第 44 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2022 年 8 月
Vol. 44　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2022

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2022.08.013

基于广义除法下非线性模糊差分方程的动力学行为研究

王贵英[1]，　张千宏[2]

1. 河池学院，数理学院，广西 河池 546300；2. 贵州财经大学 数学统计学院，贵阳 550025

摘要：对模糊数使用广义除法，讨论高阶非线性模糊差分方程 $x_{n+1}=A+\dfrac{B}{x_{n-m}}$，$n=0,1,2,\cdots$，的全局渐近行为，其中$(x_n)$是正模糊数列，$A$，$B$ 是正模糊数，最后数值仿真，验证结论有效性.

关 键 词：模糊差分方程；有界性；持久性

中图分类号：O175.7　　**文献标志码**：A

文 章 编 号：1673－9868(2022)08－0116－11　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

Dynamic Behavior of High Order Nonlinear Fuzzy Difference Equation

WANG Guiying[1]，　ZHANG Qianhong[2]

1. School of Mathematics and Physics, Hechi University, Hechi Guangxi 546300, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China

Abstract: In this paper, using the generalized division of fuzzy numbers, we study the asymptotic behavior of the positive solutions of the high order nonlinear fuzzy difference equation $x_{n+1}=A+\dfrac{B}{x_{n-m}}$, $n=0,1,2,\cdots$, Where (x_n) is a sequence of positive fuzzy numbers, A, B are positive fuzzy numbers. Finally, a numerical simulation is given to verify the validity of the conclusion.

Key words: fuzzy difference equation; boundedness; persistence

模糊差分方程是指系数或初值为模糊数的差分方程，模糊差分方程的出现，解决了差分方程无法准确建模的问题，因此，模糊差分方程在许多科学研究领域有着举足轻重的地位.

针对于模糊差分方程的研究，大多数学者更倾向于研究只具备模糊数乘法、加法的模糊差分方程[1－5].文献[1]研究了一阶模糊差分方程

收稿日期：2021－05－09

基金项目：广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2022KY0603)；广西自然科学基金项目(2020GXNSFAA159084)；贵州省科技厅科学技术基金项目([2020]1Y008).

作者简介：王贵英，硕士研究生，主要从事模糊不确定动力系统理论研究.

$$x_{n+1}=\omega x_n+q \qquad n=0,1,2,\cdots$$

其中：x_n 是模糊序列；ω, p, x_0 是正模糊数.

文献[2]研究了模糊差分方程

$$x_{n+1}=Ax_n+B \qquad n=0,1,2,\cdots$$

正解的存在性、有界性以及正解的渐近表现，其中 A, B, x_0 是正模糊数.

文献[6-12]研究带除法的模糊差分方程. 文献[6]通过对模糊数使用 Zadeh 扩展原则，研究了模糊 Riccati 差分方程

$$x_{n+1}=A+\frac{B}{x_n} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

正解存在性与唯一性等相关问题，其中 A, B, x_0 是正模糊数.

文献[9]使用 zadeh 扩展原则研究模糊差分方程 $x_{n+1}=A+\dfrac{x_n}{x_{n-m}}$ 的有界性以及持久性等相关问题，其中 A, B 及初值 $x_i(i=0,1,\cdots,m)$ 均为模糊数. 研究发现，模糊数除法使用 Zadeh 扩展原则时，会使模糊解的支撑区间增加，使得解的模糊性增加. 为了克服这些不足，有学者利用广义除法(g-除法)，代替 Zadeh 扩展原则对模糊差分方程进行研究，取得较好的成果[13-15]. 文献[14]利用 g-除法研究一类三阶非线性模糊差分方程的动力学行为.

基于此，文献[15]通过对模糊数使用 g-除法，研究模糊差分方程 $x_{n+1}=A+\dfrac{B}{x_n}$ 的相关动力学行为，与之前的研究相比更符合模糊数的研究. 因此，本文主要使用 g-除法研究高阶非线性模糊差分方程

$$x_{n+1}=A+\frac{B}{x_{n-m}} \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

的全局渐近行为，其中 $m\in\mathbb{N}^+$，A, B 以及初始条件 $x_{-m}, \cdots, x_0$ 都为正模糊数.

1　相关引理及定义

定义 1[11]　u 称为模糊数，如果 $u: \mathbb{R}\longrightarrow[0, 1]$ 满足条件

1) u 是正规的，即存在 x 为实数，使得 $u(x)=1$；

2) u 是模糊凸的，即对所有的 $t\in[0, 1]$，$x_1, x_2\in\mathbb{R}$ 有

$$u(tx_1+(1-t)x_2)\geqslant\min\{u(x_1), u(x_2)\}$$

3) u 是上半连续的；

4) u 的支撑集是紧集，即是 $\operatorname{supp} u=\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1)}[u]_\alpha}=\overline{\{x: u(x)>0\}}$ 是紧集.

对于所有的 $\alpha\in(0, 1]$，u 的 $\alpha-$截集表示为 $[u]_\alpha=\{x\in\mathbb{R}: u(x)\geqslant\alpha\}$.

定义 2[11]　设 u, v 是正模糊数，则 u, v 的 $\alpha-$截集表示为 $[u]_\alpha=[u_{l,\alpha}, u_{r,\alpha}]$，$[v]_\alpha=[v_{l,\alpha}, v_{r,\alpha}]$，$\alpha\in(0, 1]$，且

$$\begin{cases}[u+v]_\alpha=[u]_\alpha+[v]_\alpha=[u_{l,\alpha}+v_{l,\alpha}, u_{r,\alpha}+v_{r,\alpha}]\\ [ku]_\alpha=k[u]_\alpha=[ku_{l,\alpha}, ku_{r,\alpha}]\end{cases}$$

定义 u 的模为

$$\|u\|=\sup_{\alpha\in(0,1]}\max\{u_{l,\alpha}, u_{r,\alpha}\}$$

u, v 之间的距离为 $D(u, v)$，其中

$$D(u, v)=\sup_{\alpha\in(0,1]}\max\{|u_{l,\alpha}-v_{l,\alpha}|, |u_{r,\alpha}-v_{r,\alpha}|\}$$

引理 1[11]　设连续函数 $g: \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$，对于任意正模糊数 u, v, ω 以及 $\forall\alpha\in(0, 1]$，都有

$$[g(u, v, \omega)]_\alpha=g([u]_\alpha, [v]_\alpha, [\omega]_\alpha)$$

定义 3[11]　令 u, v 是模糊数，α-截集为 $[u]_\alpha=[u_{l,\alpha}, u_{r,\alpha}]$，$[v]_\alpha=[v_{l,\alpha}, v_{r,\alpha}]$，$0\notin[v]_\alpha$，对

于 $\forall \alpha \in (0,1]$，定义 $\div_g$(g-除法)：存在一个模糊数 ω，且$[\omega]_\alpha = [\omega_{l,\alpha}, \omega_{r,\alpha}]$，使得

$$\omega = u \div_g v$$

即是

$$[\omega]_\alpha = [u]_\alpha \div [v]_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{i}) & [u]_\alpha = [v]_\alpha [\omega]_\alpha \\ (\text{ii}) & [v]_\alpha = [u]_\alpha [\omega]_\alpha^{-1} \end{cases} \tag{2}$$

易知，任意的模糊数 u，当 u 定义在 g-除法上时，有 $u \div_g u = 1$，当 u 定义在 Zadeh 扩展原则上时，$u \div_g u \neq 1$.

引理 2[11] 令 u, v 都是模糊数，如果 $\omega = u \div_g v$ 存在，则有以下两种情况.

1) 若 $\forall \alpha \in [0,1]$，都有 $u_{l,\alpha} v_{r,\alpha} \leqslant u_{r,\alpha} v_{l,\alpha}$，则 $\omega_{l,\alpha} = \dfrac{u_{l,\alpha}}{v_{l,\alpha}}$，$\omega_{r,\alpha} = \dfrac{u_{r,\alpha}}{v_{r,\alpha}}$，

2) 若 $\forall \alpha \in [0,1]$，都有 $u_{l,\alpha} v_{r,\alpha} \geqslant u_{r,\alpha} v_{l,\alpha}$，则 $\omega_{l,\alpha} = \dfrac{u_{r,\alpha}}{v_{r,\alpha}}$，$\omega_{r,\alpha} = \dfrac{u_{l,\alpha}}{v_{l,\alpha}}$.

引理 3[13] 令 u, v, ω 都是正模糊数，$\forall \alpha \in (0,1]$，如果 $\omega = u \div_g v$ 满足引理 2 中的 1)，则

$$\omega_{r,\alpha} - \omega_{l,\alpha} = \frac{u_{r,\alpha} v_{l,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{r,\alpha}}{u_{l,\alpha} u_{r,\alpha}} = | u_{r,\alpha} v_{l,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{r,\alpha} | \frac{1}{u_{l,\alpha} u_{r,\alpha}} \tag{3}$$

如果 $\omega = u \div_g v$ 满足引理 2 中 2)，则

$$\omega_{r,\alpha} - \omega_{l,\alpha} = \frac{u_{l,\alpha} v_{r,\alpha} - u_{r,\alpha} v_{l,\alpha}}{u_{l,\alpha} u_{r,\alpha}} = | u_{r,\alpha} v_{l,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{r,\alpha} | \frac{1}{u_{l,\alpha} u_{r,\alpha}} \tag{4}$$

因此有

$$\omega_{r,\alpha} - \omega_{l,\alpha} = \frac{u_{r,\alpha} v_{r,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{l,\alpha}}{u_{l,\alpha} u_{r,\alpha}} = | u_{r,\alpha} v_{r,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{l,\alpha} | \frac{1}{u_{l,\alpha} u_{r,\alpha}} \tag{5}$$

注 因为 $| u_{r,\alpha} v_{r,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{l,\alpha} | \geqslant | u_{r,\alpha} v_{l,\alpha} - u_{l,\alpha} v_{r,\alpha} |$，由(3),(4),(5)式可知，运用 g-除法优于 Zadeh 扩展原则.

引理 4[13] 考虑差分方程

$$y_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{y_{n-m}} \tag{6}$$

其中：$n = 0, 1, 2, \cdots, m$；$m \in \mathbb{N}^+$，$\alpha, \beta, y_i\ (i = -m, \cdots, -1, 0)$ 都是正实数. 则

1) 方程

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0 \tag{7}$$

有一正一负的两个实特征根 λ_1, λ_2.

2) 对方程(7)的每一个正解，都有$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

定义 4[11] 令 $y = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$，其中 $\lambda_i\ (i = 1, 2)$ 是(7)式的特征根，则称 y 为(6)式的唯一平衡点.

引理 5[13] 考虑差分方程系统

$$y_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{z_{n-m}},\ z_{n+1} = \mu + \frac{\nu}{y_{n-m}} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

其中 m 为正整数，$\alpha, \beta, \mu, \nu, y_i, z_i\ (i = -m, \cdots, -1, 0)$ 都是正实数. 则有

1) 方程

$$\mu\lambda^2 + (\nu - \alpha\mu - \beta)\lambda - \alpha\nu = 0 \qquad (\text{或 } \alpha\gamma^2 + (\beta - \mu\alpha - \nu)\gamma - \mu\beta = 0) \tag{9}$$

有两个一正一负的实特征根 λ_1, λ_2(或 γ_1, γ_2).

2) 方程(9)的每一个正解，都有

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \max\{\lambda_1, \lambda_2\},\ \lim_{n \to \infty} z_n = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$$

定义 5[4] 令 $y = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$，$z = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$，其中 $\lambda_i, \gamma_i\ (i = 1, 2)$ 是方程(9)的特征根，则称(y, z)是方程(8)的唯一解.

定义 6[4]　设$\{x_n\}$是正模糊数数列，若存在正实数P,Q，使得

$$\sup p(x_n) \subset [P, Q] \qquad n=1,2,\cdots$$

则称(x_n)是有界且持久的.

定义 7[11]　如果正模糊数数列(x_n)满足模糊差分方程(1)，则称x_n是方程(1)的正解. 如果x满足方程

$$x = A + \frac{B}{x}$$

则称x是模糊差分方程(1)的平衡点.

定义 8[4]　(x_n)是正模糊数数列，x是模糊数，如果$\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x)=0$，则称当$n\to\infty$时$x_n\to x$.

2　主要结论

主要对两个模糊数运用g-除法，讨论高阶非线性模糊差分方程

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_{n-m}} \qquad n=0,1,2,\cdots,\ m \in \mathbb{N}^+ \tag{10}$$

解的唯一性以及全局渐进行为. 其中m为正整数，$A,B,x_i(i=-m,\cdots,0)$都是正模糊数.

定理 1　令$A,B,x_i(i=-m,\cdots,0)$都是正模糊数，且$\dfrac{B}{A}$，$\dfrac{B}{x_i}(i=-m,\cdots,0)$满足引理 2 中的 1)，则(10)式存在唯一正解x_n.

证　定理的证明与文献[15]中的命题 3.1 的证明类似，这里省略定理 1 的证明.

定理 2　令$A,B,x_i(i=0,1,\cdots,m)$都是正模糊数，且$\dfrac{B}{A}$，$\dfrac{B}{x_i}(i=-m,\cdots,0)$满足引理 2 中的 2)，当不等式

$$A_{l,\alpha} \geqslant \frac{B_{l,\alpha}(B_{r,\alpha}-B_{l,\alpha})}{A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}-A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}} \geqslant 0 \qquad \forall \alpha \in (0, 1] \tag{11}$$

成立时，(10)式存在唯一解x_n.

注　定理 2 的证明方法与定理 1 基本一致.

定理 3　考虑差分方程(6)，存在一个正常数$\theta>0$，当$n\geqslant 1$时，有

$$\alpha + \frac{\beta}{\theta} \leqslant y_n \leqslant \theta \qquad n=1,2,\cdots \tag{12}$$

证　由(6)式可知，对于$\forall \alpha \geqslant 1$，都有$y_n \geqslant \alpha$. 当$n\to\infty$时，则有

$$y_n = \alpha + \frac{\beta}{y_{n-m-1}} = \alpha + \frac{\beta}{\alpha + \dfrac{\beta}{y_{n-m-2}}} = \alpha + \frac{\beta}{\alpha y_{n-m-2}+\beta} y_{n-m-2} < \alpha + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta} y_{n-m-2} <$$

$$\alpha + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta} y_{n-m-4}\right) = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta} + \frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta)^2} y_{n-m-4} <$$

$$\alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta} + \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta} y_{n-m-6}\right) = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta} + \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta)^2} + \frac{\beta^3}{(\alpha^2+\beta)^3} y_{n-m-6} < \cdots <$$

$$\alpha\left(1+\Gamma+\Gamma^2+\cdots+\Gamma^{\frac{n-m-1}{2}-1}\right) + \Gamma^{\frac{n-m-1}{2}} y_1$$

其中

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta} < 1$$

所以有

$$y_n < \frac{\alpha}{1-\Gamma} + \Gamma^{\frac{n-m-1}{2}} y_1$$

同理可得

$$y_n < \frac{\alpha}{1-\Gamma} + \Gamma^{\frac{n-m}{2}} y_0, \; y_n < \frac{\alpha}{1-\Gamma} + \Gamma^{\frac{n-3m}{2}} y_m$$

因此，对于 $\forall n \geqslant m$，都有

$$y_n \leqslant \theta \tag{13}$$

其中

$$\theta = \frac{\alpha}{1-\Gamma} + \max\{y_{-m}, \cdots, y_0\}$$

由(6)式及(13)式，可得

$$\alpha + \frac{\beta}{\theta} \leqslant y_n \leqslant \theta \tag{14}$$

定理证明完毕.

定理4 考虑方程(10)，其中 A，B 以及初始条件 x_i $(i=-m,\cdots,0)$ 都是正模糊数，当方程(10)中除法满足引理2中的1)时，方程(10)的每一个正解 x_n 都是有界持久的.

证 因为 A，B 以及初始条件 x_i $(i=-m,\cdots,0)$ 都是正模糊数，所以存在 M_i，$\boldsymbol{N}_i$ $(i=0, 1, 2, 3, \cdots, m)$ 使得

$$\begin{cases} [L_{0,\alpha}, \boldsymbol{R}_{0,\alpha}] \subset [M_0, \boldsymbol{N}_0], [L_{-1,\alpha}, \boldsymbol{R}_{-1,\alpha}] \subset [M_1, \boldsymbol{N}_1] \\ [L_{-2,\alpha}, \boldsymbol{R}_{-2,\alpha}] \subset [M_2, \boldsymbol{N}_2], \cdots, [L_{-m,\alpha}, \boldsymbol{R}_{-m,\alpha}] \subset [M_m, \boldsymbol{N}_m] \\ [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}] \subset [M_A, \boldsymbol{N}_A], [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}] \subset [M_B, \boldsymbol{N}_B] \end{cases} \tag{15}$$

令 x_n 是方程(10)中满足引理2中1)情形时的正解，由定理3及方程(10)，则有

$$\begin{cases} A_{l,\alpha} + \dfrac{B_{l,\alpha}}{\theta_1} \leqslant L_{n,\alpha} \leqslant \theta_1 \\ A_{r,\alpha} + \dfrac{B_{r,\alpha}}{\theta_2} \leqslant \boldsymbol{R}_{n,\alpha} \leqslant \theta_2 \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\theta_1 = \frac{A_{l,\alpha}}{1-\Gamma_1} + \max\{L_{-m,\alpha}, \cdots, L_{0,\alpha}\}$$

$$\theta_2 = \frac{A_{r,\alpha}}{1-\Gamma_2} + \max\{\boldsymbol{R}_{-m,\alpha}, \boldsymbol{R}_{0,\alpha}\}$$

$$\Gamma_1 = \frac{B_{l,\alpha}}{A_{l,\alpha}^2 + B_{r,\alpha}}$$

$$\Gamma_2 = \frac{B_{r,\alpha}}{A_{r,\alpha}^2 + B_{l,\alpha}}$$

联系(15)式，可得

$$\theta_1 \leqslant \frac{\boldsymbol{N}_2}{1 - \dfrac{\boldsymbol{N}_3}{M_2^2 + M_3}} + \max\{\boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_m\}$$

由(15)，(16)式可得到 $L_{n,\alpha} \geqslant P$，其中

$$P = M_A + \frac{M_B}{\dfrac{\boldsymbol{N}_A}{1 - \dfrac{\boldsymbol{N}_B}{M_A^2 + M_B}} + \max\{\boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_m\}}$$

同理得

$$Q \leqslant \frac{\boldsymbol{N}_A}{1-\dfrac{\boldsymbol{N}_B}{M_A^2+M_B}}+\max\{\boldsymbol{N}_0,\ \boldsymbol{N}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{N}_m\}$$

因此，对于 $n \geqslant 1$，有

$$\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_{n,\alpha},\ R_{n,\alpha}]\subset[P,\ Q]$$

也即是

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[L_{n,\alpha},\ R_{n,\alpha}]}\subseteq[P,\ Q]$$

由定义 6 知，x_n 是有界持久的. 证毕.

定理 5　考虑差分方程系统

$$\begin{cases} y_{n+1}=\alpha+\dfrac{\beta}{z_{n-m}} \\ z_{n+1}=\mu+\dfrac{\nu}{y_{n-m}} \qquad n=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{17}$$

其中 m 为正整数，$\alpha,\beta,\mu,\nu,y_i,z_i(i=-m,\ \cdots,\ 0)$ 都是正实数，当不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha\mu+\nu}<1 \\ \dfrac{\nu}{\alpha\mu+\beta}<1 \end{cases} \tag{18}$$

成立时，存在正常数 K_1,K_2,C_1,C_2，使得

$$K_1 \leqslant y_n \leqslant K_2,\ C_1 \leqslant z_n \leqslant C_2$$

证　由引理 5 可知，系统(17) 存在唯一正解$(y_n,\ z_n)$，且易得出 $y_n \geqslant \alpha$，$z_n \geqslant \mu$，当 $n\to\infty$ 时，由(17)式有

$$\begin{aligned} y_n&=\alpha+\frac{\beta}{z_{n-m-1}}=\alpha+\frac{\beta}{\mu+\dfrac{\nu}{y_{n-2m-2}}}=\alpha+\frac{\beta}{\mu y_{n-2m-2}+\nu}y_{n-2m-2}< \\ &\alpha+\frac{\beta}{\alpha\mu+\nu}y_{n-2m-2}<\alpha+\frac{\beta}{\alpha\mu+\nu}(\alpha+\frac{\beta}{\alpha\mu+\nu}y_{n-2m-4})=\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha\mu+\nu}+\frac{\beta^2}{(\alpha\mu+\nu)^2}y_{n-2m-4}< \\ &\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha\mu+\nu}+\frac{\beta^2}{(\alpha\mu+\nu)^2}(\alpha+\frac{\beta}{\alpha\mu+\nu}y_{n-2m-6})=\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha\mu+\nu}+\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha\mu+\nu)^2}+\frac{\beta^3}{(\alpha\mu+\nu)^3}y_{n-2m-6}<\cdots< \\ &\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha\mu+\nu}+\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha\mu+\nu)^2}+\cdots+\frac{\alpha\beta^{\frac{n-2m-1}{2}-1}}{(\alpha\mu+\nu)^{\frac{n-2m-1}{2}-1}}+\frac{\beta^{\frac{n-2m-1}{2}}}{(\alpha\mu+\nu)^{\frac{n-2m-1}{2}}}y_1= \\ &\alpha+\alpha(1+\delta_1+\delta_1^2+\delta_1^3+\cdots+\delta_1^{\frac{n-2m-1}{2}-1})+\delta_1^{\frac{n-2m-1}{2}}y_1 \end{aligned}$$

所以有

$$y_n \leqslant \alpha+\alpha\,\frac{1-\delta_1^{\frac{n-2m-1}{2}}}{1-\delta_1}+\delta_1^{\frac{n-2m-1}{2}}y_1 \tag{19}$$

同理可得

$$y_n \leqslant \alpha+\alpha\,\frac{1-\delta_1^{\frac{n-3m}{2}}}{1-\delta_1}+\delta_1^{\frac{n-3m}{2}}y_m,\ y_n \leqslant \alpha+\alpha\,\frac{1-\delta_1^{\frac{n-2m}{2}}}{1-\delta_1}+\delta_1^{\frac{n-2m}{2}}y_0 \tag{20}$$

其中 $\delta_1=\dfrac{\beta}{\alpha\mu+\nu}$，由(18),(19),(20) 式可得

$$y_n \leqslant K_2 \qquad \forall\, n \geqslant 1 \tag{21}$$

其中

$$K_2=\alpha+\frac{\alpha}{1-\delta_1}+\max\{y_{-m},\ \cdots,\ y_0\}$$

同理可得，当$\frac{\nu}{\alpha\mu+\beta}<1$时，有 $y_n<C_2$，其中

$$C_2=\mu+\frac{\mu}{1-\delta_2}+\max\{z_{-m},\ \cdots,\ z_0\} \qquad \delta_2=\frac{\nu}{\alpha\mu+\beta}$$

令 $K_1=\alpha+\frac{\beta}{C_2}$，$C_1=\mu+\frac{\nu}{K_2}$，则有 $K_1\leqslant y_n\leqslant K_2$，$C_1\leqslant z_n\leqslant C_2$. 证毕.

定理 6 若$\frac{B_{r,\alpha}}{A_{l,\alpha}A_{r,\alpha}+B_{l,\alpha}}<1$，则当方程(10)中 g-除法满足定理 2 中 2)时，则方程(10)的解是有界且持久的.

证 令方程(10)的解为 x_n，因为$\frac{B_{l,\alpha}}{A_{l,\alpha}A_{r,\alpha}+B_{r,\alpha}}<\frac{B_{r,\alpha}}{A_{l,\alpha}A_{r,\alpha}+B_{l,\alpha}}<1$，由于方程(10)的 g-除法满足定理 2 中 2)，所以有

$$L_{n+1,\alpha}=A_{l,\alpha}+\frac{B_{l,\alpha}}{R_{n-m,\alpha}},\ R_{n+1,\alpha}=A_{r,\alpha}+\frac{B_{r,\alpha}}{L_{n-m,\alpha}} \qquad \alpha\in(0,\ 1] \tag{22}$$

对于 $L_{n,\alpha}$，$R_{n,\alpha}$，由定理 5 以及(22)式有

$$K_1^*\leqslant L_{n,\alpha}\leqslant K_2^* \qquad C_1^*\leqslant R_{n,\alpha}\leqslant C_2^*$$

其中

$$\delta_1^*=\frac{B_{r,\alpha}}{A_{l,\alpha}A_{r,\alpha}+B_{l,\alpha}}$$

$$\delta_2^*=\frac{B_{l,\alpha}}{A_{l,\alpha}A_{r,\alpha}+B_{r,\alpha}}$$

$$K_1^*=A_{l,\alpha}+\frac{B_{r,\alpha}}{C_2^*}$$

$$C_1^*=A_{r,\alpha}+\frac{B_{r,\alpha}}{K_2^*}$$

$$K_2^*=A_{l,\alpha}+\frac{A_{l,\alpha}}{1-\delta_1^*}+\max\{L_{-m,\alpha},\ \cdots,\ L_{-1,\alpha},\ L_{0,\alpha}\}$$

$$C_2^*=A_{r,\alpha}+\frac{A_{r,\alpha}}{1-\delta_2^*}+\max\{R_{-m,\alpha},\ \cdots,\ R_{-1,\alpha},\ R_{0,\alpha}\}$$

由(15)式有

$$K_2^*\leqslant N_A+\frac{N_A}{1-\frac{N_B}{M_A^2+M_B}}+\max\{N_0,\ N_1,\ \cdots,\ N_m\}$$

再令

$$P=M_A+\frac{M_B}{N_A+\frac{N_A}{1-\frac{N_B}{M_A^2+M_B}}+\max\{N_0,\ N_1,\ \cdots,\ N_m\}}\leqslant K_1^*$$

即 $P\leqslant L_{n,\alpha}$，同理可得 $Q\leqslant R_{n,\alpha}$，其中

$$Q=N_A+\frac{N_A}{1-\frac{N_B}{M_A^2+M_B}}+\max\{N_0,\ N_1,\ \cdots,\ N_m\}$$

所以，当 $n\geqslant 1$ 时，有 $\bigcup_{\alpha\in(0,\ 1]}[L_{n,\alpha},\ R_{n,\alpha}]\subset[P,\ Q]$，即是$\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,\ 1]}[L_{n,\alpha},\ R_{n,\alpha}]}\subseteq[P,\ Q]$. 定理证毕.

定理 7　当方程(10)中的 g-除法满足引理 2 中 1)时，则

1) 方程(10)存在唯一平衡点 x；

2) 当 $n \to \infty$ 时，方程(10)每一个正解 x_n 都趋于唯一平衡点 x.

证　由引理 2 中 1)与(10)式可得

$$L_\alpha = A_{l,\alpha} + \frac{B_{l,\alpha}}{L_\alpha},\ R_\alpha = A_{r,\alpha} + \frac{B_{r,\alpha}}{R_\alpha},\ \alpha \in (0,\ 1] \tag{23}$$

由(23)式对应方程为 $L_\alpha^2 - A_{l,\alpha}L_\alpha - B_{l,\alpha} = 0$ 及 $\mathbb{R}_\alpha^2 - A_{r,\alpha}R_\alpha - B_{r,\alpha} = 0$，得特征根为

$$L_\alpha = \frac{A_{l,\alpha} + \sqrt{A_{l,\alpha}^2 + 4B_{l,\alpha}}}{2},\ R_\alpha = \frac{A_{r,\alpha} + \sqrt{A_{r,\alpha}^2 + 4B_{r,\alpha}}}{2} \tag{24}$$

由引理 4、(23)式和(24)式可知

$$\lim_{n\to\infty} L_{n,\alpha} = L_\alpha,\ \lim_{n\to\infty} R_{n,\alpha} = R_\alpha \qquad \alpha \in (0,\ 1] \tag{25}$$

由(15),(25)式有

$$L_\alpha \geqslant m = \frac{M_2 + \sqrt{M_2^2 + 4M_3}}{2},\ R_\alpha \leqslant n = \frac{N_2 + \sqrt{N_2^2 + 4N_3}}{2} \tag{26}$$

由(24),(25),(26)式可知 $\bigcup_{\alpha\in(0,\ 1]} [L_\alpha,\ R_\alpha] \subset [m,\ n]$，则 $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,\ 1]} [L_\alpha,\ R_\alpha]}$ 是紧集，且 $\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,\ 1]} [L_\alpha,\ R_\alpha]} \subset (0,\ \infty)$，由 $[L_\alpha,\ R_\alpha]$ 确定的一个模糊数 x 使得

$$x = A + \frac{B}{x},\ [x]_\alpha = [L_\alpha,\ R_\alpha] \qquad \alpha \in (0,\ 1] \tag{27}$$

且 x 是方程(10)的正平衡点. 接下来证明唯一性. 假设方程(10)存在另外一个平衡点 $\overline{x}$，则有

$$\overline{x} = A + \frac{B}{x},\ [\overline{x}]_\alpha = [\overline{L_\alpha},\ \overline{R_\alpha}] \qquad \alpha \in (0,\ 1]$$

并且

$$\overline{L_\alpha} = A_{l,\alpha} + \frac{B_{l,\alpha}}{L_\alpha},\ \overline{R_\alpha} = A_{r,\alpha} + \frac{B_{r,\alpha}}{R_\alpha} \qquad \alpha \in (0,\ 1] \tag{28}$$

由(23),(28)式可知 $L_\alpha = \overline{L_\alpha}$，$R_\alpha = \overline{R_\alpha}$，也即是 $\overline{x} = x$，唯一性成立. 由(25)式有

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n,\ x) = \lim_{n\to\infty}\ \sup \max\{|L_{n,\alpha} - L_\alpha|,\ |R_{n,\alpha} - R_\alpha|\} = 0$$

也即 $x_n \to x$. 定理证毕.

定理 8　当方程(10)中的 g-除法满足定理 2 中 2)情形时，则有以下结论成立

1) 方程(10)存在唯一平衡点 x；

2) 方程(10)每一个正解 x_n 都趋近于唯一平衡点 x.

注　定理 8 证明与定理 7 相似，此处省略定理 8 的证明.

4　数值例子

例 1　考虑四阶模糊差分方程

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_{n-3}} \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{29}$$

其中：A，B 以及初值 x_i $(i = -3,\ -2,\ -1,\ 0)$ 如下

$$A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2 & 4 \leqslant x \leqslant 6 \\ 4 - \frac{1}{2}x & 6 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - 1 & 5 \leqslant x \leqslant 10 \\ 3 - \frac{1}{5}x & 10 \leqslant x \leqslant 15 \end{cases}$$

$$x_0=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-3 & 6\leqslant x\leqslant 8\\[2ex] 5-\dfrac{1}{2}x & 8\leqslant x\leqslant 10\end{cases}\qquad x_{-1}=\begin{cases}x-2 & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 4-x & 3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$$x_{-2}=\begin{cases}x-3 & 3\leqslant x\leqslant 4\\ 5-x & 4\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\qquad x_{-3}=\begin{cases}x-4 & 4\leqslant x\leqslant 3\\ 6-x & 5\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$$

取 α — 截集，有

$$[A]_\alpha=[4+2\alpha,\ 8-2\alpha],\ [B]_\alpha=[5+5\alpha,\ 15-5\alpha],\ [x_0]_\alpha=[6+2\alpha,\ 10-2\alpha]$$

$$[x_{-1}]_\alpha=[2+\alpha,\ 4-\alpha],\ [x_{-2}]_\alpha=[3+\alpha,\ 5-\alpha],\ [x_{-3}]_\alpha=[4+\alpha,\ 6-\alpha],\ \alpha\in(0,\ 1]$$

因此，$\dfrac{B}{A}$，$\dfrac{B}{x_i}(i=-3,-2,-1,0)$ 满足引理 2 中的 1)，因此有

$$L_{n+1,\alpha}=A_{l,\alpha}+\frac{B_{l,\alpha}}{L_{n-3,\alpha}},\ R_{n+1,\alpha}=A_{r,\alpha}+\frac{B_{r,\alpha}}{R_{n-3,\alpha}}\qquad \alpha\in(0,\ 1] \tag{30}$$

由定理 4 可知，方程(29) 的解都是有界持久的，且存在唯一平衡点 x，当 $n\to\infty$ 时，方程(29) 的每一个正解 x_n 都收敛于唯一平衡点 x(如图 1 — 4).

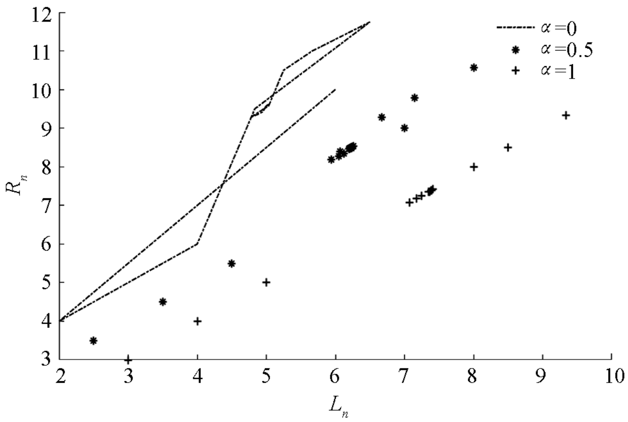

图 1　系统(30) 动力学行为

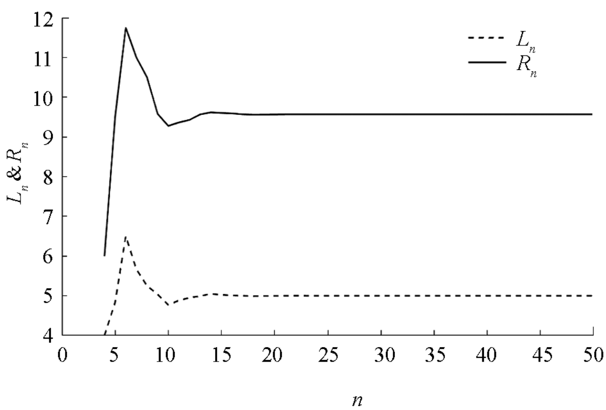

图 2　$\alpha=0$ 时，系统(30) 的解

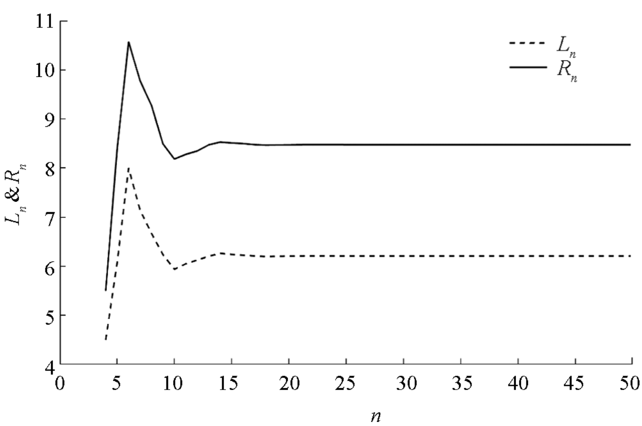

图 3　$\alpha=0.5$ 时，系统(30) 的解

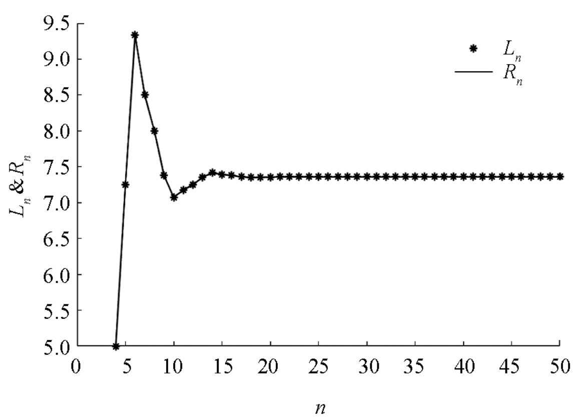

图 4　$\alpha=1$ 时，系统(30) 的解

例 2　考虑三阶模糊差分方程

$$x_{n+1}=A+\frac{B}{x_{n-2}}\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{31}$$

其中 A，B 以及初值 $x_i(i=-2,-1,0)$ 如下

$$A(x)=\begin{cases}x-1 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3-x & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases},\ [B]_\alpha=\begin{cases}x-2 & 2\leqslant x\leqslant 3\\ 4-x & 3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$$x_0=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x-1 & 3\leqslant x\leqslant 6\\ 3-\dfrac{1}{3}x & 4\leqslant x\leqslant 5\end{cases},\ x_{-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x-3 & 9\leqslant x\leqslant 12\\ 5-\dfrac{1}{3}x & 12\leqslant x\leqslant 15\end{cases}$$

$$x_{-2}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x-5 & 15\leqslant x\leqslant 18\\ 7-\dfrac{1}{3}x & 18\leqslant x\leqslant 21\end{cases}$$

所以有

$$[A]_\alpha=[1+\alpha,\ 3-\alpha],\ [B]_\alpha=[2+\alpha,\ 4-\alpha],\ [x_0]_\alpha=[3+3\alpha,\ 9-3\alpha]$$
$$[x_{-1}]_\alpha=[9+3\alpha,\ 15-3\alpha],\ [x_{-2}]_\alpha=[15+3\alpha,\ 21-3\alpha],\ \alpha\in(0,\ 1]$$

由此可知，$\dfrac{B}{A}$，$\dfrac{B}{x_i}$$(i=-2,\ -1,\ 0)$ 满足引理 2 中的 2)，且

$$\frac{B_{r,\alpha}}{A_{l,\alpha}A_{r,\alpha}+B_{l,\alpha}}<1$$

因此

$$L_{n+1,\alpha}=A_{l,\alpha}+\frac{B_{r,\alpha}}{R_{n-2,\alpha}},\ R_{n+1,\alpha}=A_{r,\alpha}+\frac{B_{l,\alpha}}{L_{n-2,\alpha}}\qquad \alpha\in(0,\ 1] \tag{32}$$

由定理 6 可知，(29) 式的解都是有界持久的，且由定理 8 可知，方程(31) 存在唯一平衡点 $\overline{x}$，当 $n\to\infty$ 时，方程(31) 的每一个正解 x_n 都收敛于唯一平衡点 $\overline{x}$(如图 5-8).

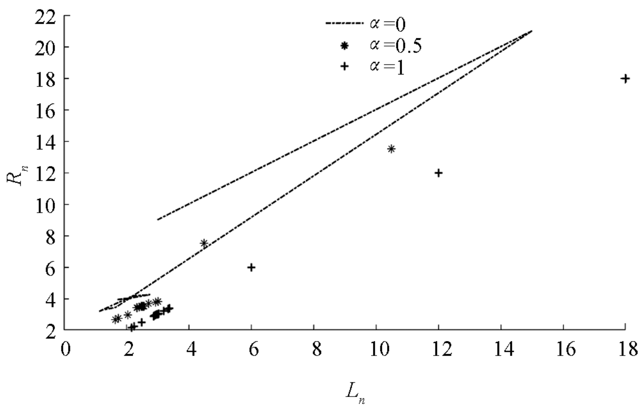

图 5　系统(32) 的动力学行为

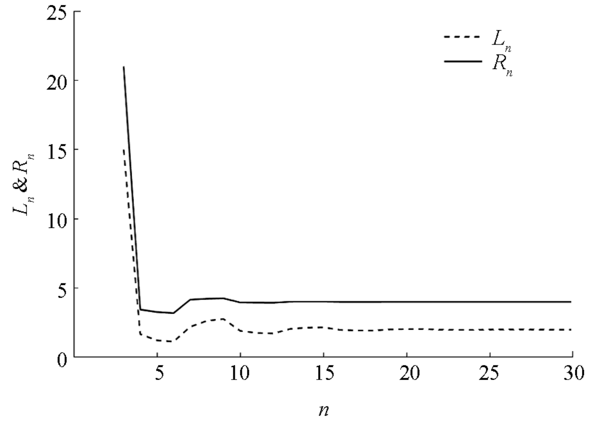

图 6　$\alpha=0$ 时，系统(32) 的解

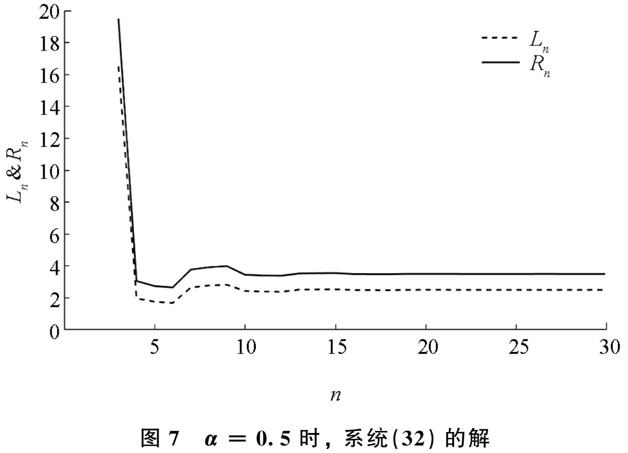

图 7　$\alpha=0.5$ 时，系统(32) 的解

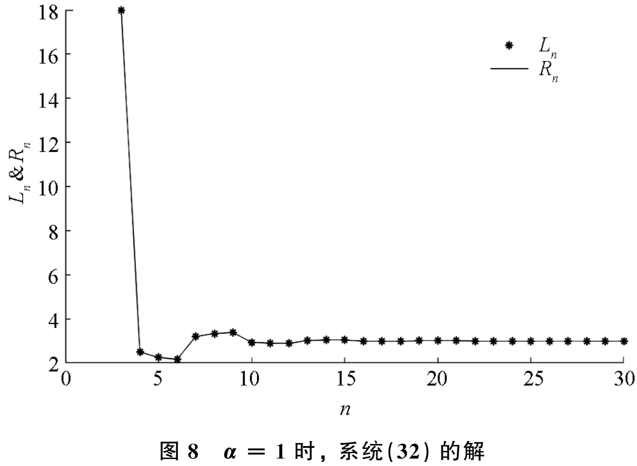

图 8　$\alpha=1$ 时，系统(32) 的解

5 总结

本文主要运用 g-除法，研究在两种情况下高阶非线性模糊差分方程(1)的正解存在性以及唯一性，有界性以及持久性以及解的渐近行为. 结论得出，方程(10)的每一个正解都趋近于唯一平衡点，最后分别给出三阶和四阶符合条件的数值例子，更好验证结论的有效性.

参考文献:

[1] DEEBA E Y, DE KORVIN A, KOH E L. A Fuzzy Difference Equation with an Application [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 1996, 2(4): 365-374.

[2] 张千宏，刘璟忠. 论一阶模糊差分方程 $x_{n+1}=Ax_n+B$ [J]. 模糊系统与数学，2009，23(4)：74-79.

[3] DEEBA E Y, DE KORVIN A. Analysis by Fuzzy Difference Equations of a Model of CO_2 Level in the Blood [J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(3): 33-40.

[4] BEDE B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic [M]. London: Springer, 2013.

[5] KHASTAN A. New Solutions for First Order Linear Fuzzy Difference Equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 312: 156-166.

[6] PAPASCHINOPOULOS G, PAPADOPOULOS B K. On the Fuzzy Difference Equation $X_{n+1}=A+B/X_n$ [J]. Soft Computing, 2002, 6(6): 456-461.

[7] 杨浩，吴健荣. 模糊度量空间中的有界集 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(10)：45-50.

[8] ZHANG Q H, YANG L H, LIAO D X. Behavior of Solutions to a Fuzzy Nonlinear Difference Equation [J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2012, 9: 1-12.

[9] LIZ E. A Global Picture of the Gamma-Ricker Map: a Flexible Discrete-Time Model with Factors of Positive and Negative Density Dependence [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2018, 80(2): 417-434.

[10] DIN Q, DONCHEV T. Global Character of a Host-Parasite Model [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2013, 54(1): 1-7.

[11] ZHANG Q H, LUO Z G, LIU J Z, et al. Dynamical Behaviour of Second-Order Rational Fuzzy Difference Equation [J]. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2015, 5(4): 336.

[12] STEFANINI L. A Generalization of Hukuhara Difference and Division for Interval and Fuzzy Arithmetic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(11): 1564-1584.

[13] ZHANG Q H, LIU J Z, LUO Z G. Dynamical Behavior of a Third-Order Rational Fuzzy Difference Equation [J]. Advances in Difference Equations, 2015, 108: 1 - 18.

[14] 张千宏，王贵英. 三阶非线性模糊差分方程动力学行为分析 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(7)：1-7.

[15] 张千宏，王贵英. 一阶非线性模糊差分方程动力学行为研究 [J]. 模糊系统与数学，2019，33(3)：87-97.

责任编辑 张枸