第 44 卷第 7 期 西南大学学报(自然科学版) 2022 年 7 月
Vol. 44 No. 7 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jul. 2022

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.07.014

带变量核的高阶交换子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性

邵旭馗， 王素萍

陇东学院 数学与统计学院，甘肃 庆阳 745000

摘要：应用核函数 $\Omega(x, z)$ 的性质，得到了由变量核 Hardy-Littlewood 极大算子 M_Ω 与 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 函数 b 生成的高阶交换子 $M_{b,m,\Omega}$ 是加权 Morrey-Herz 空间 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ 上的有界算子，丰富了以往非变量核的相关结果.

关 键 词：Hardy-Littlewood 极大算子；加权 Morrey-Herz 空间；交换子；变量核

中图分类号：O174.2 **文献标志码**：A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673-9868(2022)07-0126-06

Boundedness of Higher Order Commutators with Variable Kernels on the Weighted Morrey-Herz Spaces

SHAO Xukui， WANG Suping

School of Mathematics and Statistics, Longdong University, Qingyang Gansu 745000, China

Abstract: Applying the properties of the kernel function $\Omega(x, z)$ revealed that the Hardy-Littlewood maximal operators M_Ω with variable kernels and $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ functions b generated boundedness of the higher order commutator $M_{b,m,\Omega}$ is the weighted Morrey-Herz spaces $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$. This extends the achieved results of invariable kernel.

Key words: Hardy-Littlewood maximal operators; weighted Morrey-Herz spaces; commutators; variable kernel

记 S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的单位球面，其上的 Lebesgue 测度用 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma(x')$ 表示. 定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的

收稿日期：2021-09-16

基金项目：国家自然科学基金项目(11661051)；甘肃省自然科学基金项目(21JR1RM337)；甘肃省高等学校创新基金项目(2021B-270)；陇东学院博士基金项目(XYBYZK2112, XYBYZK2113).

作者简介：邵旭馗，博士，副教授，主要从事调和分析的研究.

函数 $\Omega(x, z) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})(r \geqslant 1)$，满足

$$\|\Omega\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, z')|^r \mathrm{d}\sigma(z')\right)^{\frac{1}{r}} < \infty \tag{1}$$

其中 $z' = \dfrac{z}{|z|}$，$\forall z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$，且满足消失条件

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x, z')\mathrm{d}(z') = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

并设

$$\Omega(x, \lambda z) = \Omega(x, z) \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda > 0$$

用 $L_{\omega}^q(\mathbb{R}^n)$ 表示加权 Lebesgue 空间，即 $f \in L_{\omega}^q(\mathbb{R}^n)$ 是指

$$\|f\|_{L_{\omega}^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{3}$$

设 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，对 $m \in \mathbb{Z}_+$，带变量核的高阶交换子定义为

$$M_{b,m,\Omega}(f)(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |\Omega(x, x-y)| |b(x)-b(y)|^m |f(y)| \mathrm{d}y \tag{4}$$

其中

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leqslant r\}$$

文献[1]证明了带粗糙核的高阶交换子 $M_{b,m,\Omega}$ 当 $m = 1$ 时（简记为 $M_{b,\Omega}$）在齐次 Herz 空间上的有界性. 文献[2]得到了 $M_{b,m,\Omega}$ 在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性. 随后，文献[3]又证明了当 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，$m \in \mathbb{Z}_+$ 时，$M_{b,\Omega}$ 是齐次 Morrey-Herz 空间上的有界算子. 文献[4]利用 Sharp 极大函数，证明了带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 和某一类加权 Lipschitz 空间的函数 b 生成的交换子的加权有界性. 最近，文献[5]得到了变量核 Marcinkiewicz 积分与 BMO 函数生成的交换子在变指标 Herz-Hardy 空间上的有界性. 有关变量核积分算子及其交换子的相关结果详见文献[6-13].

受以上研究的启发，一个自然的问题就是：带变量核的高阶交换子 $M_{b,m,\Omega}$ 在齐次 Morrey-Herz 空间上是否也有界？ 本文考虑了这一问题，并证明了带变量核的高阶交换子 $M_{b,m,\Omega}$ 在加权齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性，推广了以往非变量核的结果.

首先给出一些定义与记号：

设 $k \in \mathbb{Z}$，记

$$B_k = B(0, 2^k) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 2^k\}$$

及 $C_k = B_k \backslash B_{k-1}$，并记 $\chi_k = \chi_{C_k}$ 为集 C_k 的特征函数.

定义 1[14]　设 $\alpha \in \mathbb{R}$，$0 \leqslant q < \infty$，$0 \leqslant p < \infty$，ω_1, ω_2 是非负权函数，定义加权齐次 Morrey-Herz 空间 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 为

$$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2) = \{f \in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \omega_2) : \|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)} < \infty\}$$

其中

$$\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定理 1　对某个 $r \in (0, \infty]$，设 $\Omega \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$ 是 0 阶齐次函数且满足(2)式，设 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，带变量核的高阶交换子 $M_{b,m,\Omega}$ 由(4)式所定义. 如果 $p \in (0, \infty]$，$q \in (1, \infty)$，$\omega_1 \in A_{m_1}$，$\omega_2 \in A_1$ 和 $\lambda > 0$，若 α, λ, r 和 q 满足以下条件之一：

(a) $q > r'$, $0 < \lambda \leqslant \dfrac{n}{qm_1}$ 且 $\alpha \in \left(\dfrac{\lambda m_1 - \dfrac{n}{q}}{\delta_{\omega_1}}, \dfrac{\dfrac{n}{r'} - \dfrac{n}{q} + \dfrac{1}{r}}{m_1}\right)$;

(b) $q < r$, $\alpha \in \left(\dfrac{\dfrac{n}{r} - \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{r} + \lambda m_1}{\delta_{\omega_1}}, \dfrac{n\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)}{m_1}\right)$.

则 $M_{b,m,\Omega}$ 在 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ 上有界.

引理 1[15] 对某个 $r \in (1, \infty]$, 假定 $\Omega \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$. 若 $a > 0$, $0 < d \leqslant r$ 和 $-n + \dfrac{d(n-1)}{r} < \beta < \infty$, 则

$$\left(\int_{|x| < a|y|} |\Omega(x, x-y)|^d |x|^{\beta} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{d}} \leqslant C |y|^{\frac{(\beta+n)}{d}} \|\Omega\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})}$$

引理 2[16] 如果 $\omega \in A_p(1 \leqslant p < \infty)$, 则存在常数 $C > 0$ 和 $\delta_{\omega}(0 < \delta_{\omega} < 1)$, 使得: 当 $k < j$ 时, $\omega(B_k)/\omega(B_j) \leqslant C2^{(k-j)n\delta_{\omega}}$; 当 $k > j$ 时, $\omega(B_k)/\omega(B_j) \leqslant C2^{(k-j)np}$.

定理 1 的证明 首先证明在条件(a)下, 结论成立.

若 $f \in M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)$, 记

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\chi_j(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x)$$

设

$$M = \|M_{b,m,\Omega}(f)\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)}$$

则

$$\begin{aligned}
M = &\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \|M_{b,m,\Omega}(f)\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&C\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k-2} \|M_{b,m,\Omega}(f_j)\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&C\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{k=k-1}^{k+1} \|M_{b,m,\Omega}(f_j)\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&C\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{k=k+2}^{\infty} \|M_{b,m,\Omega}(f_j)\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&F_1 + F_2 + F_3
\end{aligned}$$

首先考察 F_2. 由 $M_{b,m,\Omega}$ 在 $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性可得

$$\begin{aligned}
F_2 \leqslant &C\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\sum_{k=k-1}^{k+1} \|f_j\|_{L_{\omega_2}^q}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&C\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} [\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} [\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&C\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega_1, \omega_2)}
\end{aligned}$$

关于 F_1, 注意到 $x \in C_k$, $y \in C_j$, $j \leqslant k-2$, 因此 $|x-y| \sim |x|$, 且 $\omega_2 \in A_1$. 于是由假设

$$\begin{aligned}
&\sup_{x \in C_k} \omega_2(x) \leqslant C \inf_{x \in C_k} \omega_2(x) \leqslant C \frac{\omega_2(B_k)}{|B_k|} \leqslant C \frac{\omega_2(B_j)}{|B_j|} \leqslant \\
&C[\operatorname*{ess\,inf}_{y \in B_j} \omega_2(y)] \leqslant C[\omega_2(y)]_{y \in B_j}
\end{aligned}$$

再根据引理 1 以及文献 [3] 中定理 1 的证明方法，有

$$\|M_{b,m,\Omega}(f_j)\chi_k\|_{L^q_{\omega_2}}\leqslant$$

$$C2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta\right)}(k-j)^m\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_*^m\left[\operatorname*{ess\,inf}_{y\in B_j}\omega_2(y)\right]^{\frac{1}{q}}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$C2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta\right)}(k-j)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}$$

可选择适当的 β，使得

$$\alpha<\frac{\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta}{m_1}<\frac{\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}+\frac{1}{r}}{m_1}$$

所以，根据引理 2，有

$$F_1\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta\right)}(k-j)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta-\alpha m_1\right)}(k-j)^m[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$ 可得

$$F_1\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta-\alpha m_1\right)p}(k-j)^{mp}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k_0-2}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta-\alpha m_1\right)p}(k-j)^{mp}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}$$

当 $1<p\leqslant\infty$ 时，由 Hölder 不等式，可得

$$F_1\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left[\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta-\alpha m_1\right)\frac{p}{2}}(k-j)^{mp}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\right)^{\frac{1}{p}}\times\right.$$

$$\left.\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta-\alpha m_1\right)\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k_0-2}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\sum_{k=j+2}^{\infty}2^{(j-k)\left(\frac{n}{r'}-\frac{n}{q}-\beta-\alpha m_1\right)\frac{p}{2}}(k-j)^{mp}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k_0-2}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}$$

最后来估计 F_3. 注意到，当 $x\in C_k$，$y\in C_j$，$j\geqslant k+2$ 时，有 $|x-y|\sim|y|$，类似于 F_1 的估计方法，我们有

$$\|M_{b,m,\Omega}(f_j)\chi_k\|_{L^q_{\omega_2}}\leqslant C2^{(j-k)\frac{n}{q}}(k-j)^m\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\|b\|_*^m\left[\operatorname*{ess\,inf}_{y\in B_j}\omega_2(y)\right]^{\frac{1}{q}}\|f_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$C2^{(j-k)\frac{n}{q}}(k-j)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}$$

于是

$$F_3\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{(k-j)\frac{n}{q}}(j-k)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，由引理 2，可得

$$
\begin{aligned}
F_3 \leqslant\ & C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)\frac{n}{q}}(j-k)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\frac{n}{q}}(j-k)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}\right)p}(j-k)^{mp}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\Big)^{\frac{1}{p}}+\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big[\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\frac{np}{q}}(j-k)^{mp}[\omega_1(B_j)]^{\frac{-\alpha p}{n}}\times\\
& \sum_{l=-\infty}^{j}[\omega_1(B_l)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_l\|^p_{L^q_{\omega_2}}\Big)\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\sum_{k=-\infty}^{j-2}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}\right)p}(j-k)^{mp}\Big)^{\frac{1}{p}}+\\
& C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\frac{np}{q}}(j-k)^{mp}\left[\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\right]^{\frac{\alpha p}{n}}\left[\frac{\omega_1(B_j)}{\omega_1(B_{k_0})}\right]^{\frac{\lambda p}{n}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}\Big[1+\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}-\lambda m_1\right)p}(j-k)^{mp}\Big)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\leqslant\\
& C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}
\end{aligned}
$$

当 $1 < p \leqslant \infty$ 时，由引理 2，可得

$$
\begin{aligned}
F_3 \leqslant\ & C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)\frac{n}{q}}(j-k)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\lambda}{n}}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}-\lambda m_1\right)}(j-k)^m\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}\right)}(j-k)^m[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Big[\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}-\frac{\lambda p}{n}}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}-\lambda m_1\right)\frac{p}{2}}(j-k)^{mp}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\Big)\times\\
& \Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}-\lambda m_1\right)\frac{p'}{2}}\Big)^{\frac{p}{p'}}\Big]^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}-\lambda m_1\right)\frac{p}{2}}(j-k)^{mp}[\omega_1(B_j)]^{\frac{-\lambda p}{n}}\sum_{l=-\infty}^{j}[\omega_1(B_l)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_l\|^p_{L^q_{\omega_2}}\Big)\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}[\omega_1(B_{k_0})]^{\frac{-\lambda}{n}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^q_{\omega_2}}\sum_{k=-\infty}^{j-2}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}\right)\frac{p}{2}}(j-k)^{mp}\Big)^{\frac{1}{p}}+\\
& C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\Big(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)\left(\frac{n}{q}+\alpha\delta_{\omega_1}-\lambda m_1\right)\frac{p}{2}}(j-k)^{mp}\Big)\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\
& C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}
\end{aligned}
$$

类似地可证在条件(b)下结论也成立，至此，定理 1 得证.

参考文献：

[1] LU S Z，TANG L，YANG D C. Boundedness of Commutators on Homogeneous Herz Spaces [J]. Science in China(Ser A)，1998，41(10)：1023-1033.

[2] TAO S P，WU J L. Boundedness of Higher Order Commutators of Fractional Integral Operators on Homogeneous Morrey-Herz Spaces [J]. 数学研究与评论，2007，27(3)：505-512.

[3] 徐莉芳. 齐次 Morrey-Herz 空间上交换子的有界性 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版)，2004，40(3)：297-303.

[4] 邵旭馗，陶双平. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分交换子的加权 Lipschitz 估计 [J]. 系统科学与数学，2012，32(7)：915-921.

[5] 邵旭馗. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分交换子在变指标 Herz-Hardy 空间上的有界性 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2019，57(4)：767-772.

[6] 陶双平，刘钰琦. 变量核齐次分数次积分在 Morrey 空间上的估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(12)：52-58.

[7] DING Y，LIN C C，SHAO S L. On the Marcinkiewicz Integral with Variable Kernels [J]. Indiana University Mathematics Journal，2004，53(3)：805-821.

[8] 陈雪，黄穗. 调和 Fock 空间 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(2)：26-30.

[9] 邵旭馗，陶双平. 变量核 Marcinkiewicz 积分及其交换子在变指标 Morrey 空间上的有界性 [J]. 数学物理学报，2018，38(6)：1067-1075.

[10] 高亚瑞，陶双平. 粗糙核奇异积分的 Toeplitz-型算子的加权端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(12)：81-87.

[11] 王晓燕，赵凯. 与高阶 Schrödinger-型算子相关的变分算子在型空间的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(12)：88-94.

[12] SHAO X K，TAO S P. Weighted Estimates of Variable Kernel Fractional Integral and Its Commutators on Vanishing Generalized Morrey Spaces with Variable Exponent [J]. Chinese Annals of Mathematics(Series B)，2021，42(3)：451-470.

[13] 芮俪，逯光辉. 基于 Dunkl 集上分数次极大算子及其交换子在广义 Orlicz-Morrey 空间上的估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2022，44(4)：122-127.

[14] WANG X P. Boundedness of Sublinear Operators on the Weighted Morrey-Herz Spaces [J]. 新疆大学学报(自然科学版)，2005，22(2)：151-155.

[15] 陶双平，邵旭馗. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分算子在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2010，46(3)：102-107.

[16] GARCIA-CUERVA J，FRANCIA J R D. Weighted Norm Inequalities and Related Topics [M]. New York：North-Holland Amsterdam，1995.

责任编辑　廖坤