

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.09.019

基于网络的 T-S 模糊系统的有限时间控制

刘玉军, 姚合军

安阳师范学院 数学与统计学院, 河南 安阳 455000

摘要: 研究了带有网络诱导时延的 T-S 模糊系统的有限时间稳定及控制设计问题. 利用模糊逼近原理建立非线性网络系统的 T-S 模糊模型. 基于 Lyapunov 稳定性理论得到了系统有限时间稳定条件和模糊控制设计方法. 通过数值仿真算例验证了该方法的有效性.

关键词: 模糊系统; T-S 模型; 网络; 有限时间控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

文章编号: 1673-9868(2022)09-0187-10

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Finite-Time Control of T-S Fuzzy System Based on Network

LIU Yujun, YAO Hejun

School of Mathematics and Statistics, Anyang Normal University, Anyang Henan 455000, China

Abstract: The finite-time stability and control design of T-S fuzzy system with network induced delay are studied in this paper. The T-S fuzzy model of nonlinear network system was established by using fuzzy approximation principle. Based on Lyapunov stability theory, the finite-time stability condition and fuzzy control design method were obtained. The effectiveness of the method was verified by a numerical simulation.

Key words: fuzzy system; T-S model; network; finite-time control

随着科学技术的进步,尤其是互联网技术的发展,传统的点对点系统已经很难适用于实际的网络工程.把网络和控制技术结合起来是近年来控制领域发展的重要方向,基于网络的控制应运而生.信息通过网络进行交换,极大地提高了控制效率,而且网络系统的布线更加简单,网络维护更加便捷,系统运行成本更低^[1-2].正因如此,近年来涌现出了大量的关于网络系统分析与综合的研究报道^[3-4].比如,文献[5]研究了具有未知通信时延的网络系统的输出反馈控制问题.同时,针对具有两个网络(传感器到控制器和控制器到执行器)的控制系统,设计了一个采样数据观测器来估计系统的状态.文献[6]研究了丢包和网络

收稿日期: 2021-09-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(61073065); 河南省科技攻关项目(202102210128); 河南省高等学校青年骨干教师培养计划(2019GGJS192).

作者简介: 刘玉军, 讲师, 主要从事时延系统、网络系统、有限时间稳定等方面的研究.

通信作者: 姚合军, 教授.

诱导时延同时存在的连续时间网络系统的动态 H_∞ 控制问题, 充分考虑了实际采用的控制器输入到达时刻的非均匀分布特性, 建立了一种新的连续时间网络系统模型, 提出了一种基于线性估计的输出估计方法, 降低了系统建模的保守性, 并基于新的 Lyapunov 泛函, 提出了新的控制器设计策略. 文献[7]提出了一种基于 Lyapunov-Krasovskii 函数的动态量化策略, 进一步改进了控制算法, 使闭环系统收敛速度更快, 并在初始值较小、衰减速度较快的情况下, 得到了更精确的系统状态上界. 文献[8]研究了基于事件驱动观测器的网络系统的输出反馈控制问题, 通过引入调整参数和加权矩阵, 构造出与 Lyapunov 变量和系统矩阵耦合的控制器矩阵. 上述研究结果都是基于线性的网络系统进行研究, 在系统建模过程中忽略了较多的影响因素, 使得系统模型简单化、线性化. 然而, 实际的网络系统大都是非线性的, 现有的研究成果很难应用于网络工程实际, 因此针对非线性网络系统的控制算法亟待研究.

对非线性系统而言模糊控制是十分有效的控制方法, 尤其是利用 T-S 模糊控制方法可以把非线性系统模型近似逼近为线性的关联大系统, 可以有效降低系统分析与控制设计难度^[9-10]. 例如文献[11]利用输入延迟的补偿技术, 将采样周期、信号传输延迟和数据包丢失转换为零阶保持的刷新间隔, 建立误差系统的模糊模型. 文献[12]讨论了基于通信网络的模糊系统的动态输出反馈控制设计策略, 并探讨了网络诱导时延、数据包丢失、信号量化导致的通信容量受限等数字通信网络条件对系统性能的影响. 文献[13]研究了具有传感器饱和噪声的离散 T-S 模糊系统的网络化模糊静态输出反馈控制问题. 在考虑网络诱导时延和丢包的情况下, 将网络系统建模为一个带有区间型时延的离散 T-S 模糊系统. 通过引入一个新的 Lyapunov 泛函, 得到了时延相关的有界实引理.

上述关于线性和非线性网络系统的研究结果考虑的都是渐近稳定性. 然而, 在实际的网络工程系统中, 常常要求系统状态在有限时间内收敛到较小的范围, 即有限时间稳定. 因此, 有关网络系统的有限时间控制问题的研究逐渐引起了众多学者的关注, 传统系统的有限时间控制方法逐渐被引入到网络系统的分析与综合过程. 由于相关的研究工作起步较晚, 研究成果尚不多见. 文献[14]研究了不确定切换网络系统的有限时间控制问题, 利用平均驻留时间和类 Lyapunov 函数方法设计了系统的状态反馈控制器, 利用线性矩阵不等式方法得到了系统有限时间有界的充分条件. 文献[15]研究了一类具有短时变时延和采样抖动的网络系统的有限时间控制问题. 在考虑网络诱导时延和短采样抖动对系统动力学的影响的基础上, 将闭环网络系统描述为离散时间线性系统模型, 利用鲁棒控制方法来求解网络系统的有限时间稳定性和镇定问题. 文献[16]研究了具有随机通信时延的不确定离散网络系统的有限时间 H_∞ 控制问题, 利用锥互补线性化方法, 提出了一种计算控制器参数的迭代算法.

现有的研究成果大都是关于线性的网络系统开展的, 有关非线性网络系统的有限时间控制设计工作, 尤其是利用 T-S 模糊方法和有限时间控制技术对非线性网络系统的研究工作才刚刚展开. 本文在前人对网络系统有限时间控制研究的基础上, 对非线性网络系统的有限时间控制问题进行研究. 利用 T-S 模糊控制方法把带有状态时延和网络诱导时延的非线性的网络系统建模为 T-S 模糊系统模型. 基于有限时间控制理论和线性矩阵不等式方法, 探索系统有限时间稳定的充分条件和模糊控制设计方法. 所得到的结论可以利用 MATLAB 工具进行求解, 为网络工程提供理论和技术支持.

1 问题描述

考虑基于网络的非线性时延系统(图 1).

规则 i : 如果 $z_1(t)$ 为 M_1^i , $z_2(t)$ 为 $M_2^i, \dots,$

$z_n(t)$ 为 M_n^i , 则

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{hi} x(t-h) + \\ &\quad B_i u(t) + G_i \omega(t) \\ x(t) &= \varphi(t) \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

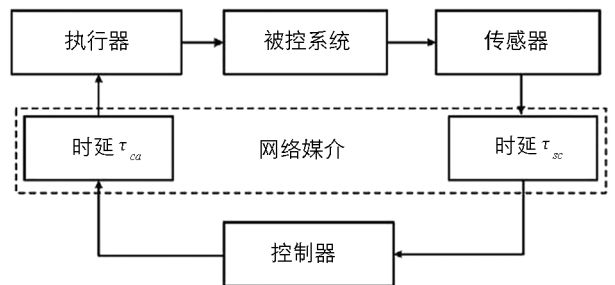


图 1 网络控制系统

其中: $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{z}_1(t) \ \mathbf{z}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{z}_n(t)]^T$ 是前件变量, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入向量, $\mathbf{M}_k^i (i=1,2,\dots,r; k=1,2,\dots,n)$ 是模糊集, r 是模糊规则数, n 是模糊集个数. $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{hi}, \mathbf{B}_i, \mathbf{G}_i$ 是具有合适维数的常数矩阵, $\boldsymbol{\varphi}(t) = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \cdots \ \varphi_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 是定义在区间 $[-h, 0]$ 上的初值函数, h 是状态时延, $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbb{R}^l$ 满足如下条件的外部干扰

$$\int_0^T \boldsymbol{\omega}^T(t) \boldsymbol{\omega}(t) dt \leq d, \quad d \geq 0 \quad (2)$$

利用模糊逼近理论^[9], 得到全局 T-S 模糊控制系统如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_i^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{hi} \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_i \boldsymbol{\omega}(t)] \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t) \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\mu_i(\mathbf{z}(t))$ 满足

$$\mu_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) > 0 \quad i=1,2,\dots,r$$

注1 模型(3)是利用T-S模糊方法对网络系统模型的重构. 实际网络工程中, 被控对象及其网络闭环都存在一些不确定性甚至非线性项, T-S模糊方法的引入把复杂网络系统转化为耦合的线性微分方程组形式, 极大地降低了系统分析难度, 而且T-S模糊系统具有较为成熟的设计方法, 因此网络系统的T-S模糊模型(3)具有较强的实际应用价值.

基于实际工程背景, 为了简化分析, 设 τ_{sc} 是传感器到控制器的传输时延, τ_{ca} 是控制器到执行器的传输时延, $\tau = \tau_{sc} + \tau_{ca}$ 为网络诱导时延.

受网络诱导时延影响, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_i^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{hi} \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t-\tau) + \mathbf{G}_i \boldsymbol{\omega}(t)] \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t) \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (4)$$

本文旨在设计如下状态反馈的模糊控制器

$$\mathbf{u}(t) = \sum_i^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) \quad (5)$$

把控制器(5)代入系统(4), 得到闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_i^r \sum_j^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) \mu_j(\mathbf{z}(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{hi} \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j \mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{G}_i \boldsymbol{\omega}(t)] \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\psi}(t) \quad t \in [-\bar{h}, 0] \end{aligned} \quad (6)$$

系统状态的初始条件为 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)$, 其中 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是定义在区间 $[-\bar{h}, 0]$ 上的光滑函数, $\bar{h} = \max\{\tau, h\}$, 从而存在一个正数 $\bar{\psi}$ 满足

$$\|\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)\| \leq \bar{\psi} \quad t \in [-\bar{h}, 0]$$

本文的设计目的是探寻能使系统(6)的状态在有限时间区间 $[0, T]$ 内稳定的状态反馈控制器存在的充分条件.

定义1^[9] 对给定的正常数 $c_1, c_2, T (c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 \mathbf{R} 如果

$$\mathbf{x}^T(0) \mathbf{R} \mathbf{x}(0) \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) < c_2 \quad \forall t \in [0, T] \quad (7)$$

则时延网络系统(6)(设 $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv 0$) 是 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R})$ 有限时间稳定的.

定义2^[9] 对给定的正常数 $c_1, c_2, T (c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 \mathbf{R} , 如果存在状态反馈控制器(5)使得下面条件成立

$$\mathbf{x}^T(0) \mathbf{R} \mathbf{x}(0) \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) < c_2 \quad \forall t \in [0, T] \quad (8)$$

则时延网络控制系统(6)是可 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, d)$ 有限时间镇定的.

2 主要结果

定理 1 对给定的正数 $c_1, c_2, T (c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果存在常数 $\alpha \geq 0$, 正定矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, 矩阵 $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得如下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Xi & \mathbf{P}\mathbf{A}_{hi} & \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{K}_j & \mathbf{P}\mathbf{G}_i \\ * & -\mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{T} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\alpha\mathbf{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\frac{c_1(\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) + h\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{Q}}) + \tau\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{T}})) + d\lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-\alpha T})}{\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{P}})} < c_2 e^{-\alpha T} \quad (10)$$

其中 $\Xi = \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{T} - \alpha\mathbf{P}$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别代表矩阵的最大、最小特征值, 则时延网络系统(6)可通过状态反馈实现 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, d)$ 有限时间稳定.

证 对系统(6), 构造 Lyapunov 泛函

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \int_{t-h}^t \mathbf{x}^T(\theta)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\theta)d\theta + \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(\theta)\mathbf{T}\mathbf{x}(\theta)d\theta \quad (11)$$

沿系统(6)的状态变化轨迹, $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ 导数如下

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t)) &= 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-h)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-\tau)\mathbf{T}\mathbf{x}(t-\tau) = \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\mathbf{z}(t))\mu_j(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{T})\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{A}_{hi}\mathbf{x}(t-h) + \\ &= 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\mathbf{x}(t-\tau) + 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{G}_i\boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{x}^T(t-h)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t-h) - \mathbf{x}^T(t-\tau)\mathbf{T}\mathbf{x}(t-\tau) = \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(\mathbf{z}(t))\mu_j(\mathbf{z}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h) \\ \mathbf{x}(t-\tau) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h) \\ \mathbf{x}(t-\tau) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\Pi = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{T} & \mathbf{P}\mathbf{A}_{hi} & \mathbf{P}\mathbf{B}_i\mathbf{K}_j & \mathbf{P}\mathbf{G}_i \\ * & -\mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{T} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

由条件(9), 可得

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t)) < \alpha\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \alpha\boldsymbol{\omega}^T(t)\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}(t) < \alpha\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) + \alpha\boldsymbol{\omega}^T(t)\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}(t) \quad (12)$$

在(12)式两边同时乘以 $e^{-\alpha t}$, 得到

$$e^{-\alpha t}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t)) - e^{-\alpha t}\alpha\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) < \alpha e^{-\alpha t}\boldsymbol{\omega}^T(t)\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}(t)$$

从而

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) < \alpha e^{-\alpha t}\boldsymbol{\omega}^T(t)\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}(t)$$

进一步对两边从 0 到 $t \in [0, T]$ 进行积分, 得到

$$e^{-\alpha t}\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(0)) < \int_0^t \alpha e^{-\alpha\theta}\boldsymbol{\omega}^T(\theta)\mathbf{S}\boldsymbol{\omega}(\theta)d\theta \quad (13)$$

由于 $\alpha \geq 0$, $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, 容易得到如下式子

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) &\leq \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) < \\ &e^{at} \mathbf{V}(\mathbf{x}(0)) + \alpha d \lambda_{\max}(\mathbf{S}) e^{at} \int_0^t e^{-a\theta} d\theta < \\ &e^{at} [\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) + \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{T} \mathbf{x}(\theta) d\theta + d \lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-at})] < \\ &e^{at} [\mathbf{x}^T(0) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(0) + \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(\theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(\theta) d\theta + \\ &d \lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-at})] < \\ &e^{at} [\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) \mathbf{x}^T(0) \mathbf{R} \mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{Q}}) \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{R} \mathbf{x}(\theta) d\theta + \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{T}}) \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{R} \mathbf{x}(\theta) d\theta + \\ &d \lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-at})] < \\ &e^{aT} [c_1 (\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}})) + h \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{Q}}) + \tau \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{T}})] + d \lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-aT}) \end{aligned} \quad (14)$$

另外, 也可以得到

$$\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(t) \geq \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{P}}) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) \quad (15)$$

由(14)和(15)式得到

$$\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) < \frac{e^{aT} [c_1 (\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}})) + h \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{Q}}) + \tau \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{T}})] + d \lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-aT})}{\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{P}})} \quad (16)$$

由条件(10)和不等式(16)可知

$$\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) \leq c_2 \quad \forall t \in [0, T]$$

定理 2 对给定的正数 c_1, c_2 , $T(c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 如果存在常数 $\alpha \geq 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$, 正定矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ 和矩阵 $\bar{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得下面线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Theta & \mathbf{A}_{hi} \mathbf{X} & \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{K}}_j & \mathbf{G}_i \\ * & -\bar{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\bar{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\alpha \mathbf{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$\lambda_1 \mathbf{R}^{-1} < \mathbf{X} < \mathbf{R}^{-1} \quad (18)$$

$$\lambda_2 \bar{\mathbf{Q}} < \lambda_1 \mathbf{X} \quad (19)$$

$$\lambda_3 \bar{\mathbf{T}} < \lambda_1 \mathbf{X} \quad (20)$$

$$0 < \mathbf{S} < \lambda_4 \mathbf{I} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} d \lambda_4 (1 - e^{-aT}) - c_2 e^{-aT} & \sqrt{c_1} & \sqrt{h} & \sqrt{\tau} \\ * & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ * & * & -\lambda_2 & 0 \\ * & * & * & -\lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中

$$\Theta = \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{T}} - \alpha \mathbf{X}$$

则网络系统(6)在状态反馈控制 $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}(t)$ 作用下是 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, d)$ 有限时间稳定的。

证 用对角阵 $\text{diag}\{\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{I}\}$ 左乘和右乘不等式(9), 得到

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{A}_{hi}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{G}_i \\ * & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\alpha\mathbf{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

其中

$$\Sigma = \mathbf{A}_i\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} - \alpha\mathbf{P}^{-1}$$

令 $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\bar{\mathbf{K}}_j = \mathbf{K}_j\mathbf{P}^{-1}$, $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$, $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}$, 则不等式(23) 等价于不等式(17).

另外, 令 $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{T}\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, 由于 \mathbf{R} 是正定矩阵, 所以有

$$\lambda_{\max}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}$$

由不等式(18) - (21) 可知

$$\begin{aligned} 1 < \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{P}}), \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) < \frac{1}{\lambda_1}, \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{Q}}) < \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) \\ \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{T}}) < \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}), \lambda_{\max}(\mathbf{S}) < \lambda_4 \end{aligned} \quad (24)$$

由 Schur 引理可知不等式(22) 等价于

$$d\lambda_4(1 - e^{-aT}) - c_2e^{-aT} + \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{h}{\lambda_2} + \frac{\tau}{\lambda_3} < 0 \quad (25)$$

由(24) 式和条件(10) 可得

$$\frac{c_1(\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) + h\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{Q}}) + \tau\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{T}})) + d\lambda_{\max}(\mathbf{S})(1 - e^{-aT})}{\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{P}})} < d\lambda_4(1 - e^{-aT}) + \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{h}{\lambda_2} + \frac{\tau}{\lambda_3} \quad (26)$$

把(25) 式代入(26) 式可知不等式(10) 成立.

注 2 定理 1 和定理 2 中的条件对于 α, c_2 都不是线性的, 因为它们以非线性方式出现. 然而, 一旦我们固定 α , 它们可以变成基于线性矩阵不等式的可行性问题, 并可通过 MATLAB 软件进行求解.

3 数值算例

算例 1 考虑形如(6) 式的非线性网络系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(\mathbf{z}(t)) [\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{hi}\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t-\tau) + \mathbf{G}_i\boldsymbol{\omega}(t)]$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \quad t \in [-\bar{h}, 0]$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{h1} &= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -0.1 & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{h2} &= \begin{bmatrix} 2 & 0.1 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{h3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{\omega}(t) &= 0.2\text{sint} & \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} & \mathbf{G}_3 &= \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.2 \end{bmatrix} & h &= 0.2, \tau = 0.5, \bar{h} = 0.5 \end{aligned}$$

求解线性矩阵不等式(17), 得到增益矩阵

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1.5673 & -0.4613 & -0.4546 \\ -0.4613 & 0.1549 & 1.4354 \\ -0.4546 & 1.4354 & 2.4920 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_1 = [-4.4356 \quad 1.4562 \quad 0.4367]$$

$$\bar{\mathbf{K}}_2 = [0.8360 \quad 1.6356 \quad -0.2465]$$

$$\bar{\mathbf{K}}_3 = [0.4665 \quad -2.5606 \quad 3.8462]$$

选取权重函数

$$\mu_1(t) = 0.5\sin^2 t, \mu_2(t) = 0.3\cos^2 t, \mu_3(t) = 0.7 - 0.2\sin^2 t$$

得到状态反馈控制器(5)如下:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) = [0.3294 - 1.2864\sin^2 t \quad 1.4656 + 0.8033\cos^2 t \quad -3.5524 + 2.6557\sin^2 t] \mathbf{x}(t)$$

为了对系统状态进行模拟仿真, 选择初始状态为

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = [-2 \quad 5 \quad 6]^T$$

图 2 中系统状态 $x_1(t)$ 的曲线在开始的几秒内虽然有振动, 但是超调很小, 振动的频率也不是很高, 而且能在 7 s 之内收敛到并保持在 0 附近。

图 3 中系统状态 $x_2(t)$ 的曲线在开始的几秒内有振动, 但是振动的频率较低, 虽然超调较大, 但是出现大的超调的次数只有 1 次, 系统状态能在 8 s 之内收敛到并保持在 0 附近。

图 4 中的状态 $x_3(t)$ 的曲线基本上没有出现振动或者超调现象, 曲线的平滑性和收敛速度都非常好, 在 4 s 之内收敛到并保持在 0 附近。综上所述, 本文设计的状态反馈模糊控制方法对所考虑的非线性网络系统具有较好的控制效果。

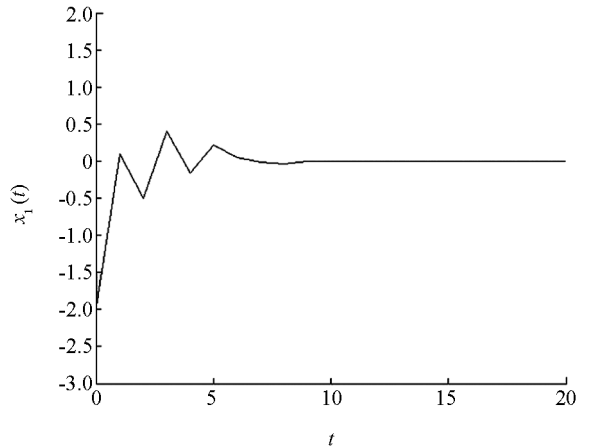


图 2 系统状态 $x_1(t)$ 的响应图

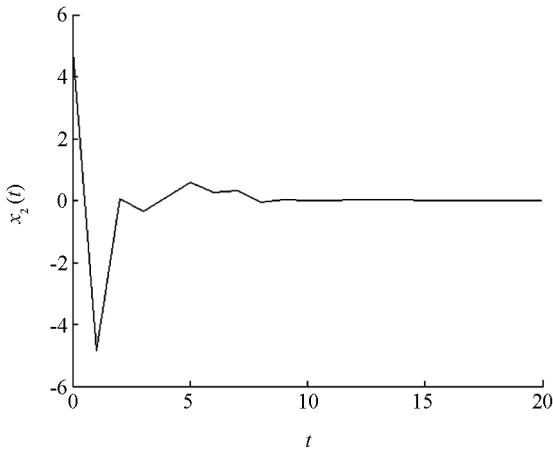


图 3 系统状态 $x_2(t)$ 的响应图

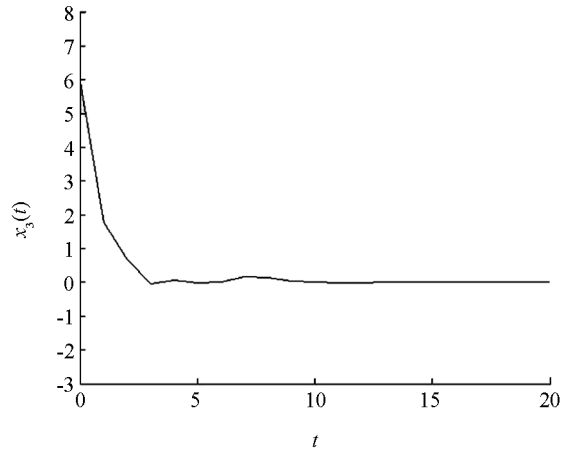


图 4 系统状态 $x_3(t)$ 的响应图

算例 2 移动机械手系统是通过把一个机械手固定安装在移动平台上构成, 能够应用于各种危险环境作业的生产过程。机械手的工作空间由移动平台决定, 通过调节移动平台的移动空间调节机械手的作业空

间. 由于机械手和移动平台具有不同的动力学特性, 而且具有较为复杂的耦合性. 我们将把本文得到模糊系统的有限控制方法应用到基于网络的移动机械手系统, 验证研究结果的可行性.

利用拉格朗日方法对移动机械手系统建立系统的动力学模型, 采用文献[6]中的建模过程可以得到系统的 T-S 模糊系统如下:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_i^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

在此基础上我们考虑基于网络的移动机械手系统常常会受到网络诱导时延和外界干扰的影响, 因此在上述名义系统的基础上增加网络诱导时延和外界干扰项.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_i^r \mu_i(\mathbf{z}(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{hi} \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t-\tau) + \mathbf{G}_i \boldsymbol{\omega}(t)] \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t) \quad t \in [-h, 0]\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}(t) = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6)^\top = (\dot{x}_p \ \dot{y}_p \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4)^\top$, x_p, y_p 分别是移动平台在水平和垂直方向上的位移, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 分别是 4 个角度变量.

由于系统变量较多, 为了减少计算量, 选取 $r=2$. 给定系统矩阵和相关参数如下

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{h1} &= \begin{bmatrix} -2 & 0.2 & -0.5 & 0.1 & -0.6 & 0.1 \\ 0.4 & -2 & 0.6 & 0 & 0 & 2 \\ 0.1 & 0 & -6 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ -0.2 & 0 & 0.6 & -1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.6 & 0.2 & -4 & 0.2 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0.3 & -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{h2} &= \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & -5 & 0.1 & 0.1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0.1 & -6 & 0.1 & -0.2 & -0.1 \\ 0.5 & -0.1 & 0.1 & -3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0 & -8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & -0.5 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = [-0.1 \quad -0.3 \quad 0.5 \quad 0 \quad -0.1 \quad 0.1]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -0.6 \cos t, \quad h = 0.8, \quad \tau = 0.4, \quad \bar{h} = 0.8$$

$$\mathbf{G}_1 = [0.1 \quad -0.2 \quad 0.1 \quad 0 \quad -1 \quad 0.01]^T, \quad \mathbf{G}_2 = [-0.2 \quad 0.01 \quad 0.05 \quad -0.1 \quad 0.2 \quad 0.3]^T$$

$$\mu_1(t) = \sin^2 t, \quad \mu_2(t) = \cos^2 t$$

求解线性矩阵不等式(17), 得到状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.4265 + 0.4265 \sin^2 t \\ -2.5266 + 1.4356 \cos^2 t \\ 4.1468 - 2.1345 \sin^2 t \\ 3.2134 - 0.3 \cos^2 t \\ 0.7451 - 0.7242 \sin^2 t \\ -2.5628 + 2.6557 \sin^2 t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

选择初始状态 $\boldsymbol{\varphi}(t) = [2 \quad -2 \quad 3 \quad -3 \quad 5 \quad -5]^T$, 得到系统状态的响应曲线如下

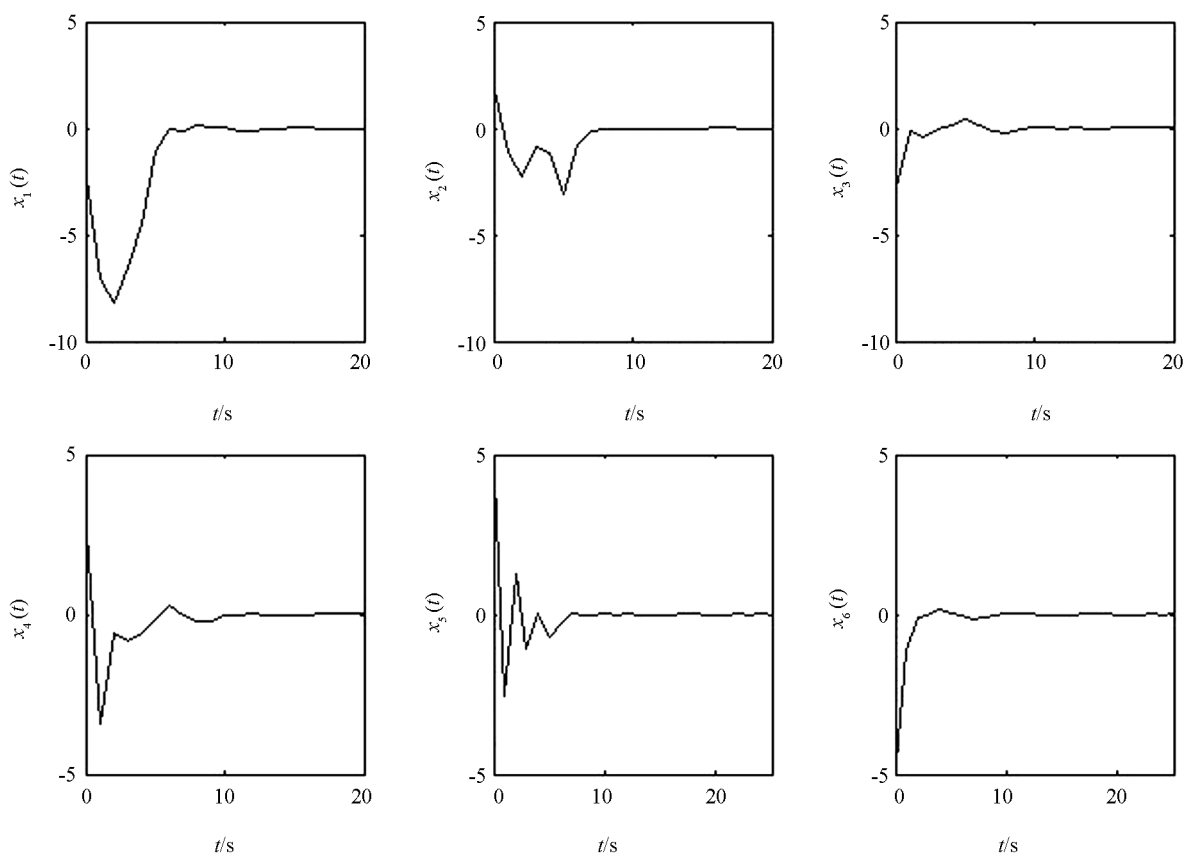


图 5 系统状态的响应图

从图 5 中可以看出, 整体上系统的 6 个状态变量的收敛性、快速性、平稳性较好, 超调也不算大. 所有状态在 10 s 内收敛到 0, 尤其状态 $x_1(t), x_3(t), x_6(t)$ 在 5 s 之内基本收敛到 0. 状态 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_6(t)$ 的平稳性较好, 没有出现高频的震荡现象. 状态 $x_3(t), x_6(t)$ 基本上没有超调, 其余状态虽然有超调但是超调相对较小, 均在可接受范围内. 总之, 本文设计的模糊控制方法对此类状态较多的控制系统具有良好的控制效果, 说明了该设计方法的可行性和有效性.

4 结论

本文针对一类基于网络的非线性系统, 利用模糊系统建模方法和有限时间控制技术, 给出了非线性网络系统模糊建模与有限时间控制的设计方法. 以线性矩阵不等式形式给出系统有限时间稳定的充分条件,

可以利用 MATLAB 工具进行求解,具有较强的实际应用价值.本文的研究结果还可以推广应用于多时延网络系统的控制设计中.本文研究的不足在于:①被控系统状态时延和网络诱导时延是常数,而且没有考虑不确定性的影响;②研究得到的有限时间稳定性条件是时延独立的,具有一定的保守性.由于考虑的是有限时间稳定性,要得到时延依赖的稳定性条件, Lyapunov 函数的设计将更加复杂,时延依赖条件的探索将更加困难,具有一定的挑战性.下一步研究重点是考虑带有不确定性和时变时延的网络系统的有限时间控制问题,并进一步探索保守性更小的时延依赖有限时间稳定性条件.

参考文献:

- [1] JUN Y. H_∞ Disturbance Attenuation of Nonlinear Networked Control Systems via Takagi-sugeno Fuzzy Model [J]. AIMS Electronics and Electrical Engineering, 2019, 3(3): 257-273.
- [2] DUAN R R, LI J M. Finite-Time Distributed H_∞ Filtering for Takagi-Sugeno Fuzzy System with Uncertain Probability Sensor Saturation under Switching Network Topology: Non-PDC Approach [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 371: 124961.
- [3] QI Q Y, ZHANG H S. Output Feedback Control and Stabilization for Networked Control Systems with Packet Losses [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2223-2234.
- [4] YAO H J. Guaranteed Cost Control for Discrete Uncertain Time Delay Networked Systems with Sliding Mode Approach [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 35(4): 3959-3969.
- [5] SELIVANOV A, FRIDMAN E. Observer-Based Input-to-State Stabilization of Networked Control Systems with Large Uncertain Delays [J]. Automatica, 2016, 74: 63-70.
- [6] WANG T B, WANG Y L, WANG H, et al. Observer-Based H_∞ Control for Continuous-Time Networked Control Systems [J]. Asian Journal of Control, 2016, 18(2): 581-594.
- [7] WANG Y L, YU S H. An Improved Dynamic Quantization Scheme for Uncertain Linear Networked Control Systems [J]. Automatica, 2018, 92: 244-248.
- [8] YAN S, SHEN M Q, ZHANG G M. Extended Event-Driven Observer-Based Output Control of Networked Control Systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(3): 1639-1648.
- [9] HE S P, XU H L. Non-Fragile Finite-Time Filter Design for Time-Delayed Markovian Jumping Systems via T-S Fuzzy Model Approach [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 80(3): 1159-1171.
- [10] HIEN L V, TRINH H. Stability Analysis and Control of Two-Dimensional Fuzzy Systems with Directional Time-Varying Delays [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(3): 1550-1564.
- [11] XIAO H Q, HE Y, WU M, et al. New Results on H_∞ Tracking Control Based on the T-S Fuzzy Model for Sampled-Data Networked Control System [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(6): 2439-2448.
- [12] MAHMOUD M S. Fuzzy Networked Control Systems with Communication Constraints [J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2015, 34(2): 543-564.
- [13] ZHANG D W, ZHOU Z Y, JIA X C. Networked Fuzzy Output Feedback Control for Discrete-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Sensor Saturation and Measurement Noise [J]. Information Sciences, 2018, 457/458: 182-194.
- [14] CHEN X L, ZHOU G P, TIAN F X, et al. Finite Time Control of Uncertain Networked Switched Linear Systems with Quantizations [C] //Seventh International Conference on Electronics and Information Engineering, New York: IEEE Press, 2017: 620-629.
- [15] HUA C C, YU S C, GUAN X P. Finite-Time Control for a Class of Networked Control Systems with Short Time-Varying Delays and Sampling Jitter [J]. International Journal of Automation and Computing, 2015, 12(4): 448-454.
- [16] ELAHI A, ALFI A. Finite-Time H_∞ Control of Uncertain Networked Control Systems with Randomly Varying Communication Delays [J]. ISA Transactions, 2017, 69: 65-88.