DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2022.07.015

轴对称凸域的弦协差及其应用

赵江甫[1]， 刘海[2]

1. 福建江夏学院 数理教研部，福州 350108；2. 华中师范大学 国家数字化学习工程技术研究中心，武汉 430079

摘要：为了研究轴对称凸域的弦协差，以正五边形域为例，利用广义支持函数得到了正五边形域弦协差的具体解析式，给出了正五边形域的定向弦长分布函数的具体结果．通过建立凸体的弦协差与运动测度之间的关系式，得到了正五边形域中，当小针长度不超过其边长时，小针含于此正五边形域内的运动测度．在此基础上，分别给出无向小针、有向小针含于正五边形域内的几何概率．

关 键 词：弦协差；定向弦长分布函数；运动测度；限弦投影函数；广义支持函数

中图分类号：O186.5 **文献标志码**：A 开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673-9868(2022)07-0132-09

The Convariogram of Axisymmetric Convex Domains and Applications

ZHAO Jiangfu[1]， LIU Hai[2]

1. Department of Mathematics and Physics, Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, China;

2. National Engineering Research Center for E-learning, Central China Normal University, Wuhan 430079, China

Abstract：In order to analyze the convariograms of axisymmetric convex domains, taking the regular pentagon as an example, the explicit expression of the covariogram for a regular pentagon is obtained by using the generalized support function. The orientation-dependent chord length distribution function of the regular pentagon is given by using the covariogram. Further, through establishment of a relationship between the covariogram and the kinematic measure, a needle within a regular pentagon is given, when the length of needle does not exceed the side length of the regular pentagon. On this basis, the probabilities of a random segment, both undirected and directed, and entirely lying in a regular pentagon are given respectively.

Key words：covariogram; orientation-dependent chord length distribution function; kinematic measure; restricted chord function; generalized support function

---

收稿日期：2021-09-22

基金项目：国家自然科学基金项目(61875068)；福建省科技厅自然科学基金面上项目(2021J011229)；福建省中青年教师教育科研项目(JAT210360)；福建江夏学院科研培育人才基金项目(JXZ2019016).

作者简介：赵江甫，硕士，讲师，主要从事积分几何与几何概率的研究.

在不考虑旋转与反射的前提下，弦协差能否唯一确定一个凸体？ 这就是著名的马赫猜想．马赫猜想也等价于这样一个问题：所有的有向弦长分布能否确定一个凸体？ 运用弦长分布来证明马赫猜想是一个非常有效的办法．目前，当 $n=2$ 时，马赫猜想得到了肯定的回答[1-3]．

随着学者们的不断深入研究，弦协差已经应用到了众多领域，比如凸几何、图像分析、傅里叶分析中的相位恢复、晶体学[4-6] 等．因此求出弦协差的具体解析式显得尤为重要，但这并不容易．在这方面，Ohanyan 和他的团队做出了很大贡献．他们利用定义法，得到了一些特殊凸体（比如圆盘、等边三角形域、矩形域、圆柱体、椭圆柱体、三棱柱、球体等）的弦协差解析式[7-14]．

尽管如此，仍有很多凸域（比如正五边形域、任意四边形域、任意正多边形域等）的弦协差没有解决．而且目前的研究成果大多是针对中心对称区域，轴对称区域较少．为此，本文以正五边形域为例，研究轴对称凸域的弦协差及其在几何概率中的应用．

1　预备知识

在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，设 K 为凸体（具有非空内点的紧凸集），V_n 为 n 维勒贝格测度，S^{n-1} 为球心在原点的 $n-1$ 维单位球面[15-16]．S^{n-1} 中的每一个元素 u 称为一个方向．经过原点且与方向 u 平行的直线记为 G_u．垂直于方向 u 且通过原点的 $n-1$ 维子空间记为 $u^{\perp}$．凸体 K 在 $u^{\perp}$ 上的正交投影记为 $\prod r_{u^{\perp}} K$．

定义 1[13]　设 $G(x, u)$ 为平行于方向 u 且与 $\prod r_{u^{\perp}} K$ 相交于点 x 处的直线，则称函数

$$F(u, t)=\frac{V_{n-1}\{x \in \prod r_{u^{\perp}} K : V_1(G(u, x) \cap K)<t\}}{b_K(u)}$$

为凸体 K 在 $t \in \mathbb{R}^1$ 处沿方向 u 的定向弦长分布函数，其中 $b_K(u)=V_{n-1}(\prod r_{u^{\perp}} K)$．

定义 2　在 $\mathbb{R}^n$ 中，称函数 $t_{\max}(u)=\max\{V_1(G_u \cap K)\}$ 为凸体 K 沿方向 u 的最大弦长．

定义 3[17]　在 $\mathbb{R}^n$ 中，称函数 $r(l, u)=\min\{l, t_{\max}(u)\}$ 为凸体 K 的限弦函数．

定义 4[18]　在 $\mathbb{R}^n$ 中，设 $y \in u^{\perp}$，则称函数

$$X_u K(y)=V_1\{K \cap (G_u+y)\}$$

为凸体 K 沿方向 u 的 X-射线．

定义 5[18]　在 $\mathbb{R}^n$ 中，称函数

$$A_K(t, u)=V_{n-1}\{y \in u^{\perp} : X_u K(y) \geqslant t\}$$

为凸体 K 的限弦投影函数．特别地，当 $t=0$ 时，$A_K(t, u)$ 就是 K 在 $u^{\perp}$ 上的正交投影；当 $t \geqslant t_{\max}(u)$ 时，$A_K(t, u)=0$．

定义 6[13]　在 $\mathbb{R}^n$ 中，称函数

$$C_K(h)=V_n(K \cap (K+h)) \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

为凸体 K 的弦协差[1]，其中 $K+h=\{x+h, x \in K\}$．特别地，$C_K(0)=V_n(K)$．

注 1　对于每一个 $h \in \mathbb{R}^n$，都会存在一个方向 $u \in S^{n-1}$ 以及常数 l，使得 $h=(l, u)$．为方便起见，记

$$C_K(l, u)=C_K(lu) \qquad F(t, u)=F(tu)$$

其中 l 为 h 的长度．特别地，当 $l=t_{\max}(u)$ 时，$C_K(lu)=0$．

性质 1[2]　设 $A_K(t, u)$ 和 $C_K(lu)$ 分别为 $\mathbb{R}^n$ 中凸体 K 的限弦投影函数和弦协差，则有

$$C_K(lu)=\int_l^{+\infty} A_K(t, u) \mathrm{d} t \tag{1}$$

特别地，当 $l=0$ 时，由(1) 式，可得

$$V_n(K)=C_K(0)=\int_0^{+\infty} A_K(t, u) \mathrm{d} t \tag{2}$$

将(2) 式代入(1) 式，可得

$$C_K(lu)=V_n(K)-\int_0^l A_K(t, u) \mathrm{d} t \tag{3}$$

注2 在 $\mathbb{R}^2$ 中，方向 $u \in S^1$ 可表示为 $(\cos\varphi, \sin\varphi)$，$\varphi \in [0, 2\pi]$，所以凸体 $K \in \mathbb{R}^2$ 的限弦投影函数 $A_K(t, u)$、弦协差 $C_K(lu)$、定向弦长分布函数 $F(tu)$ 分别可用 $A_K(t, \varphi)$，$C_K(l\varphi)$，$F(t\varphi)$ 替代，因此(3)式可化为

$$C_K(l\varphi) = V_2(K) - \int_0^l A_K(t, \varphi)\mathrm{d}t = F - \int_0^l A_K(t, \varphi)\mathrm{d}t \tag{4}$$

其中 F 为凸体 K 的面积.

2 主要结论

定理1 设 Π 是边长为 a 的正五边形域，当 $0 \leqslant l \leqslant a$ 时，其弦协差函数为

$$C_\Pi(l\varphi) = \begin{cases} C_{\Pi_1} & 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{5} \\ C_{\Pi_2} & \dfrac{2\pi}{5} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{5} \\ C_{\Pi_3} & \dfrac{3\pi}{5} \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases} \tag{5}$$

其中，C_{Π_1}，C_{Π_2}，C_{Π_3} 如(12)-(14)式所示.

定理2 设 Π 是边长为 a 的正五边形域，当 $0 \leqslant l \leqslant a$ 时，Π 在 t 处沿方向 u 的定向弦长分布函数为

$$F_\Pi(t\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{5a}t\left[(6-2\sqrt{5})\cos\varphi - t\sec\varphi\right] & 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{5} \\ \dfrac{(\sqrt{5}-5)}{5a}t\cos\varphi + \dfrac{t\sec\varphi}{10a}(3\sqrt{5}-5) + \sqrt{250-110\sqrt{5}}\sin 2\varphi + \dfrac{3}{2} - & \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\tan\varphi & \dfrac{2\pi}{5} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{5} \\ 1 - \dfrac{\tan\varphi}{5a}\left[\sqrt{25-10\sqrt{5}}\,a + 2\sqrt{25-10\sqrt{5}}\,t\cos\varphi + (10-4\sqrt{5})\,t\sin\varphi\right] & \dfrac{3\pi}{5} \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases} \tag{6}$$

定理3 设 Π 是边长为 a 的正五边形域，N 是长度为 $l(\leqslant a)$ 的无向小针，则小针 N 含于 Π 内的运动测度为

$$m(l) = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\pi a^2 - 5al + \frac{l^2}{20}\left(25 - 2\pi\sqrt{25-10\sqrt{5}}\right) \tag{7}$$

定理4 设 Π 是边长为 a 的正五边形域，N 是长度为 $l(\leqslant a)$ 的无向小针，则小针 N 含于 Π 内的几何概率为

$$P(N \subset \Pi) = \frac{5\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\pi a^2 - 100al + l^2\left(25 - 2\pi\sqrt{25-10\sqrt{5}}\right)}{5\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\pi a^2 + 100al} \tag{8}$$

定理5 设 Π 是边长为 a 的正五边形域，N_u 是长度为 $l(\leqslant a)$ 且方向为 $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ 的有向小针，则小针 N_u 含于 Π 内的几何概率为

$$P(N_u \subset \Pi) = \begin{cases} \dfrac{5\sqrt{5}a^2 - 20al\cos\varphi + 2l^2\left[2\sqrt{5} - 5 + (3\sqrt{5}-5)\cos 2\varphi\right]}{5a(\sqrt{5}a + 4l\cos\varphi)} & 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{5} \\ \dfrac{5\sqrt{5}a^2 - 2al\left[5(\sqrt{5}-1)\cos\varphi + \sqrt{50-10\sqrt{5}}\sin\varphi\right]}{5a(\sqrt{5}a + 4l\cos\varphi)} + & \\ \dfrac{2l^2\left[4\sqrt{5} - 10 + (\sqrt{5}-5)\cos 2\varphi + \sqrt{250-110\sqrt{5}}\sin 2\varphi\right]}{5a(\sqrt{5}a + 4l\cos\varphi)} & \dfrac{2\pi}{5} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{5} \\ \dfrac{5\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2 - 20al\sin\varphi - 4l^2\sin\varphi(5\cos\varphi + \sqrt{25-10\sqrt{5}}\sin\varphi)}{5\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a(\sqrt{5}a + 4l\cos\varphi)} & \dfrac{3\pi}{5} \leqslant \varphi \leqslant \pi \end{cases} \tag{9}$$

3　定理的证明

设 G 为 $\mathbb{R}^2$ 中的直线，其广义法式方程为

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=p \qquad 0\leqslant\varphi<2\pi,\ -\infty<p<+\infty$$

定义 7[17]　设 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中的凸体，对任意实数 t，当 $0\leqslant\varphi<2\pi$ 时，称函数

$$p(t,\varphi)=\sup_G\{p: V_1(K\cap G)\}$$

为凸体 K 的广义支持函数.

凸体的广义支持函数与限弦投影函数有以下关系[17]：

$$A_K(t,\varphi)=p(t,\varphi)+p(t,\pi+\varphi)=2p(t,\varphi) \tag{10}$$

设 Π 是边长为 a 的正五边形域，其边界为正五边形 $ABCDE$，现以 AB 所在直线为 y 轴，线段 AB 的中点为原点 O，对称轴 OD 为 x 轴建立直角坐标系. 由(9)式和(4)式可得弦协差为

$$C_\Pi(l\varphi)=F-2\int_0^l p(t,\varphi)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-2\int_0^l p(t,\varphi)\mathrm{d}t \tag{11}$$

下面证明定理 1.

定理 1 的证明　Π 的 5 条边所在的直线方程分别为：

$$\begin{cases} l_{AE}: y=xk_1+\dfrac{a}{2} \\ l_{ED}: y=-k_2(x-b) \\ l_{DC}: y=k_2(x-b) \\ l_{CB}: y=-k_1x-\dfrac{a}{2} \\ l_{BA}: x=0 \end{cases}$$

其中

$$k_1=\tan\frac{\pi}{10} \qquad k_2=\tan\frac{3\pi}{10} \qquad b=2a\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

设直线 G 与 5 条边 AE，ED，DC，CB，BA 的交点坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，(x_4, y_4)，(x_5, y_5)，分别联立直线 G 的方程与 5 条边的方程，可解得

$$y_1=\frac{k_1p+\dfrac{a}{2}\cos\varphi}{\cos\varphi+k_1\sin\varphi} \qquad y_2=\frac{k_2(b\cos\varphi-p)}{\cos\varphi-k_2\sin\varphi} \qquad y_3=\frac{k_2(p-b\cos\varphi)}{\cos\varphi+k_2\sin\varphi}$$

$$y_4=\frac{-k_1p-\dfrac{a}{2}\cos\varphi}{\cos\varphi-k_1\sin\varphi} \qquad y_5=\frac{p}{\sin\varphi}$$

为了计算 $C_\Pi(t\varphi)$，将区间 $[0,\pi]$ 划分成 $\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$，$\left[\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right]$，$\left[\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right]$，$\left[\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5}\right]$，$\left[\frac{4\pi}{5},\pi\right]$ 5 个子区间.

当 $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$ 时，令

$$t_1=a\sin\frac{2\pi}{5}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$t_2=2a\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\csc\left(\varphi+\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\csc\left(\varphi+\frac{2\pi}{5}\right)$$

则有

$$t_1\geqslant a \qquad t_{\max}(\varphi)=t_2$$

因此，当 $0\leqslant t\leqslant a$ 时，直线 G 与边 ED，DC 相交，且有

$$y_2-y_3=t\cos\varphi$$

解此方程可得

$$p(t,\varphi)=p_{23}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\cos\varphi-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}t\left[(1+\sqrt{5})\cos 2\varphi-1\right]$$

因此弦协差为

$$\begin{aligned}C_{\Pi}(l,\varphi)=C_{\Pi_1}=&\\&\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-2\int_0^l p_{23}\,\mathrm{d}t=\\&\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-\int_0^l\left\{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a\cos\varphi-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}t\left[(1+\sqrt{5})\cos 2\varphi-1\right]\right\}\mathrm{d}t=\\&\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,al\cos\varphi+\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10}l^2\left[(1+\sqrt{5})\cos 2\varphi-1\right]\end{aligned}\tag{12}$$

当 $\varphi\in\left[\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right]$ 时，令

$$t_3=a\sin\frac{2\pi}{5}\csc\left(\varphi+\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\csc\left(\varphi+\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$t_4=2a\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\csc\left(\varphi+\frac{\pi}{5}\right)$$

则有

$$t_3\geqslant a\qquad t_{\max}(\varphi)=t_4$$

因此，当 $0\leqslant t\leqslant a$ 时，直线 G 与边 AE，ED 相交，且有

$$y_1-y_2=t\cos\varphi$$

解此方程可得

$$\begin{aligned}p(t,\varphi)=p_{12}=&\\&\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}\left\{5(1+\sqrt{5})a\cos\varphi+2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a\sin\varphi-\right.\\&\left.\sqrt{5}t\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sin 2\varphi-(\sqrt{5}+1)\cos 2\varphi-\sqrt{5}+1\right]\right\}\end{aligned}$$

因此弦协差为

$$\begin{aligned}C_{\Pi}(l,\varphi)=C_{\Pi_2}=&\\&\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-2\int_0^l p_{12}\,\mathrm{d}t=\\&\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-\int_0^l\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}\left\{5(1+\sqrt{5})a\cos\varphi+2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a\sin\varphi-\right.\\&\left.\sqrt{5}t\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sin 2\varphi-(\sqrt{5}+1)\cos 2\varphi-\sqrt{5}+1\right]\right\}\mathrm{d}t=\\&\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2-\frac{l\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}\left[10(1+\sqrt{5})a\cos\varphi+4\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a\sin\varphi-\right.\\&\left.\sqrt{50-10\sqrt{5}}\,l\sin 2\varphi+(5+\sqrt{5})l\cos 2\varphi+(5-\sqrt{5})l\right]\end{aligned}\tag{13}$$

当 $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$ 时，令

$$t_5 = a\sin\frac{2\pi}{5}\csc\left(\varphi - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\csc\left(\varphi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$t_6 = 2a\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\csc\varphi = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\csc\varphi$$

则有

$$t_5 \geqslant a \qquad t_{\max}(\varphi) = t_6$$

因此，当 $0 \leqslant t \leqslant a$ 时，直线 G 与边 AE，ED 相交，同 $\varphi \in \left[\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right]$ 的情形，有 $C_{\Pi}(l\varphi) = C_{\Pi_2}$.

当 $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$ 时，令

$$t_7 = a\sin\frac{2\pi}{5}\csc\varphi = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\csc\varphi$$

$$t_8 = 2a\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\csc\left(\varphi - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\csc\left(\varphi - \frac{\pi}{5}\right)$$

则有

$$t_7 \geqslant a \qquad t_{\max}(\varphi) = t_8$$

因此，当 $0 \leqslant t \leqslant a$ 时，直线 G 与边 BA，AE 相交，且有 $y_5 - y_1 = t\cos\varphi$，解此方程可得

$$p(t, \varphi) = p_{51} = \frac{\sqrt{5}+2}{2}a\cos\varphi + \frac{t}{10}\left(5\sin 2\varphi - \sqrt{25-10\sqrt{5}}\cos 2\varphi + \sqrt{25-10\sqrt{5}}\right)$$

因此弦协差为

$$\begin{aligned} C_{\Pi}(l, \varphi) = C_{\Pi_3} = {} & \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2 - 2\int_0^l p_{51}\,\mathrm{d}t = \\ & \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2 - \int_0^l \left[(\sqrt{5}+2)a\cos\varphi + \frac{t}{5}\left(5\sin 2\varphi - \sqrt{25-10\sqrt{5}}\cos 2\varphi + \sqrt{25-10\sqrt{5}}\right)\right]\mathrm{d}t = \\ & \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2 - \frac{l\sin\varphi}{5}\left(5a + 5l\cos\varphi + \sqrt{25-10\sqrt{5}}\,l\sin\varphi\right) \end{aligned} \tag{14}$$

当 $\varphi \in \left[\frac{4\pi}{5}, \pi\right]$ 时，令

$$t_9 = a\sin\frac{2\pi}{5}\csc\left(\varphi - \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\csc\left(\varphi - \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$t_{10} = 2a\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\csc\left(\varphi - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a\csc\left(\varphi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

则有

$$t_9 \geqslant a \qquad t_{\max}(\varphi) = t_{10}$$

因此，当 $0 \leqslant t \leqslant a$ 时，直线 G 与边 BA，AE 相交，同 $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$ 的情形，有 $C_{\Pi}(l\varphi) = C_{\Pi_3}$.

综上所述，当 $t \in [0, a]$ 时，正五边形域 Π 的弦协差为

$$C_{\Pi}(l\varphi)=\begin{cases} C_{\Pi_1} & 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{5} \\ C_{\Pi_2} & \frac{2\pi}{5}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{5} \\ C_{\Pi_3} & \frac{3\pi}{5}\leqslant\varphi\leqslant\pi \end{cases}$$

引理1[12] 设K为$\mathbb{R}^n$中的凸体，对于每一个方向$u\in S^{n-1}$，当$t\geqslant 0$时，其弦协差$C_K(tu)$关于变量t可微，且满足

$$-\frac{\partial C_K(tu)}{\partial t}=(1-F(tu))\cdot b_K(u) \tag{15}$$

特别地，当$t=0$时，有

$$b_K(u)=-\frac{\partial C_{\Pi}(tu)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \tag{16}$$

引理2[14] 设K为$\mathbb{R}^n$中的凸体，L是长度为l的线段，则L含于K内的运动测度为

$$m(l)=\int_{N\subset K}\mathrm{d}N=\frac{1}{2}O_1O_2\cdots O_{n-1}V_n(K)-\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}S^{n-1}}\mathrm{d}u\int_0^{r(l,u)}A(t,u)\mathrm{d}t \tag{17}$$

其中O_i表示i维单位球面S^i的面积.

引理3[13] 设K为$\mathbb{R}^n$中的凸体，L是长度为l的线段，则L与凸体K相交的运动测度为

$$m_L(l)=\int_{L\cap K\neq\varnothing}\mathrm{d}L=\frac{1}{4}O_0O_1\cdots O_{n-2}\left[V_n(K)O_{n-1}+\frac{lO_{n-2}V_{n-1}(\partial K)}{n-1}\right] \tag{18}$$

其中∂K表示凸体K的边界.

引理4[11] 设K为$\mathbb{R}^n$中的凸体，L_u是长度为l且方向为u的有向线段，则L_u含于凸体K内的概率为

$$P(L_u\subset K)=\frac{C_K(lu)}{V_n(K)+lb_K(u)} \tag{19}$$

定理2的证明 由(15)式可得凸体K在t点处沿方向u的定向分布函数为

$$F(tu)=1+\frac{1}{b_K(u)}\cdot\frac{\partial C_K(tu)}{\partial t}$$

因此正五边形域Π的定向弦长分布函数可表示为

$$F(t\varphi)=1+\frac{1}{b_K(\varphi)}\cdot\frac{\partial C_K(t\varphi)}{\partial t} \tag{20}$$

由(11)式可得

$$\frac{\partial C_{\Pi}(t\varphi)}{\partial t}=-2p(t,\varphi)=$$

$$\begin{cases} -\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a\cos\varphi+\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}t\left[(1+\sqrt{5})\cos 2\varphi-1\right] & 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{5} \\ -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}\left\{5(1+\sqrt{5})a\cos\varphi+2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a\sin\varphi-\right. & \\ \left.\sqrt{5}t\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sin 2\varphi-(\sqrt{5}+1)\cos 2\varphi-\sqrt{5}+1\right]\right\} & \frac{2\pi}{5}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{5} \\ -(\sqrt{5}+2)a\cos\varphi-\frac{t}{5}\left(5\sin 2\varphi-\sqrt{25-10\sqrt{5}}\cos 2\varphi+\sqrt{25-10\sqrt{5}}\right) & \frac{3\pi}{5}\leqslant\varphi\leqslant\pi \end{cases} \tag{21}$$

由(16)式可得

$$b_{\Pi}(u)=2p_{23}\ |_{t=0}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a\cos\varphi \tag{22}$$

将(21)-(22) 式代入(20) 式，(6) 式得证.

定理 3 的证明　由限弦函数的定义可得，当 $l\leqslant t_{\max}(u)$ 时，$r(l,u)=l$. 因此(3) 式可表示为

$$C_K(lu)=V_n(K)-\int_0^{r(l,u)}A(t,u)\mathrm{d}t$$

当 $l\geqslant t_{\max}(u)$ 时，$r(l,u)=t_{\max}(u)$，因此(3) 式可表示为

$$C_K(lu)=V_n(K)-\int_0^{r(l,u)}A(t,u)\mathrm{d}t-\int_{r(l,u)}^{l}A(t,u)\mathrm{d}t=V_n(K)-\int_0^{r(l,u)}A(t,u)\mathrm{d}t$$

综上所述，凸体 K 的弦协差可表示为

$$C_K(lu)=V_n(K)-\int_0^{r(l,u)}A(t,u)\mathrm{d}t \tag{23}$$

将(23) 式代入(17) 式，得

$$\begin{aligned}m(l)=&\frac{1}{2}O_1O_2\cdots O_{n-2}\left(O_{n-1}V_n(K)-O_0\int_{\frac{1}{2}S^{n-1}}\mathrm{d}u\int_0^{r(l,u)}A(t,\varphi)\mathrm{d}t\right)=\\&\frac{1}{2}O_1O_2\cdots O_{n-2}\left(\int_{\frac{1}{2}S^{n-1}}2V_n(K)\mathrm{d}u-2\int_{\frac{1}{2}S^{n-1}}\mathrm{d}u\int_0^{r(l,u)}A(t,\varphi)\mathrm{d}t\right)=\\&\frac{1}{2}O_0O_1O_2\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}S^{n-1}}\left(V_n(K)-\int_0^{r(l,u)}A(t,\varphi)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\\&\frac{1}{2}O_0O_1O_2\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}S^{n-1}}C_K(lu)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{24}$$

在(24) 式中，取 $n=2$，可得长度为 l 的小针 N 含于正五边形域 Π 内的运动测度为

$$m(l)=\int_0^{\pi}C_{\Pi}(l\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{5}}C_{\Pi_1}\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{3\pi}{5}}C_{\Pi_2}\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{3\pi}{5}}^{\pi}C_{\Pi_3}\mathrm{d}\varphi \tag{25}$$

将(12)-(14) 式代入(25) 式，(7) 式得证.

定理 4 的证明　长度为 $l(\leqslant a)$ 的无向小针 N 含于正五边形域 Π 内的几何概率为

$$P(N\subset\Pi)=\frac{\int_{N\subset K}\mathrm{d}N}{\int_{N\cap K\neq\varnothing}\mathrm{d}N}=\frac{m(l)}{m_N(l)} \tag{26}$$

在引理 3 中，取 $n=2$，则长度为 $l(\leqslant a)$ 的无向小针 N 与正五边形域 Π 相交的运动测度为

$$m_N(l)=\int_{N\cap K\neq\varnothing}\mathrm{d}N=\pi V_2(\Pi)+lV_1(\partial\Pi)=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\pi a^2+5al \tag{27}$$

将(7) 式、(27) 式代入(26) 式，(8) 式得证. 证毕.

定理 5 的证明　在引理 4 中，取 $n=2$，则长度为 $l(\leqslant a)$ 且方向为 u 的有向小针 N_u 含于 Π 内的几何概率为

$$P(N_u\subset\Pi)=\frac{C_{\Pi}(lu)}{V_2(\Pi)+lb_{\Pi}(u)}=\frac{C_{\Pi}(l\varphi)}{\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2+l\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,a\cos\varphi} \tag{28}$$

将(12)-(14) 式代入(28) 式，(9) 式得证.

4　结语

本文以正五边形域为例，讨论了轴对称凸域的弦协差及其应用，其他轴对称凸域(如等腰梯形域)可类似讨论. 首先详细地给出了正五边形域的广义支持函数的求解过程，并利用这个函数，给出当 $l\leqslant a$ 时正五边形域的弦协差的具体解析式，增加了能够求解弦协差解析式的 2 维凸域的种类. 接着，利用弦协差得到

小针含于正五边形域内的运动测度. 在此基础上，分别计算了无向小针、有向小针含于正五边形域内的几何概率. 虽然以上结果讨论的均是当小针长度不超过正五边形边长时的情形，但却提供了一种计算方法，其他情形都可类似讨论.

另外，利用定理 3 中的结果，可进一步将 Buffon 投针问题进行推广，求出小针与特殊网格相遇的概率. 虽然正五边形不能铺满整个平面，无法组成 Buffon 网格，但是添加一个边长与之相等的菱形，却可以铺满整个平面. 因此，利用定理 3 所得的运动测度，可进一步研究小针与此新型网格相交的概率.

参考文献：

[1] NAGEL W. Orientation-Dependent Chord Length Distributions Characterize Convex Polygons [J]. Journal of Applied Probability, 1993, 30(3): 730-736.

[2] AVERKOV G, BIANCHI G. Confirmation of Matheron's Conjecture on the Covariogram of a Planar Convex Body [J]. Journal of the European Mathematical Society, 2009, 11(6): 1187-1202.

[3] BENASSI C, BIANCHI G, D'ERCOLE G. Covariogram of Non-Convex Sets [J]. Mathematika, 2010, 56(2): 267-284.

[4] BIANCHI G. Matheron's Conjecture for the Covariogram Problem [J]. Journal of the London Mathematical Society, 2005, 71(2): 203-220.

[5] BIANCHI G, GARDNER R J, KIDERLEN M. Phase Retrievalfor Characteristic Functions of Convex Bodies and Reconstruction from Covariograms [J]. Journal of the American Mathematical Society, 2011, 24(2): 293-343.

[6] BIANCHI G. The Covariogram and Fourier-Laplace Transform in $\mathbb{C}^n$ [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 2016, 113(3): 1-23.

[7] OHANYAN V K, ADAMYAN G L. Covariogram of a Right Parallelepiped [J]. Proceedings of the Yerevan State University, 2019, 53(2): 101-108.

[8] HARUTYUNYAN H S, OHANYAN V K. Covariogram of a Cylinder [J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2014, 49(6): 366-375.

[9] AHARONYAN N G, HARUTYUNYAN H O. Geometric Probability Calculation for a Triangle [J]. Proceedings of the Yerevan State University, 2017, 51(3): 211-216.

[10] GASPARYAN A G, OHANYAN V K. Covariogram of a Parallelogram [J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2014, 49(4): 194-206.

[11] AHARONYAN N G, OHANYAN V K. Calculation of Geometric Probabilities Using Covariogram of Convex Bodies [J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 2018, 53(2): 113-120.

[12] GASPARYAN A, OHANYAN V K. Recognition of Triangles by Covariogram [J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 2013, 48(3): 91-103.

[13] GASPARYAN A G, OHANYAN V K. Orientation-Dependent Distribution of the Length of a Random Segment and Covariogram [J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2015, 50(2): 90-97.

[14] OHANYAN V K, MARTIROSYAN D M. Orientation-Dependent Chord Length Distribution Function for Right Prisms with Rectangular or Right Trapezoidal Bases [J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 2020, 55(6): 344-355.

[15] 杨林，谭杨，罗淼. 广义 L_p 宽度积分的混合 Brunn-Minkowski 型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(2): 37-42.

[16] 杨林，罗淼，王贺军. L_p 对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 79-83.

[17] REN D L. Topics in Integral Geometry [M]. Singapore: World Scientific, 1994: 201-227.

[18] GARDNER R J, ZHANG G Y. Affine Inequalities and Radial Mean Bodies [J]. American Journal of Mathematics, 1998, 120(3): 505-528.

责任编辑　廖坤