第 44 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2022 年 8 月
Vol. 44　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2022

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2022.08.011

双指标弱鞅的一类极小值不等式

冯德成，　贾瑞洁，　慕彩银

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：利用弱鞅的极小值不等式，给出了双指标弱鞅的一类极小值不等式.

关　键　词：弱鞅；双指标弱鞅；极小值不等式

中图分类号：O211.4　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673-9868(2022)08-0097-07　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

A Class of Minimal Inequalities for Two-Parameter Demimartingales

FENG Decheng，　JIA Ruijie，　MU Caiyin

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：In this paper，we give a class of minimal inequalities for two-parameter demimartingales by using the minimal inequalities of demimartingales.

Key words：demimartingales；two-parameter demimartingales；minimal inequalities

文献[1]于 1982 年提出了弱鞅的概念，之后很多学者对这一概念进行了深入研究[2-6]. 后来，文献[7]给出了双指标弱(下)鞅的概念.

设 $\mathbb{N}^2$ 表示二维正整数序列. 对于 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^2$，有 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)$，$\boldsymbol{m}=(m_1,m_2)$. 如果 $n_i\leqslant m_i$，$i=1,2$，则记为 $\boldsymbol{n}\leqslant\boldsymbol{m}$. 如果 $n_i\leqslant m_i$，$i=1,2$，并且这两个不等式中至少有一个是满足严格小于的，则记为 $\boldsymbol{n}<\boldsymbol{m}$. 另外，若 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2)$，则 $\boldsymbol{k}\to\infty$ 表示 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2}k_j\to\infty$.

文献[8]提出了相协随机变量序列的概念. 文献[7]将相协的概念推广到双指标随机变量序列中.

定义 1[7]　一个由双指标随机变量构成的集合 $\{X_{\boldsymbol{i}},\boldsymbol{i}\leqslant\boldsymbol{n}\}$ 被称为是相协的，如果对任意两个分量不减的函数 f 和 g，有

收稿日期：2021-06-24

基金项目：国家自然科学基金项目(11861057，11761064)；甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019A-003)；西北师范大学研究生科研资助项目(2021KYZZ02093).

作者简介：冯德成，博士，副教授，主要从事应用概率方向研究.

通信作者：贾瑞洁，硕士.

$$\mathrm{Cov}(f(X_i, \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{n}), g(X_i, \boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{n})) \geqslant 0$$

这里假设上述协方差存在. 如果一个无限序列的有限子集是相协的，则称这个无限序列也是相协的. 满足上述条件的随机变量构成的集合也被称为一个相协随机域.

定义2[7] $\{X_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双指标随机变量序列，如果对 $\forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^2$，当 $\boldsymbol{i} \leqslant \boldsymbol{j}$ 时，有

$$E[(X_{\boldsymbol{j}} - X_{\boldsymbol{i}}) f(X_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k} \leqslant \boldsymbol{i})] \geqslant 0$$

其中 f 是使上述期望存在且分量不减的任意函数，那么称 $\{X_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双指标弱鞅. 另外，进一步假设 f 是非负的，那么称 $\{X_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双指标弱下鞅.

有关双指标随机变量序列以及双指标弱(下)鞅，很多学者进行了研究[9-13]. 本文主要将文献[14-15]中关于弱鞅的极小值不等式分别推广到双指标弱鞅的情形，给出了双指标弱鞅的一类极小值不等式..

1 主要结论及其证明

定理1 设 $\{Y_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个非负的双指标弱(下)鞅，当 $k_1 k_2 = 0$ 时，$Y_{\boldsymbol{n}} = 0$. 进一步假设 $\{c_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2\}$ 是不减的正数序列，$g(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的不减凸函数，且 $g(0) = 0$. 则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij} g(Y_{ij}) \leqslant \varepsilon\} \geqslant \max\{\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] - \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{n_1 j} g(Y_{n_1 j}) I\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij} g(Y_{ij}) > \varepsilon\}],$$
$$\sum_{i=1}^{n_1} E[c_{i1} g(Y_{i1})] - \sum_{i=1}^{n_1} E[c_{in_2} g(Y_{in_2}) I\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij} g(Y_{ij}) > \varepsilon\}]\}$$

证 我们设

$$A = \{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij} g(Y_{ij}) \leqslant \varepsilon\}$$
$$B_{1j} = \{c_{1j} g(Y_{1j}) \leqslant \varepsilon\} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n_2$$

并且

$$B_{ij} = \{c_{rj} g(Y_{rj}) > \varepsilon, 1 \leqslant r < i; c_{ij} g(Y_{ij}) \leqslant \varepsilon\} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$$

由集合 A 和 B_{ij} 的定义，可知 $A = \bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} B_{ij}$. 又因为 $\{c_{ij}, i \geqslant 1, j \geqslant 1\}$ 是不减的正数序列，则

$$\begin{aligned}
&\varepsilon P(A) = \varepsilon P(\bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} B_{ij}) = \varepsilon \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} P(B_{ij}) = \\
&\sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} E[\varepsilon I(B_{ij})] \geqslant \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})] = \\
&\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j}) I(B_{1j})] + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=2}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})] = \\
&\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] - \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j}) I(B_{1j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j} g(Y_{2j}) I(B_{2j})] + \\
&\sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})] \geqslant \\
&\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] + \sum_{j=1}^{n_2} c_{2j} E[g(Y_{2j}) I(B_{2j}) - g(Y_{1j}) I(B_{1j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})]
\end{aligned}$$

由于 $B_{2j} \subset B_{1j}^c$，则有

$$I(B_{2j}) = I(B_{1j}^c) - I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)$$

因此

$$\varepsilon P(A) \geqslant \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] + \sum_{j=1}^{n_2} c_{2j} E[(g(Y_{2j}) - g(Y_{1j})) I(B_{1j}^c)] - \sum_{j=1}^{n_2} c_{2j} E[g(Y_{2j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})]$$

我们设

$$h(x) = \lim_{y \to x^-} \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

由于 $g(\cdot)$ 是不减凸函数，则 $h(x)$ 是一个非负不减函数，并且有

$$g(y) - g(x) \geqslant (y - x) h(x)$$

故有

$$g(Y_{2j}) - g(Y_{1j}) \geqslant (Y_{2j} - Y_{1j}) h(Y_{1j})$$

又因为 $I(B_{1j}^c)$ 是关于 Y_{1j} 的非负不减函数，所以 $I(B_{1j}^c) h(Y_{1j})$ 也是关于 Y_{1j} 的非负不减函数. 因此由 $\{Y_{ij}, i \geqslant 1, j \geqslant 1\}$ 双指标弱(下)鞅的性质可得

$$E[(g(Y_{2j}) - g(Y_{1j})) I(B_{1j}^c)] \geqslant E[(Y_{2j} - Y_{1j}) h(Y_{1j}) I(B_{1j}^c)] \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n_2 \tag{1}$$

由(1)式和 $\{c_{ij}, i \geqslant 1, j \geqslant 1\}$ 的不减性可得

$$\begin{aligned}
\varepsilon P(A) \geqslant & \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] - \sum_{j=1}^{n_2} c_{2j} E[g(Y_{2j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})] = \\
& \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] - \sum_{j=1}^{n_2} c_{2j} E[g(Y_{2j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} c_{3j} E[g(Y_{3j}) I(B_{3j})] + \\
& \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})] \geqslant \\
& \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] - \sum_{j=1}^{n_2} c_{3j} E[g(Y_{2j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} c_{3j} E[g(Y_{3j}) I(B_{3j})] + \\
& \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})] = \\
& \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] + \sum_{j=1}^{n_2} c_{3j} E[g(Y_{3j}) I(B_{3j}) - g(Y_{2j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)] + \\
& \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})]
\end{aligned}$$

由于 $B_{3j} \subset B_{1j}^c \cap B_{2j}^c$，则有

$$I(B_{3j}) = I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c) - I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c \cap B_{3j}^c)$$

因此

$$\begin{aligned}
\varepsilon P(A) \geqslant & \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j} g(Y_{1j})] + \sum_{j=1}^{n_2} c_{3j} E[(g(Y_{3j}) - g(Y_{2j})) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)] - \\
& \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{3j} g(Y_{3j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c \cap B_{3j}^c)] + \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij} g(Y_{ij}) I(B_{ij})]
\end{aligned}$$

同理，由于 $g(Y_{3j}) - g(Y_{2j}) \geqslant (Y_{3j} - Y_{2j}) h(Y_{2j})$，$I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)$ 是关于 $\{Y_{1j}, Y_{2j}\}$ 的一个非负且分量不减的函数，则 $h(Y_{2j}) I(B_{1j}^c \cap B_{2j}^c)$ 也是关于 $\{Y_{1j}, Y_{2j}\}$ 的非负分量不减的函数. 所以由双指标弱(下)鞅的性质可得

$$E[(g(Y_{3j})-g(Y_{2j}))I(B_{1j}^c\cap B_{2j}^c)]\geqslant E[(Y_{3j}-Y_{2j})h(Y_{2j})I(B_{1j}^c\cap B_{2j}^c)]\geqslant 0\qquad j=1,2,\cdots,n_2$$

因此

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{1j}g(Y_{1j})]-\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{3j}g(Y_{3j})I(B_{1j}^c\cap B_{2j}^c\cap B_{3j}^c)]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]$$

重复相同步骤，可得

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{1j}g(Y_{1j})]-\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1j}g(Y_{n_1j})I(A^c)]\tag{2}$$

同理可得

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{i1}g(Y_{i1})]-\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{in_2}g(Y_{in_2})I(A^c)]\tag{3}$$

结合(2)式和(3)式，可证得结论

$$\begin{aligned}&\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\leqslant\varepsilon\}\geqslant\\&\max\{\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{1j}g(Y_{1j})]-\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1j}g(Y_{n_1j})I\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})>\varepsilon\}],\\&\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{i1}g(Y_{i1})]-\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{in_2}g(Y_{in_2})I\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})>\varepsilon\}]\}\end{aligned}$$

如果在定理 1 中取 $g(x)=x$，就可以得到以下推论.

推论 1 设$\{Y_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$是一个非负的双指标弱(下)鞅，假设$\{c_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$是不减的正数序列. 则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\leqslant\varepsilon\}\geqslant\max\{&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{1j}Y_{1j})-\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1j}Y_{n_1j}I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}>\varepsilon)],\\&\sum_{i=1}^{n_1}E(c_{i1}Y_{i1})-\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{in_2}Y_{in_2}I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{i,j}Y_{ij}>\varepsilon)]\}\end{aligned}$$

进一步，若令$c_{\boldsymbol{n}}\equiv 1$，则有下面的推论.

推论 2 设$\{Y_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$是一个非负的双指标弱(下)鞅，且$g(0)=0$，则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\leqslant\varepsilon\}\geqslant\max\{&\sum_{j=1}^{n_2}EY_{1j}-\sum_{j=1}^{n_2}E[Y_{n_1j}I\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}>\varepsilon\}],\\&\sum_{i=1}^{n_1}EY_{i1}-\sum_{i=1}^{n_1}E[Y_{in_2}I\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}>\varepsilon\}]\}\end{aligned}$$

定理 2 设$\{Y_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$是一个非负的双指标弱鞅，当$k_1k_2=0$时，$Y_{\boldsymbol{n}}=0$. 进一步假设$\{c_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$是一个不增的正数序列，$g(\cdot)$是$\mathbb{R}$上的不减凸函数，且$g(0)=0$. 则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\leqslant\varepsilon\}\geqslant\max\{&\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1j}g(Y_{n_1j})I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\leqslant\varepsilon)],\\&\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{in_2}g(Y_{in_2})I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\leqslant\varepsilon)]\}\end{aligned}$$

证 设

$$A=\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\leqslant\varepsilon\}$$

$$B_{1j}=\{c_{1j}g(Y_{1j})\leqslant\varepsilon\}\qquad 1\leqslant j\leqslant n_2$$

并且

$$B_{ij}=\{c_{rj}g(Y_{rj})>\varepsilon,1\leqslant r<i;c_{ij}g(Y_{ij})\leqslant\varepsilon\}\qquad 2\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n$$

由集合 A 和 B_{ij} 的定义可知 $A=\bigcup\limits_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}B_{ij}$. 因此

$$\varepsilon P(A)=\varepsilon P(\bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}B_{ij})=\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}E[\varepsilon I(B_{ij})]\geqslant\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]=$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{1j}g(Y_{1j})I(B_{1j})]+\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{2j}g(Y_{2j})I(B_{2j})]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]$$

由于 $I(B_{2j})=I(B_{1j}\cup B_{2j})-I(B_{1j})$ 且 $\{c_{ij},i\geqslant1,j\geqslant1\}$ 为不增的正数序列，所以

$$\varepsilon P(A)=\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{1j}g(Y_{1j})I(B_{1j})]+\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{2j}g(Y_{2j})I(B_{1j}\cup B_{2j})-c_{2j}g(Y_{2j})I(B_{1j})]+$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{2j}g(Y_{2j})I(B_{1j}\cup B_{2j})]+\sum_{j=1}^{n_2}c_{2j}E[(g(Y_{1j})-g(Y_{2j}))I(B_{1j})]+$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]$$

我们设

$$h(x)=\lim_{y\to x^-}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$

由于 $g(\cdot)$ 是不减凸函数，则 $h(x)$ 是一个非负不减函数，并且

$$g(y)-g(x)\geqslant(y-x)h(x)$$

所以

$$g(Y_{1j})-g(Y_{2j})\geqslant(Y_{1j}-Y_{2j})h(Y_{2j})\tag{4}$$

由于 $I(B_{1j})$ 是关于 Y_{1j} 的不增函数，所以 $-I(B_1)$ 是关于 Y_{1j} 的不减函数，$h(Y_{2j})(-I(B_{1j}))$ 也是关于 Y_{1j} 的不减函数，因此由双指标弱鞅的定义可知

$$c_{2j}E[(g(Y_{1j})-g(Y_{2j}))I(B_{1j})]\geqslant c_{2j}E[(Y_{2j}-Y_{1j})h(Y_{2j})(-I(B_{1j}))]\geqslant0$$

因此

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{2j}g(Y_{2j})I(B_{1j}\cup B_{2j})]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]$$

又因为 $I(B_{3j})=I(B_{1j}\cup B_{2j}\cup B_{3j})-I(B_{1j}\cup B_{2j})$，$\{c_{ij},i\geqslant1,j\geqslant1\}$ 是不增序列，可得

$$\varepsilon P(A)=\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{2j}g(Y_{2j})I(B_{1j}\cup B_{2j})]+\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{3j}g(Y_{3j})(I(B_{1j}\cup B_{2j}\cup B_{3j})-I(B_{1j}\cup B_{2j}))]+$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{3j}g(Y_{3j})I(B_{1j}\cup B_{2j}\cup B_{3j})]+\sum_{j=1}^{n_2}c_{3j}E[(g(Y_{2j})-g(Y_{3j}))I(B_{1j}\cup B_{2j})]+$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]$$

由于 $-I(B_{1j}\cup B_{2j})$ 是关于 $\{Y_{1j},Y_{2j}\}$ 的分量不减函数，故 $h(Y_{3j})(-I(B_{1j}\cup B_{2j}))$ 也是关于 $\{Y_{1j},Y_{2j}\}$ 的分量不减函数，由(4)式及双指标弱鞅的定义可得

$$c_{3j}E[(g(Y_{2j})-g(Y_{3j}))I(B_{1j}\cup B_{2j})]\geqslant c_{3j}E[(Y_{3j}-Y_{2j})h(Y_{3j})(-I(B_{1j}\cup B_{2j}))]\geqslant 0$$

因此

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{3j}g(Y_{3j})I(B_{1j}\cup B_{2j}\cup B_{3j})]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E[c_{ij}g(Y_{ij})I(B_{ij})]$$

重复相同步骤可得

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1j}g(Y_{n_1j})I(A)] \tag{5}$$

同理有

$$\varepsilon P(A)\geqslant\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{in_2}g(Y_{in_2})I(A)] \tag{6}$$

结合(5)式和(6)式，该定理得证.

若在定理2中取 $g(x)=x$，则有下面的推论.

推论3 设 $\{Y_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$ 是一个非负的双指标弱鞅，假设 $\{c_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$ 是不增的正数序列. 则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\leqslant\varepsilon\}\geqslant\max\{\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1j}Y_{n_1j}I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\leqslant\varepsilon)],$$
$$\sum_{i=1}^{n_1}E[c_{in_2}Y_{in_2}I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\leqslant\varepsilon)]\}$$

进一步，若令 $c_{\boldsymbol{n}}\equiv 1$，则有下面的推论.

推论4 设 $\{Y_{\boldsymbol{n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2\}$ 是一个非负的双指标弱鞅，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\leqslant\varepsilon\}\geqslant\max\{\sum_{j=1}^{n_2}E[Y_{n_1j}I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\leqslant\varepsilon)],$$
$$\sum_{i=1}^{n_1}E[Y_{in_2}I(\min_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\leqslant\varepsilon)]\}$$

注1 由于 $EY_{1j}=EY_{n_1j}$，$EY_{i1}=EY_{in_2}$，所以推论2与推论4是等价的.

注2 由于零均值的双指标相协随机变量序列的部分和序列是一个双指标弱鞅，故定理1与定理2及相关推论均适用于零均值的双指标相协随机序列的部分和序列.

参考文献:

[1] NEWMAN C M, WRIGHT A L. Associated Random Variables and Martingale Inequalities [J]. Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie and Verwandte Gebiete, 1982, 59(3): 361-371.

[2] CHRISTOFIDES T C. Maximal Inequalities for N-Demimartingales [J]. Archives of Inequalities and Applications, 2003, 50(1): 397-408.

[3] CHRISTOFIDES T C. Maximal Inequalities for Demimartingales and a Strong Law of Large Numbers [J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 50(4): 357-363.

[4] PRAKASA RAO B L S. Whittle Type Inequality for Demisubmartingales [J]. Proceedig of American Math Society, 2002, 130(12): 3719-3724.

[5] CHRISTOFIDES T C. U-Statistics on Associated Random Variables [J]. Journal of Statistical Planning and Inference,

2004，119(1)：1-15.

[6] DAI P P，SHEN Y，HU S H，et al. Some Results for Demimartingales and N-demimartingales [J]. Journal of Inequalities and Applications，2014，2014(1)：489-501.

[7] CHRISTOFIDES T C，HADJIKYRIAKOU M. Maximal Inequalities for Multidimensionally Indexed Demimartingales and the Hájek-Rényi Inequality for Associated Random Variables [J]. Nicosia：University of Cyprus，2010，213(3)：236-241.

[8] ESARY J D，PROSCHAN F，WALKUP D W. Association of Random Variables with Applications [J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics，1967，38(5)：1466-1474.

[9] WANG J F. Maximal Inequalities for Associated Random Variables and Demimartingales [J]. Statistics and Probability Letters，2004，66(3)：347-354.

[10] CAIROLI R，WALSH J. Stochastic Integrals in the Plane [J]. Acta Mathematica，1975，134(2)：111-183.

[11] AMIRDJANOVA A，LINN M. Stochastic Evolution Equations for Nonlinear Filtering of Random Fields in the Presence of Fractional Brownian Sheet Observation Noise [J]. Computers and Mathematics with Applications，2008，55(8)：1766-1784.

[12] PRAKASA RAO B L S. Statistical Inference for Fractional Diffusion [M]. Chichester：Wiley Series in Probability and Statistics，2010.

[13] 冯德成，文慧敏，杨亚男. 双参数弱(下)鞅的一类极大值不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(3)：95-100.

[14] FENG D C，JIANG W J，CHEN C L. On Minimal Inequalities of Demimartingales [J]. 兰州文理学院学报：自然科学版，2015，29(2)：1-4.

[15] 冯德成，张潇，周霖. 弱鞅的一类极小值不等式 [J]. 山东大学学报(理学版)，2017，52(8)：65-69.

责任编辑　张枸