrightarrow 2^Y$ 为上半连续的集值映射(其中 Y 上的拓扑是弱拓扑 $\sigma(Y, Y^*)$)；

(ii) F 为 C- 弧连通的，且 F 在 $E \times \Lambda$ 上取弱紧值；

(iii) $H: \Lambda \longrightarrow 2^E$ 为集值映射，且 $\forall \lambda \in \Lambda$，$H(\lambda)$ 为非空的弧连通紧子集.

则 $SE(F(H(\lambda), \lambda), C)$，$\forall \lambda \in \Lambda$ 是非空的连通集.

证　若以下无特别说明，都假设任意取定 $\lambda \in \Lambda$，$F(x, \lambda)$ 均定义在 $H(\lambda)$ 上.

由于 E 为弧连通的，Λ 为弧连通的，则由引理 9 可知，$E \times \Lambda$ 也是弧连通的.

又因为含参数的目标集值映射 F 在 $E \times \Lambda$ 是 C- 弧连通的，且 $H(\lambda) \times \{\lambda\}$ 是弧连通的，故 F 在 $H(\lambda) \times \{\lambda\}$ 是 C- 弧连通的. 即 $F(x, \lambda)$ 在 $H(\lambda)$ 上是 C- 弧连通的. 由引理 2 可知

$$F(H(\lambda), \lambda) + C$$

是凸集. 由注 2 知，$F(x, \lambda)$ 是 $H(\lambda)$ 上的 C- 类凸的映射. 又因为 $C \subset Y$ 是具有有界基 B 的凸锥，所以由推论 1 知

$$SE(F(H(\lambda), \lambda), C) = \bigcup_{h \in \mathrm{int}(C^*)} PE(F(H(\lambda), \lambda), h)$$

其中，$PE(F(H(\lambda), \lambda), h) = \{y^* \in F(H(\lambda), \lambda) \mid h(y^*) \leqslant h(y),\ \forall y \in F(H(\lambda), \lambda)\}$. 由于 $F(H(\lambda), \lambda) + C$ 是凸集，含参数的目标集值映射 $F: E \times \Lambda \longrightarrow 2^Y$ 是上半连续的集值映射，故集值映射 $F: H(\lambda) \times \{\lambda\} \longrightarrow 2^Y$ 也是上半连续的映射. 又因为 F 在 $E \times \Lambda$ 上取弱紧值，故 F 在 $H(\lambda) \times \{\lambda\}$ 上也取弱紧值. 由引理 6 知，$F(H(\lambda), \lambda)$ 是拓扑空间 $\sigma(Y, Y^*)$ 上的弱紧集. 即 $F(H(\lambda), \lambda)$ 是拓扑空间 $(Y, \sigma(Y, Y^*))$ 上的紧集. 因此，任取 $h \in \mathrm{int}(C^*)$，则 $PE(F(H(\lambda), \lambda), h) \neq \varnothing$，$\forall \lambda \in \Lambda$. 于是由推论 1 知，

$$SE(F(H(\lambda), \lambda), C) \neq \varnothing,\ \forall \lambda \in \Lambda$$

又由引理 3 知，$\forall \lambda \in \Lambda$，

$$SE(F(H(\lambda), \lambda), C) = SE(F(H(\lambda), \lambda) + C, C) = SE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), C) \neq \varnothing$$

下面证明 $SE(F(H(\lambda), \lambda), C)$ 为连通集，证明过程分为 3 部分.

(I) 先证 $\varphi(h)$ 是连通集.

首先定义集值映射

$$\varphi: \mathrm{int}(C^*) \longrightarrow 2^{\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))}$$

并令

$$\varphi(h) = PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h)$$

对 $\forall h \in \mathrm{int}(C^*)$，设

$$PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h) = \{y^* \in (\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))) \mid h(y^*) \leqslant h(y),\ \forall y \in F(H(\lambda), \lambda)\}$$

因为 $PE(F(H(\lambda), \lambda), h) \neq \varnothing$，由引理 5 可知

$$PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h) = PE(F(H(\lambda), \lambda), h) \neq \varnothing$$

任取 $y_1, y_2 \in PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h)$，$t \in (0, 1)$，则有

$$y_1, y_2 \in \mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))$$

设 $y = ty_1 + (1-t)y_2$，因为 $\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))$ 是凸集，所以 $y \in \mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))$，且对 $\forall z \in \mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))$，有

$$h(y) = h(ty_1 + (1-t)y_2) = th(y_1) + (1-t)h(y_2) \leqslant th(z) + (1-t)h(z) = h(z)$$

即 $y = ty_1 + (1-t)y_2 \in PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h)$. 因此 $PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h)$ 为凸集，从而 $PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h)$ 为连通集.

故 $\varphi(h) = PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h)$ 也为连通集.

(Ⅱ) 因为 $\mathrm{int}(C^*) \subset Y^*$ 为凸集，所以 $\mathrm{int}(C^*)$ 为连通集.

(Ⅲ) 再证集值映射 $\varphi: \mathrm{int}(C^*) \longrightarrow 2^{\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda))}$ 是上半连续的(其中 $\mathrm{int}(C^*)$ 上的拓扑为强拓扑 $\beta(Y^*, Y)$，$F(H(\lambda), \lambda)$ 上的拓扑为 Y 上的弱拓扑 $\sigma(Y, Y^*)$).

否则的话，则 $\exists h_0 \in \mathrm{int}(C^*)$，使得 φ 在 $h_0 \in \mathrm{int}(C^*)$ 处不是上半连续的. 因此，存在 $\varphi(h_0)$ 的弱开邻域 $V \subset Y$(关于 $\sigma(Y, Y^*)$)，以及网 $\{h_\alpha: \alpha \in \Delta\} \subset \mathrm{int}(C^*)$，且使得 $h_\alpha \xrightarrow{\beta(Y^*, Y)} h_0$，但

$$\varphi(h_\alpha) \not\subset V \qquad \forall \alpha \in \Delta$$

由于 $F(H(\lambda), \lambda)$ 是弱紧集，不失一般性，故可以假设网 $\{y_\alpha: \alpha \in \Delta\}$，使得

$$y_\alpha \xrightarrow{w} y_0, \ y_0 \in F(H(\lambda), \lambda)$$

且 $y_\alpha \in \varphi(h_\alpha)$，但是

$$y_\alpha \notin V \qquad \forall \alpha \in \Delta \tag{1}$$

又由于 V 是开集，因此 $y_0 \notin V$.

由推论 1 和引理 3 可得，

$$y_\alpha \in \varphi(h_\alpha) = PE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), h_\alpha) \subset SE(\mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)), C) = SE(F(H(\lambda), \lambda), C)$$

因为 $y_\alpha \in \varphi(h_\alpha)$，则有

$$h_\alpha(y_\alpha) \leqslant h_\alpha(z) \qquad \forall z \in \mathrm{conv}(F(H(\lambda), \lambda)) \tag{2}$$

设 $K := F(H(\lambda), \lambda)$，由于 K 是弱紧的，因此，K 是弱有界的. 再由引理 8 可知，K 是 Y 中的有界集.

定义

$$P_K(h^*) = \sup\{|h^*(y)|: y \in K\}, \ h^* \in Y^*$$

由于 K 是有界集，则 P_K 为 Y^* 上的连续半范，$\forall \varepsilon > 0$，$U := \left\{h^*: P_K(h^*) < \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ 是 Y^* 中关于强拓扑 $\beta(Y^*, Y)$ 的一个零元邻域. 由于 $h_\alpha \xrightarrow{\beta(Y^*, Y)} h_0$，则 $\exists \alpha_0 \in \Delta$，使得 $h_\alpha - h_0 \in U$，$\alpha \geqslant \alpha_0$.

从而对 $\forall \alpha \geqslant \alpha_0$，有

$$P_K(h_\alpha - h_0) = \sup\{|h_\alpha(y) - h_0(y)|: y \in K\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此，对 $\forall y \in K$，有

$$|h_\alpha(y) - h_0(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_0$$

且有

$$|h_\alpha(y_\alpha) - h_0(y_\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_0 \tag{3}$$

另外，又由于 $y_\alpha \xrightarrow{w} y_0$，$h_0 \in Y^*$，则对于上述的 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \alpha_1 \in \Delta$，使得

$$|h_0(y_\alpha) - h_0(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_1 \tag{4}$$

由(3)式和(4)式得

$$|h_\alpha(y_\alpha)-h_0(y_0)|\leqslant|h_\alpha(y_\alpha)-h_0(y_\alpha)|+|h_0(y_\alpha)-h_0(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ \forall\alpha\geqslant\alpha_0,\ \alpha\geqslant\alpha_1$$

于是

$$\lim_\alpha h_\alpha(y_\alpha)=h_0(y_0)$$

对(2)式两边同时取极限，得

$$h_0(y_0)\leqslant h_0(z)\qquad\forall z\in\operatorname{conv}(F(H(\lambda),\lambda))$$

于是有 $y_0\in\varphi(h_0)\subseteq V$. 又因为 $y_\alpha\xrightarrow{w}y_0$，$V$ 为弱开邻域，则 $\exists\alpha_2\in\Delta$，使得

$$y_\alpha\in V\qquad\forall\alpha\geqslant\alpha_2$$

这与(1)式矛盾，故所定义的集值映射 φ 在 $\operatorname{int}(C^*)$ 上是上半连续的.

综上，由引理 7 知，$\bigcup\{\varphi(h):h\in\operatorname{int}(C^*)\}$ 是连通的. 即 $\bigcup_{h\in\operatorname{int}(C^*)}PE(\operatorname{conv}(F(H(\lambda),\lambda)),h)$ 是连通的. 又由推论 1 和引理 5 可得

$$SE(F(H(\lambda),\lambda),C)=\bigcup_{h\in\operatorname{int}(C^*)}PE(F(H(\lambda),\lambda),h)=\bigcup_{h\in\operatorname{int}(C^*)}PE(\operatorname{conv}(F(H(\lambda),\lambda)),h)$$

故 $SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 是非空的连通集.

定理 1　设 X,Y 和 Z 均为 Hausdorff 局部凸的拓扑线性空间，$E\subset X$ 和 $\Lambda\subset Z$ 均为非空的弧连通紧子集，$C\subset Y$ 为闭凸点锥，C 具有有界基 B. 如果同时满足下列条件：

(i) 集值映射 $H:\Lambda\longrightarrow 2^E$ 和 $F:E\times\Lambda\longrightarrow 2^Y$ 均为连续的(其中 Y 上的拓扑为弱拓扑 $\sigma(Y,Y^*)$)；

(ii) H,F 均为 C- 弧连通的，且对 $\forall\lambda\in\Lambda$，$H(\lambda)$ 为弧连通紧子集.

(iii) F 在 $E\times\Lambda$ 上取弱紧值.

(iv) 对 $\forall\lambda\in\Lambda$，$SE(F(H(\lambda),\lambda),C)=\bigcup_{h\in C_\Omega}PE(F(H(\lambda),\lambda),h)$，其中 C_Ω 为 $\operatorname{int}(C^*)$ 中关于强拓扑 $\beta(Y^*,Y)$ 的紧子集.

则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 是非空的连通集.

证　定义集值映射

$$T:\Lambda\longrightarrow 2^Y$$

使得 $T(\lambda)=SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$. 由命题 1 可知，对于 $\forall\lambda\in\Lambda$，$T(\lambda)=SE(F(H(\lambda),\lambda),C)\neq\varnothing$，因此，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}SE(F(H(\lambda),\lambda),C)\neq\varnothing$.

下面将证明过程分为 3 步进行：

(I) 先证 $T(\lambda)$ 是连通的.

由命题 1 知，对于 $\forall\lambda\in\Lambda$，$SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 是连通的，因此

$$T(\lambda)=SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$$

是连通的.

(II) 因为 Λ 是弧连通的，所以 Λ 是连通的.

(III) 再证 $T:\Lambda\longrightarrow 2^Y$ 在 Λ 上是上半连续的(Y 上的拓扑为弱拓扑 $\sigma(Y,Y^*)$).

否则的话，$\exists\lambda_0\in\Lambda$，使得 T 在 $\lambda_0\in\Lambda$ 处不是上半连续的，因此，存在 $T(\lambda_0)$ 的弱开邻域 $V\subset Y$(关于 $\sigma(Y,Y^*)$) 以及网 $\{\lambda_i:i\in I\}\subset\Lambda$(且有 $\lambda_i\longrightarrow\lambda_0$) 使得

$$T(\lambda_i)\not\subset V\qquad\forall i\in I$$

即 $\exists\{y_i:i\in I\}$，使得

$$y_i\in T(\lambda_i),\ y_i\notin V\qquad\forall i\in I\tag{5}$$

其中 I 为指标集. 由推论 1 和引理 5 知

$$SE(F(H(\lambda),\lambda),C)=\bigcup_{h\in\operatorname{int}(C^*)}PE(F(H(\lambda),\lambda),h)$$

又由于

$$SE(F(H(\lambda),\lambda),C)=\bigcup_{h\in C_\Omega}PE(F(H(\lambda),\lambda),h)$$

故有

$$T(\lambda_i)=\bigcup_{h\in C_\Omega} PE(F(H(\lambda_i),\lambda_i),h)$$

由于 $y_i \in T(\lambda_i)$，则 $\exists h_i \in C_\Omega$，使得

$$y_i \in PE(F(H(\lambda_i),\lambda_i),h_i)$$

因为网$\{h_i\} \subset C_\Omega$，且由 C_Ω 是紧的，不妨设 $h_0 \in C_\Omega$，使得

$$h_i \xrightarrow{\beta(Y^*,Y)} h_0$$

从而有

$$h_i(y_i) \leqslant h_i(v_i),\ \forall v_i \in F(H(\lambda_i),\lambda_i) \tag{6}$$

由于 $H(\lambda)$ 及 $F(x,\lambda)$ 均是下半连续的，故由引理 10 知，$F(H(\lambda),\lambda)$ 关于 λ 是下半连续的，从而，对于 $\forall v_0 \in F(H(\lambda_0),\lambda_0)$，$\exists v_i \in F(H(\lambda_i),\lambda_i)$，使得

$$v_i \longrightarrow v_0$$

又因为 $H(\lambda)$ 及 $F(x,\lambda)$ 均是上半连续的，所以由引理 10 可知，$G: \Lambda \longrightarrow 2^Y$，$G(\lambda)=F(H(\lambda),\lambda)$，$\forall \lambda \in \Lambda$ 是上半连续的，又由命题 1 的证明过程可知，$F(H(\lambda),\lambda)$ 是弱紧集，从而 $F(H(\lambda_0),\lambda_0)$ 为弱紧的. 因此，由引理 11 知，不失一般性，可假设 $\exists y_0 \in F(H(\lambda_0),\lambda_0)$，使得

$$y_i \xrightarrow{w} y_0$$

记 $L:=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F(H(\lambda),\lambda)$. 因为 G 是上半连续的，且 $G(\lambda)=F(H(\lambda),\lambda)$ 是弱紧的，故 L 是弱紧的. 因此，L 是弱有界的. 又由引理 8 可知，L 是有界的.

这里定义

$$P_L(h)=\sup\{|h(y)|: y \in L\},\ h \in Y^*$$

易知 P_L 为 Y^* 上的连续半范，$\forall \varepsilon>0$，$U^*:=\{h: P_L(h)<\frac{\varepsilon}{2}\}$ 是 Y^* 中关于强拓扑 $\beta(Y^*,Y)$ 的一个零元邻域，由 $h_i \xrightarrow{\beta(Y^*,Y)} h_0$ 知，$\exists i_0 \in I$，使得 $h_i-h_0 \in U^*$，$\forall i \geqslant i_0$. 从而有

$$P_L(h_i-h_0)=\sup\{|h_i(y)-h_0(y)|: y\in L\}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i \geqslant i_0$$

即有

$$|h_i(y)-h_0(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall y \in L \tag{7}$$

又因为 $y_i \xrightarrow{w} y_0$，$h_0 \in C_\Omega$，因此，对于上述的 $\forall \varepsilon>0$，$\exists i_1 \in I$，使得

$$|h_0(y_i)-h_0(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall y \in L,\ \forall i \geqslant i_1 \tag{8}$$

由(7)式和(8)式得

$$|h_i(y_i)-h_0(y_0)| \leqslant |h_i(y_i)-h_0(y_i)|+|h_0(y_i)-h_0(y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\forall i \geqslant i_0,\ \forall i \geqslant i_1$$

因此

$$\lim_i h_i(y_i)=h_0(y_0)$$

同理可证 $\lim\limits_i h_i(v_i)=h_0(v_0)$.

对(6)式两边同时取极限得

$$h_0(y_0) \leqslant h_0(v_0) \qquad \forall v_0 \in F(H(\lambda_0),\lambda_0)$$

于是 $y_0 \in \varphi(\lambda_0) \subseteq V$，由 $y_i \xrightarrow{w} y_0$，V 为弱开邻域，则 $\exists i_2 \in I$，使得

$$y_i \in V \qquad \forall i \geqslant i_2$$

这与(5)式矛盾．故 T 在 Λ 上是上半连续的．

综上所述，由引理 7 知，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} SE(F(H(\lambda),\lambda),C)$ 是连通的．证毕．

参考文献：

[1] BORWEIN J M，ZHUANG D. Super Efficiency in Vector Optimization [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1993，338(1)：105-122.

[2] BORWEIN J M，ZHUANG D M. Super Efficiency in Convex Vector Optimization [J]. Zeitschrift Für Operations Research，1991，35(3)：175-184.

[3] 仇秋生，傅万涛．集值映射最优化问题超有效解集的连通性 [J]．系统科学与数学，2002，22(1)：107-114.

[4] 张勇．几乎 C-类凸集值映射向量优化问题超有效点集的连通性 [J]．西安文理学院学报(自然科学版)，2008，11(3)：45-48.

[5] 曹敏，汪洋，陈剑尘．含约束集值映射超有效解集的连通性 [J]．数学的实践与认识，2016，46(23)：241-246.

[6] 刘富荣．含参数集值向量优化问题有效点集的连通性研究 [D]．南昌：南昌航空大学.

[7] ZHENG X Y. Proper Efficiency in Locally Convex Topological Vector Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1997，94(2)：469-486.

[8] CORLEY H W. Optimality Conditions for Maximizations of Set-Valued Functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1988，58(1)：1-10.

[9] LI Z F，CHEN G Y. Lagrangian Multipliers，Saddle Points，and Duality in Vector Optimization of Set-Valued Maps [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1997，215(2)：297-316.

[10] AVRIEL M，ZANG I. Generalized Arcwise-Connected Functions and Characterizations of Local-Global Minimum Properties [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1980，32(4)：407-425.

[11] LALITHA C S，DUTTA J，GOVIL M G. Optimality Criteria in Set-Valued Optimization [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，2003，75(2)：221-232.

[12] 陈剑尘，高洁．含约束集值优化问题 Henig 有效解集的连通性 [J]．南昌航空大学学报(自然科学版)，2012，26(3)：22-27.

[13] HIRIART-URRUTY J B. Images of Connected Sets by Semicontinuous Multifunctions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1985，111(2)：407-422.

[14] ERWIN K，THOMPSON A C. Theory of Correspondences [M]. New York：Wiley，1984.

[15] 徐登洲．拓扑线性空间 [M]．兰州：兰州大学出版社，1987.

[16] 熊金城．点集拓扑讲义 [M]．4 版．北京：高等教育出版社，2011.

[17] KLEIN E，THOMPSON A C. Theory of Correspondences：Including Applications to Mathematical Economics [M]. New York：Wiley，1984.

[18] FERRO F. Optimization and Stability Results through Cone Lower Semicontinuity [J]. Set-Valued Analysis，1997，5(4)：365-375.

[19] MUSELLI E. Upper and Lower Semicontinuity for Set-Valued Mappings Involving Constraints [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2000，106(3)：527-550.

责任编辑　张枸