DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2023.03.002

# 基于区间值的广义多尺度决策系统及最优尺度组合选择

任泽[1,2]，　李磊军[1,2]，　米据生[1,2]，　李美争[3]

1. 河北师范大学 数学科学学院，石家庄 050024；2. 河北省计算数学与应用重点实验室，石家庄 050024；
3. 河北师范大学 计算机与网络空间安全学院，石家庄 050024

**摘要**：多尺度决策系统基于多粒度思想对数据进行不同角度、深层次的分析与处理．目前，多尺度决策系统主要处理单值形式的数据，但在许多实际问题中，决策系统中的数据往往以区间值的形式存在．因此，将经典的多尺度决策系统推广到区间值上具有一定的意义．本研究定义了广义多尺度区间值决策系统的概念；基于 Jaccard 相似率推广了计算多属性下对象之间的相似度，以构造 $\theta$-相容关系；讨论了保持 4 种分布协调性相互等价的 $\theta$ 取值；证明了在不协调广义多尺度区间值决策系统中，任取一个 $\theta$ 值获得的最优尺度组合与取关于 $\theta$ 的某个区间范围获得的最优尺度组合相同．

**关 键 词**：多尺度决策系统；区间值；相似度；$\theta$-相容关系；尺度组合

**中图分类号**：TP18　　**文献标志码**：A　　开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

**文 章 编 号**：1673－9868(2023)03－0019－15

# Generalized Multi-Scale Decision System Based on Interval Value and Optimal Scale Combinations Selection

REN Ze[1,2]，　LI Leijun[1,2]，　MI Jusheng[1,2]，　LI Meizheng[3]

1. *College of Mathematical Sciences，Hebei Normal University，Shijiazhuang 050024，China；*
2. *Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications，Shijiazhuang 050024，China；*
3. *College of Computer and Cyberspace Security，Hebei Normal University，Shijiazhuang 050024，China*

**Abstract**：Based on the idea of multi-granularity，multi-scale decision system analyzes and processes data from different perspectives and in different depths. At present，it mainly deals with data sets of discrete attribute values. As an extension of single valued decision system，interval valued decision system can be better describe the phenomenon and reflect the uncertainty of information. Therefore，it is meaningful to

收稿日期：2022－08－21
基金项目：国家自然科学基金项目(61502144，62076088，12101182)；河北省高等学校科学技术研究项目(BJ2019014)．
作者简介：任泽，硕士，主要从事粒计算、粗糙集理论研究．
通信作者：李磊军，副教授，硕士研究生导师．

extend the generalized multi-scale decision system to interval value. In the first part, the concept of generalized multi-scale interval valued decision system was defined. Then, in order to construct $\theta$-tolerance relationship, the Jaccard similarity ratio was extended to the similarity between objects under multiple attributes. Secondly, discussion on the value of $\theta$ that makes the four kinds of distribution coordination equivalent to each other was made. Finally, it was proved that in an inconsistent generalized multi-scale interval valued decision system, taking any value of $\theta$ is the same as taking an interval range about the value to obtain the optimal scale combination.

**Key words**: multi-scale decision system; interval value; similarity; $\theta$-tolerance relation; scale combinations

粗糙集理论是 Pawlak 于 1982 年提出的一种能够定量分析处理不精确、不一致、不完整信息的数学工具[1-2]. 它的基本思想是利用数据集上等价关系形成的划分，实现目标近似和知识发现. 在经典的粗糙集数据分析中，一般处理每个对象与对应的每个属性取一个值的情况，这样的信息系统反映的是固定尺度下的信息，称为单尺度信息系统.

现实生活中，人们可以从不同角度观察、表示、分析数据，使得单一尺度框架下的知识表示与数据处理方法不能满足实际应用的需求. 针对这个问题，Wu 等[3]提出了多尺度信息系统，这个数据处理模型被称为 Wu-and-Leung 模型[4]. 它的核心思想是每个尺度下的数据对应着论域的一次粒化，且这些粒化结果之间能够形成粒度粗细关系，即信息呈现出从粗粒度到细粒度或从细粒度到粗粒度的规律. 由于 Wu-and-Leung 模型有一个基本假设：要求每一属性具有相同的尺度个数. 这样的限制在实际生活中有些严格，Li 等[4]对 Wu-and-Leung 模型做了进一步推广，提出了广义多尺度信息系统，展示了不同属性具有不同尺度个数的情形.

一般情况，多尺度信息系统对应的粗尺度意味着数据采集的成本较低. 因此，人们希望在满足某种需求的前提下找到较粗的尺度，引出了“应该以什么样的标准选取尺度”的问题. 针对这个问题，Wu 等提出了最优尺度选择的概念[5]，并依据多尺度决策系统的协调性给出了 7 种挑选最优尺度的标准. 同时，Wu 等[6]讨论了广义多尺度决策系统中基于 Pawlak 粗糙集模型的 7 种最优尺度组合之间的关系. Gu 等[7]研究了多尺度决策系统中知识获取的问题. Bao 等[8]将信息熵理论应用于广义多尺度信息系统最优尺度组合的选择. Huang 等[9]研究了广义多尺度直觉模糊决策系统的最优尺度组合选择. She 等[10]讨论了多尺度决策系统中规则提取的局部方法. Cheng 等[11]将三支决策思想融入到最优尺度组合的选择. Li 等[12]提出了一种新的逐步选取最优尺度组合的方法，以获得单个最优尺度组合. Hao 等[13]利用序贯三支决策模型，研究了动态多尺度信息系统的最优尺度选择. Huang 等[14]提出了具有多尺度决策属性的广义多尺度信息系统.

在实际生活中区间值能较好地描述样本，保存样本的特征. 因而被广泛应用于机器学习、机械制造、医疗诊断等方面. 现基于区间值粗糙集模型，也取得了丰硕的成果. Dai 等[15-16]基于信息熵理论研究了区间值信息系统的不确定性度量和区间值决策系统属性约简的问题. Huang 等[17-18]基于区间直觉模糊信息系统，构造了区间直觉模糊粒结构，并将优势关系引入到区间直觉模糊信息系统，提出了两种消除冗余信息的属性约简算法. Zhang 等[19]刻画了双论域上的广义区间值模糊粗糙集模型. Hu[20]基于两种模糊逻辑算子提出了广义区间值模糊变精度粗糙集模型. Xie 等[21]给出了区间值信息系统排序的一种新方法. Lin 等[22]基于多阈值相容关系研究了不完备区间值决策系统的多粒度粗糙集模型. Zhang 等[23]研究了共识过程中的区间值犹豫模糊多粒度三支决策及其在多属性群决策中的应用.

目前，以多尺度区间值信息系统为背景进行研究的主要有：Gu 等[24]对多尺度区间值信息系统粗糙集近似的研究，Wu 等[25]对空间遥感数据的多粒度标记分类问题的研究. 基于现有文献发现，对多尺度区间值决策系统进行知识发现、获取的研究较少. 因此，文中主要研究了广义多尺度区间值决策系统中获取最优尺度组合的问题.

## 1　基础知识

下面首先介绍区间值信息系统和广义多尺度信息系统的基本概念.

**定义 1**[24]　称 $IVS=(U, C, V, f)$ 为区间值信息系统，$U$ 为非空有限对象集，$C$ 为非空有限条件属性集. 对任意 $a\in C$，存在映射 $f: U\to V_a$，$V_a$ 是属性 $a$ 下的值域，为区间值的形式.

**定义 2**[22]　对任意两个区间值的交运算和并运算定义为

$$[\underline{a}_s, \overline{a}_s]\cap[\underline{a}_t, \overline{a}_t]=\begin{cases}\varnothing & (\overline{a}_s<\underline{a}_t)\vee(\overline{a}_t<\underline{a}_s)\\ [\max(\underline{a}_s, \underline{a}_t), \min(\overline{a}_s, \overline{a}_t)] & \text{其他}\end{cases}$$

$$[\underline{a}_s, \overline{a}_s]\cup[\underline{a}_t, \overline{a}_t]=[\min(\underline{a}_s, \underline{a}_t), \max(\overline{a}_s, \overline{a}_t)]$$

**定义 3**[22]　对任意两个区间值$[\underline{a}_s, \overline{a}_s]$和$[\underline{a}_t, \overline{a}_t]$之间的 Jaccard 相似率定义为

$$J(x_s, x_t)=\frac{|[\underline{a}_s, \overline{a}_s]\cap[\underline{a}_t, \overline{a}_t]|}{|[\underline{a}_s, \overline{a}_s]\cup[\underline{a}_t, \overline{a}_t]|}$$

$|\cdot|$ 表示区间的长度.

**定义 4**[4]　称 $S=(U, C)=(U, \{a_j^k \mid k=1, 2, \cdots, I_j, j=1, 2, \cdots, m\})$ 为广义多尺度信息系统，$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为非空有限对象集，$C=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为非空有限条件属性集，属性 $a_j$ 有 $I_j$ 个尺度，$j=1, \cdots, m$.

$a_j^k: U\to V_j^k$，$V_j^k$ 是属性 $a_j$ 在 $k$ 尺度下的值域，并且对于 $j=1, 2, \cdots, m$，存在一个满射函数 $g_j^{k, k+1}$：$V_j^k\to V_j^{k+1}$，使得

$$a_j^{k+1}(x_s)=g_j^{k, k+1}[a_j^k(x_s)]$$

称 $g_j^{k, k+1}$ 为粒度信息转化函数[4]，$x_s\in U$，$1\leqslant k\leqslant I_j-1$. 称 $S=(U, C\cup\{d\})$ 为广义多尺度决策系统，其中，决策属性 $d$ 不属于条件属性集 $C$.

**定义 5**[4]　$S=(U, C)$ 为广义多尺度信息系统，如果属性 $a_j$ 分别取第 $l_j$ 个尺度($j=1, 2, \cdots, m$)，那么由该属性－对象集可以构造一个单尺度信息系统 $S^K$. 每个属性对应的指数序列构成的 $K=(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ 称为 $S^K$ 在 $S$ 中的尺度组合，$S$ 中所有尺度组合构成的集合表示为 $\mathcal{L}=\{(l_1, l_2, \cdots, l_m) \mid 1\leqslant l_j\leqslant I_j, j=1, 2, \cdots, m\}$.

**定义 6**[4]　设 $K_1=(l_1^1, l_2^1, \cdots, l_m^1)\in\mathcal{L}$，$K_2=(l_1^2, l_2^2, \cdots, l_m^2)\in\mathcal{L}$，对任意的 $j=1, 2, \cdots, m$，若有 $l_j^1\leqslant l_j^2$，则称尺度组合 $K_1$ 细于 $K_2$，或称 $K_2$ 粗于 $K_1$，记作 $K_1\preccurlyeq K_2$. 若 $K_1\preccurlyeq K_2$，且存在 $\tilde{j}=1, 2, \cdots, m$，使 $l_{\tilde{j}}^1<l_{\tilde{j}}^2$，则称尺度组合 $K_1$ 严格细于 $K_2$，或称 $K_2$ 严格粗于 $K_1$，记作 $K_1\prec K_2$.

由定义 6，可以验证出$(\mathcal{L}, \preccurlyeq)$是一个偏序集.

**定义 7**[4]　$K_1=(l_1^1, l_2^1, \cdots, l_m^1)$，$K_2=(l_1^2, l_2^2, \cdots, l_m^2)$，$K_1, K_2\in\mathcal{L}$ 定义

$$K_1\wedge K_2=(l_1^1\wedge l_1^2, l_2^1\wedge l_2^2, \cdots, l_m^1\wedge l_m^2)$$

$$K_1\vee K_2=(l_1^1\vee l_1^2, l_2^1\vee l_2^2, \cdots, l_m^1\vee l_m^2)$$

可得，$(\mathcal{L}, \preccurlyeq, \wedge, \vee)$构成有界格，最小元 $K_0=(1, 1, \cdots, 1)$，最大元 $I=(I_1, I_2, \cdots, I_m)$.

根据文献[4]，对于广义多尺度决策系统 $S$，若最细的尺度组合 $K_0=(1, 1, \cdots, 1)$ 对应的决策系统是协调的(即 $R_{C^{K_0}}\subseteq R_d$)，则称决策系统 $S$ 为协调的，否则称决策系统 $S$ 为不协调的.

其中，由条件属性集 $C^K$ 生成的等价关系、等价类分别为

$$R_{C^K}=\{(x_s, x_t)\in U\times U \mid a^k(x_s)=a^k(x_t), \forall a^k\in C^K\}, [x_s]_{C^K}=\{x_t\in U \mid (x_s, x_t)\in R_{C^K}\}$$

由决策属性 $d$ 生成的等价关系、等价类分别为

$$R_d=\{(x_s, x_t)\in U\times U \mid d(x_s)=d(x_t)\}$$

$$[x_s]_{R_d}=\{x_t\in U\mid(x_s,x_t)\in R_d\}$$

$$U/R_d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$$

对任意 $X\subseteq U$，$X$ 关于等价关系 $R_{C^K}$ 的下近似和上近似分别定义为

$$\underline{R_{C^K}}(X)=\{x_s\in U\mid[x_s]_{C^K}\subseteq X\},\ \overline{R_{C^K}}(X)=\{x_s\in U\mid[x_s]_{C^K}\cap X\neq\varnothing\}$$

根据文献[6]

$$L_{C^K}(d)=[\underline{R_{C^K}}(D_1),\underline{R_{C^K}}(D_2),\cdots,\underline{R_{C^K}}(D_r)]$$

$$H_{C^K}(d)=[\overline{R_{C^K}}(D_1),\overline{R_{C^K}}(D_2),\cdots,\overline{R_{C^K}}(D_r)]$$

$$\mu_{C^K}(x_s)=[D(D_1/[x_s]_{C^K}),\cdots,D(D_r/[x_s]_{C^K})]$$

$$\gamma_{C^K}(x_s)=\{D_{h_0}\in U/R_d\mid D(D_{h_0}/[x_s]_{C^K})=\max_{1\leqslant h\leqslant r}D(D_h/[x_s]_{C^K})\}$$

$$Bel_{C^K}(d)=[Bel_{C^K}(D_1),\cdots,Bel_{C^K}(D_r)]$$

$$Pl_{C^K}(d)=[Pl_{C^K}(D_1),\cdots,Pl_{C^K}(D_r)]$$

其中

$$Bel_{C^K}(D_h)=\frac{|\underline{R_{C^K}}(D_h)|}{|U|}$$

$$Pl_{C^K}(D_h)=\frac{|\overline{R_{C^K}}(D_h)|}{|U|}$$

$$D(D_h/[x_s]_{C^K})=\frac{|D_h\cap[x_s]_{C^K}|}{|[x_s]_{C^K}|}$$

$$x_s\in U\qquad 1\leqslant h\leqslant r$$

$L_{C^K}$ 与 $H_{C^K}$ 分别称为决策类 $U/R_d$ 关于属性集 $C^K$ 在 $S$ 中的下分布与上分布；$\mu_{C^K}(x_s)$ 与 $\gamma_{C^K}(x_s)$ 分别称为对象 $x_s$ 在属性集 $C^K$ 下关于决策类 $U/R_d$ 的概率分布与最大分布；$Bel_{C^K}$ 与 $Pl_{C^K}$ 分别称为决策类 $U/R_d$ 关于属性集 $C^K$ 在 $S$ 中的信任分布与似然分布.

**定义8**[6] 设 $S=(U,C\cup\{d\})$ 为不协调的广义多尺度决策系统，$K,\widetilde{K}\in\mathcal{L}$，$x_s\in U$

1) 若 $L_{C^K}(d)=L_{C^{K_0}}(d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 下分布协调. 当 $S^K$ 关于 $S$ 下分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$S^{\widetilde{K}}$ 相对于 $S$ 都不是下分布协调，则称 $K$ 是 $S$ 的一个下分布最优尺度组合；

2) 若 $H_{C^K}(d)=H_{C^{K_0}}(d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 上分布协调. 当 $S^K$ 关于 $S$ 上分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$S^{\widetilde{K}}$ 相对于 $S$ 都不是上分布协调，则称 $K$ 是 $S$ 的一个上分布最优尺度组合；

3) 若 $\mu_{C^K}(x_s)=\mu_{C^{K_0}}(x_s)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 概率分布协调. 当 $S^K$ 关于 $S$ 概率分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$S^{\widetilde{K}}$ 相对于 $S$ 都不是概率分布协调，则称 $K$ 是 $S$ 的一个概率分布最优尺度组合；

4) 若 $\gamma_{C^K}(x_s)=\gamma_{C^{K_0}}(x_s)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 最大分布协调. 当 $S^K$ 关于 $S$ 最大分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$S^{\widetilde{K}}$ 相对于 $S$ 都不是最大分布协调，则称 $K$ 是 $S$ 的一个最大分布最优尺度组合；

5) 若 $Bel_{C^K}(d)=Bel_{C^{K_0}}(d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 信任分布协调. 当 $S^K$ 关于 $S$ 信任协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$S^{\widetilde{K}}$ 相对于 $S$ 都不是信任分布协调，则称 $K$ 是 $S$ 的一个信任分布最优尺度组合；

6) 若 $Pl_{C^K}(d)=Pl_{C^{K_0}}(d)$，则称 $S^K$ 关于 $S$ 似然分布协调. 当 $S^K$ 关于 $S$ 似然协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$S^{\widetilde{K}}$ 相对于 $S$ 都不是似然分布协调，则称 $K$ 是 $S$ 的一个似然分布最优尺度组合.

## 2 广义多尺度区间值信息系统

本节首先定义了广义多尺度区间值信息系统的概念；然后，在其背景上构造了 $\theta$-相容关系；最后，讨

论了相关的基本性质.

**定义 9**　称 $MS\text{-}IVS=(U,C)$ 为广义多尺度区间值信息系统，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为非空有限对象集，$C=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 为非空有限条件属性集. 其中，$a_j$ 具有 $I_j$ 个尺度($j=1,2,\cdots,m$)，对任意 $a_j^k(k=1,2,\cdots,I_j)$，存在映射 $f:U\to V_{a_j^k}$，$V_{a_j^k}$ 是属性 $a_j$ 在 $k$ 尺度下的值域，为区间值的形式. 在同一对象相同属性不同尺度下，属性值具有下面包含关系

$$[\underline{a}_{ij}^1,\overline{a}_{ij}^1]\subseteq[\underline{a}_{ij}^2,\overline{a}_{ij}^2]\subseteq\cdots\subseteq[\underline{a}_{ij}^{I_j},\overline{a}_{ij}^{I_j}]$$

$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$. $MS\text{-}IVDS=(U,C\cup\{d\})$ 称为广义多尺度区间值决策系统. 其中，决策属性 $d$ 不属于条件属性集 $C$.

Jaccard相似率刻画了两个对象在同一属性下的相似度，由于在文中需要依据多属性下对象之间的相似度构造关系矩阵，因而，将 Jaccard 相似率做了进一步推广.

**定义 10**　在 $MS\text{-}IVS=(U,C)$ 中，对任意对象 $x_s$，$x_t$ 关于属性集 $C^K$ 下的相似度定义为

$$J_{C^K}(x_s,x_t)=\left(\frac{\cap_1}{\cup_1}+,\cdots,+\frac{\cap_j}{\cup_j}+,\cdots,+\frac{\cap_m}{\cup_m}\right)\times\frac{1}{m}$$

$$\frac{\cap_j}{\cup_j}=\begin{cases}\dfrac{|[\underline{a}_s,\overline{a}_s]\cap[\underline{a}_t,\overline{a}_t]|}{|[\underline{a}_s,\overline{a}_s]\cup[\underline{a}_t,\overline{a}_t]|} & |[\underline{a}_s,\overline{a}_s]\cap[\underline{a}_t,\overline{a}_t]|\neq 0\\ 0 & |[\underline{a}_s,\overline{a}_s]\cap[\underline{a}_t,\overline{a}_t]|=0\end{cases}\qquad K\in\mathcal{L},\ j=1,2,\cdots,m$$

**性质 1**　在 $MS\text{-}IVS=(U,C)$ 中，对任意对象 $x_s$，$x_t$ 关于属性集 $C^K$ 下的相似度满足

1) $0\leqslant J_{C^K}(x_s,x_t)\leqslant 1$；

2) $J_{C^K}(x_s,x_t)=1$ 当且仅当 $x_s$，$x_t$ 在属性集 $C^K$ 下的取值相同；

3) $J_{C^K}(x_s,x_t)=J_{C^K}(x_t,x_s)$.

性质 1 说明，当 $J_{C^K}(x_s,x_t)=0$ 时，对象 $x_s$，$x_t$ 在属性集 $C^K$ 下不相似；当 $J_{C^K}(x_s,x_t)=1$ 时，对象 $x_s$，$x_t$ 在属性集 $C^K$ 下完全相似. 同时，对象 $x_s$，$x_t$ 的相似性随着 $J_{C^K}(x_s,x_t)$ 的增大而变接近.

**定义 11**　$MS\text{-}IVDS=(U,C\cup\{d\})$ 为广义多尺度区间值决策系统，在 $U$ 上定义关于属性集 $C^K$ 形成的二元关系 $T_{C^K}^{\theta}$，$\theta\in[0,1]$

$$T_{C^K}^{\theta}=\{(x_s,x_t)\mid(x_s,x_t)\in U\times U,J_{C^K}(x_s,x_t)\geqslant\theta\}$$

相应地，对象 $x_s$ 所在的类表示为

$$S_{C^K}^{\theta}(x_s)=(x_t\mid x_t\in U,(x_s,x_t)\in T_{C^K}^{\theta})$$

集合 $X\subseteq U$ 关于二元关系 $T_{C^K}^{\theta}$ 形成的下近似和上近似分别定义为

$$\underline{S_{C^K}^{\theta}}(X)=\{x_s\mid x_s\in U,S_{C^K}^{\theta}(x_s)\subseteq X\}$$

$$\overline{S_{C^K}^{\theta}}(X)=\{x_s\mid x_s\in U,S_{C^K}^{\theta}(x_s)\cap X\neq\varnothing\}$$

**性质 2**　二元关系 $T_{C^K}^{\theta}$ 满足

1) $\forall x_s\in U$，$(x_s,x_s)\in T_{C^K}^{\theta}$，自反性；

2) $\forall x_s,x_t\in U$，$(x_s,x_t)\in T_{C^K}^{\theta}$，$(x_t,x_s)\in T_{C^K}^{\theta}$，对称性.

依据性质 2，二元关系 $T_{C^K}^{\theta}$ 不满足传递性，故不是等价关系. 在下面内容，称二元关系 $T_{C^K}^{\theta}$ 为 $\theta$- 相容关系. 根据 $\theta$- 相容关系 $T_{C^K}^{\theta}$ 的定义可知，$T_{C^K}^{\theta}$ 随阈值 $\theta$ 以及属性集 $C^K$ 的变化而变化，依据它们的变化规律可以得到性质 3、4.

**性质 3**　如果 $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 1$，$K_1\subseteq K\in\mathcal{L}$，那么 $T_{C^{K_1}}^{\theta_2}\subseteq T_{C^{K_1}}^{\theta_1}$.

**证**　由 $T_{C^{K_1}}^{\theta_2}=\{(x_s,x_t)\mid(x_s,x_t)\in U\times U,J_{C^{K_1}}(x_s,x_t)\geqslant\theta_2\}$，可得 $\forall(x_{s_0},x_{t_0})\in T_{C^{K_1}}^{\theta_2}$，有

$$J_{C^{K_1}}(x_{s_0}, x_{t_0}) = \left(\frac{\bigcap_1}{\bigcup_1} +, \cdots, + \frac{\bigcap_m}{\bigcup_m}\right) \times \frac{1}{m} \geqslant \theta_2$$

因此，当$\theta_1 \leqslant \theta_2$时，有

$$J_{C^{K_1}}(x_{s_0}, x_{t_0}) = \left(\frac{\bigcap_1}{\bigcup_1} +, \cdots, + \frac{\bigcap_m}{\bigcup_m}\right) \times \frac{1}{m} \geqslant \theta_1$$

得

$$T^{\theta_2}_{C^{K_1}} \subseteq T^{\theta_1}_{C^{K_1}}$$

分析性质3可以发现，保证属性集$C^K$不变，随着阈值$\theta$的增大，$\theta$-相容关系$T^{\theta}_{C^K}$形成的相容类$S^{\theta}_{C^K}$变小或者不变. 但是，尺度组合具有粗细关系时，尺度组合对应属性集形成的$\theta$-相容关系不总是具有包含关系，即性质4.

**性质4** 当$K_1 \prec K_2$时，存在$\theta \in [0, 1]$，使得$T^{\theta}_{C^{K_1}} \not\subseteq T^{\theta}_{C^{K_2}}$(通过例1来说明性质4).

**例1** $MS\text{-}IVS = (U, C)$，$U = \{x_1, x_2, \cdots, x_5\}$为对象集，$C = \{a_1, a_2, a_3\}$为条件属性集.

**表1 广义多尺度区间值信息表**

| | $a_1^1$ | $a_1^2$ | $a_2^1$ | $a_3^1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | [0.90, 0.95] | [0.85, 0.96] | [0.85, 0.93] | [0.90, 0.93] |
| $x_2$ | [0.89, 0.92] | [0.87, 0.92] | [0.84, 0.95] | [0.83, 0.91] |
| $x_3$ | [0.90, 0.93] | [0.88, 0.97] | [0.91, 0.98] | [0.94, 0.97] |
| $x_4$ | [0.91, 0.94] | [0.89, 0.94] | [0.88, 0.97] | [0.86, 0.93] |
| $x_5$ | [0.91, 0.94] | [0.66, 0.96] | [0.87, 0.95] | [0.87, 0.89] |

假设$K_1 = \{1, 1, 1\}$，$K_2 = \{2, 1, 1\}$，$K_1 \prec K_2$，$\theta = 0.6$，分别计算$S^{0.6}_{C^{K_1}}(U)$，$S^{0.6}_{C^{K_2}}(U)$，得$S^{0.6}_{C^{K_1}}(x_4) = \{x_4, x_5\}$，$S^{0.6}_{C^{K_2}}(x_4) = \{x_4\}$. 显然，$S^{0.6}_{C^{K_1}}(x_4) \not\subseteq S^{0.6}_{C^{K_2}}(x_4)$，$T^{\theta}_{C^{K_1}} \not\subseteq T^{\theta}_{C^{K_2}}$.

虽然，尺度组合具有粗细关系时，其对应属性集形成的$\theta$-相容关系不具有包含关系. 但是，任意两个对象$x_s$，$x_t$在细尺度下具有相似性，可以推出在粗尺度下也具有相似性，即性质5.

**性质5** 在$MS\text{-}IVS = (U, C)$中，对任意对象$x_s$，$x_t$，若$[\underline{a}^{I_{j_1}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{sj}] \cap [\underline{a}^{I_{j_1}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{tj}] \neq \varnothing \Rightarrow [\underline{a}^{I_{j_2}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{sj}] \cap [\underline{a}^{I_{j_2}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{tj}] \neq \varnothing$，$1 \leqslant I_{j_1} < I_{j_2} \leqslant I_j$.

**证** 设$[\underline{a}^{I_{j_1}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{sj}] \cap [\underline{a}^{I_{j_1}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{tj}] = [a, b] \neq \varnothing$，可得$[a, b] \subseteq [\underline{a}^{I_{j_1}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{sj}]$且$[a, b] \subseteq [\underline{a}^{I_{j_1}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{tj}]$. 依据定义9，在$MS\text{-}IVS = (U, C)$中，同一对象相同属性不同尺度下，属性值具有包含关系. 推出$[\underline{a}^{I_{j_1}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{sj}] \subseteq [\underline{a}^{I_{j_2}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{sj}]$且$[\underline{a}^{I_{j_1}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_1}}_{tj}] \subseteq [\underline{a}^{I_{j_2}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{tj}]$，$[a, b] \subseteq [\underline{a}^{I_{j_2}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{sj}]$且$[a, b] \subseteq [\underline{a}^{I_{j_2}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{tj}]$得

$$[\underline{a}^{I_{j_2}}_{sj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{sj}] \cap [\underline{a}^{I_{j_2}}_{tj}, \overline{a}^{I_{j_2}}_{tj}] \neq \varnothing$$

以Wu-and-Leung模型为基础，Li等[4]推广的广义多尺度信息系统，主要研究单值情形下的粗糙集近似. 由文献[6]知，尺度组合具有粗细关系时，其对应属性集构成的等价类具有包含关系. 即，随着尺度组合变粗，等价关系将对象集的划分变粗.

随着实际问题复杂性、不确定性的增强，人们描述某种现象时，有时以区间值的形式表达. 文献[24]基于Wu-and-Leung模型推广到多尺度区间信息系统，其定义方式主要从二元关系的构造考虑. 该二元关系定义方式为

$$S_C = \{(x_s, x_t) \in U \times U \mid a(x_s) \cap a(x_t) \neq \varnothing, \forall a \in C\}$$

基于此，文献[24]给出多尺度区间信息系统的概念，$\forall x_s, x_t, a_j^k \in C^k$，在$a_j^k(x_s) \cap a_j^k(x_t) \neq \varnothing$下，可推出$g_j^{k,k+1}(a_j^k(x_s)) \cap g_j^{k,k+1}(a_j^k(x_t)) \neq \varnothing$. 在该背景下，对任意$x_s$，$S_{C^k}(x_s) \subseteq S_{C^{k+1}}(x_s)$. 但在文献

[24]中未考虑尺度组合情形.

本节我们将广义多尺度信息系统推广到区间值的形式. 定义 9 的给出，主要从实际背景出发. 在实际生活中，实验人员判断某种菌类存活的适宜温度范围，若最开始划定范围为 0 ℃～100 ℃，该菌类能存活，对于第二次实验，培养菌类温度会限制在较窄的范围. 即，人们掌握确定的信息越多，描述样本特征时给出的区间值范围越精确. 反之，了解确定信息越少，给出的区间范围越宽泛. 因而在定义 9 中，细粒度下的区间值范围包含于粗粒度下的区间值范围. 但是，依据定义 11 构造的 $\theta$- 相容关系，尺度组合具有粗细关系时，尺度组合对应的属性集形成的 $\theta$- 相容关系不总具有包含关系.

## 3　广义多尺度区间值决策系统的最优尺度组合选择

本节我们依据 Wu-and-Leung 模型定义协调性的方式，给出了广义多尺度区间值决策系统协调性的定义；然后，介绍了在协调与不协调决策系统中，最优尺度组合的定义；最后，描述了获取最优尺度组合的方法.

**定义 12**　$MS\text{-}IVDS=(U, C\cup\{d\})=(U, \{a_j^k \mid k=1, 2, \cdots, I_j, j=1, 2, \cdots, m\}\cup\{d\})$ 为广义多尺度区间值决策系统. 如果 $T^{\theta}_{C^{K_0}}\subseteq R_d$，则称广义多尺度区间值决策系统 $MS\text{-}IVDS$ 为协调的，否则称 $MS\text{-}IVDS$ 为不协调的.

基于文献[6]可将 6 种分布推广到 $\theta$- 相容关系下，即

$$S^{\theta}_{C^K}(U)=\{S^{\theta}_{C^K}(x_1), S^{\theta}_{C^K}(x_2), \cdots, S^{\theta}_{C^K}(x_n)\}$$

$$L^{\theta}_{C^K}(d)=[\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_1), \underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_2), \cdots, \underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_r)]$$

$$H^{\theta}_{C^K}(d)=[\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_1), \overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_2), \cdots, \overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_r)]$$

$$\mu^{\theta}_{C^K}(x_s)=\{D[D_1/S^{\theta}_{C^K}(x_s)], D[D_2/S^{\theta}_{C^K}(x_s)], \cdots, D[D_r/S^{\theta}_{C^K}(x_s)]\}$$

$$\gamma^{\theta}_{C^K}(x_s)=\{D_{h_0}\in U/R_d \mid D[D_{h_0}/S^{\theta}_{C^K}(x_s)]=\max_{1\leqslant h\leqslant r}D[D_h/S^{\theta}_{C^K}(x_s)]\}$$

$$Bel^{\theta}_{C^K}(d)=[Bel^{\theta}_{C^K}(D_1), \cdots, Bel^{\theta}_{C^K}(D_r)]$$

$$Pl^{\theta}_{C^K}(d)=[Pl^{\theta}_{C^K}(D_1), \cdots, Pl^{\theta}_{C^K}(D_r)]$$

其中，

$$U/R_d=\{D_1, D_2, \cdots, D_r\}$$

$$Bel^{\theta}_{C^K}(D_h)=\frac{|\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)|}{|U|}$$

$$Pl^{\theta}_{C^K}(D_h)=\frac{|\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)|}{|U|}$$

$$D[D_h/S^{\theta}_{C^K}(x_s)]=\frac{|D_h\cap S^{\theta}_{C^K}(x_s)|}{|S^{\theta}_{C^K}(x_s)|}$$

$$x_s\in U \qquad 1\leqslant h\leqslant r$$

**定义 13**　设 $MS\text{-}IVDS=(U, C\cup\{d\})$ 为协调的广义多尺度区间值决策系统，如果 $MS\text{-}IVDS^K$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 协调且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}\succ K$ 且 $\widetilde{K}\neq\emptyset)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个最优尺度组合，$(K, \widetilde{K}\in\mathcal{L})$.

**定义 14**　设 $MS\text{-}IVDS=(U, C\cup\{d\})$ 为不协调的广义多尺度区间值决策系统，$K, \widetilde{K}\in\mathcal{L}$

1) 若 $L^{\theta}_{C^K}(d)=L^{\theta}_{C^{K_0}}(d)$，则称 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调. 当 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}\succ K$ 且 $\widetilde{K}\neq\emptyset)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不是下分布协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个下分布最优尺度组合.

2) 若 $H^{\theta}_{C^K}(d)=H^{\theta}_{C^{K_0}}(d)$，则称 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调. 当 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不是上分布协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个上分布最优尺度组合.

3) 若 $\mu^{\theta}_{C^K}(x_s)=\mu^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)$，则称 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 概率分布协调. 当 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 概率分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不是概率分布协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个概率分布最优尺度组合.

4) 若 $\gamma^{\theta}_{C^K}(x_s)=\gamma^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)$，则称 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 最大分布协调. 当 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 最大分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不是最大分布协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个最大分布最优尺度组合.

5) 若 $Bel^{\theta}_{C^K}(d)=Bel^{\theta}_{C^{K_0}}(d)$，则称 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调. 当 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不是信任分布协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个信任分布最优尺度组合.

6) 若 $Pl^{\theta}_{C^K}(d)=Pl^{\theta}_{C^{K_0}}(d)$，则称 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 似然分布协调. 当 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 似然分布协调并且对所有 $\widetilde{K}(\widetilde{K}>K$ 且 $\widetilde{K}\neq\varnothing)$，$MS\text{-}IVDS^{\widetilde{K}}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 都不是似然分布协调，则称 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个似然分布最优尺度组合.

依据定义 13 可以得到下面的命题 1,2,3.

**命题 1** 如果 $K_1\prec K_2$ 且 $MS\text{-}IVDS^{K_2}$ 相对于 $MS\text{-}IVDS$ 协调，那么 $K_1$ 不是最优尺度组合.

**命题 2** 如果 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个最优尺度组合，那么比 $K\prec\widetilde{K}$ 或 $K\succ\hat{K}$ 的 $\widetilde{K}$ 与 $\hat{K}$，都不是 $MS\text{-}IVDS$ 的最优尺度组合.

**命题 3** 若最粗的尺度组合 $I=(I_1,I_2,\cdots,I_m)$ 对应决策系统为协调的，那么尺度组合 $I$ 为决策系统的最优尺度组合.

**注 1** 命题 1,2,3 是在协调的 $MS\text{-}IVDS$ 中讨论，若背景换为不协调广义多尺度区间值决策系统，3 个命题也适用.

分析 3 个命题可以得知，如果尺度组合 $K$ 对应决策系统为协调的，那么比 $K$ 细的所有尺度组合对应的决策系统，无论是否是协调的，这些尺度组合都不会是最优尺度组合. 即，在协调的 $MS\text{-}IVDS$ 中希望找到使决策系统达到协调的最粗尺度组合，在不协调的 $MS\text{-}IVDS$ 中挑出与最细尺度组合 $K_0$ 在某种标准下具有相同信息量的最粗尺度组合.

因此，在挑选最优尺度组合时，可以先验证最粗尺度组合 $I$，对应决策系统的协调性. 如果是协调的，那么 $I$ 是最优尺度组合. 虽然尺度组合 $I$ 对应决策系统中的数据是最粗的情况，但它可以保持与最细尺度组合对应的决策系统含有的某种信息量相同.

依据命题 1，若尺度组合 $K$ 对应决策系统为协调的，那么比 $K$ 细的所有尺度组合 $\hat{K}$ 均不是最优尺度组合. 因而，下面定义 15,16 是希望找到一些能够排除其他尺度组合不是最优尺度组合的尺度组合.

**定义 15** $I=(I_1,\cdots,I_j,\cdots,I_m)$ 为 $\mathcal{L}$ 中最粗的尺度组合，$j=1,2,\cdots,m$.

1) 对任意 $I_j$，如果 $I_j$ 为偶数，则取 $I_j$ 的一半. 而其他是奇数的指数不改变，从而得到尺度组合 $Q_1=(I_1,\cdots,I_j/2,\cdots,I_m)\in\mathcal{L}$；

2) 对任意 $I_j$，如果 $I_j$ 为奇数，则取 $(I_j+1)$ 的一半. 而其他是偶数的指数不改变，从而得到尺度组合 $Q_2=(I_1,\cdots,(I_j+1)/2,\cdots,I_m)\in\mathcal{L}$，设 $Q=\{Q_1,Q_2\}$.

**定义 16** 对任意 $K\in\mathcal{L}$，比 $K$ 严格细的所有尺度组合 $K^{\downarrow}$ 组成集合表示为 $Fine(K)=\{K^{\downarrow}\mid K^{\downarrow}\prec K\}$，不能与 $K$ 比较粗细的尺度组合所组集合表示为 $Nc(K)=\{K^{\rightarrow}\mid K^{\rightarrow}\nprec K,K^{\rightarrow}\nsucc K\}$.

下面是获取不协调广义多尺度区间值决策系统最优尺度组合的算法.

**算法 1**　获取不协调 $MS\text{-}IVDS$ 中最优尺度组合算法.

输入：不协调 $MS\text{-}IVDS$，$\mathcal{L}=\{(l_1, l_2, \cdots, l_m) \mid 1\leqslant l_j\leqslant I_j, j=1, 2, \cdots, m\}$，$I=(I_1, \cdots, I_j, \cdots, I_m)$，$K_0=(1, 1, \cdots, 1)_{1\times m}$，$Q=\{Q_1, Q_2\}$，$i=1, 2$.

输出：最优尺度组合 OSC

第 1 步：

**if** $MS\text{-}IVDS^{C^I}$ is consistent probability distribution **then**

break;

**end**

第 2 步：

OSC $\leftarrow \varnothing$

**for** every $Q_i$ in $Q$ **do**

**if** $MS\text{-}IVDS^{Q_i}$ is inconsistent probability distribution **then**

$$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} - Q_i$$

**end**

**if** $MS\text{-}IVDS^{Q_i}$ is consistent probability distribution **then**

$$OSC \leftarrow Q_i$$

$$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} - \mathrm{Fine}(Q_i) - Q_i$$

**end**

**end**

第 3 步：

$Nc(Q)=\{Nc(Q_1), Nc(Q_2)\}$

**for** every $Q^{\rightarrow}$ in $Nc(Q)$ **do**

**if** $Nc(Q)=\varnothing$ **then**

break;

**else**

**if** $MS\text{-}IVDS^{Q^{\rightarrow}}$ is inconsistent probability distribution **then**

$$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} - Q^{\rightarrow}$$

$$Nc(Q) \leftarrow Nc(Q) - Q^{\rightarrow}$$

**end**

**if** $MS\text{-}IVDS^{Q^{\rightarrow}}$ is consistent probability distribution **then**

$$OSC \leftarrow OSC \cup \{Q^{\rightarrow}\}$$

$$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} - \mathrm{Fine}(Q^{\rightarrow}) - Q^{\rightarrow}$$

$$Nc(Q) \leftarrow Nc(Q) - \mathrm{Fine}(Q^{\rightarrow}) - Q^{\rightarrow}$$

**end**

**end**

**end**

**end**

第 4 步：

**for** every $L$ in $\mathcal{L}$ **do**

**if** $MS\text{-}IVDS^{L}$ is inconsistent probability distribution **then**

$$\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} - L$$

**end**

**end**

第 5 步：

$OSC \leftarrow OSC \cup \mathcal{L}$

**for** every csc in $OSC$ **do**

**if** there is an element $osc \in OSC$ and $osc \prec csc$ **then**

$OSC \leftarrow OSC - osc$

**end**

**end**

第 6 步：

**return** $OSC$

## 4　$\boldsymbol{\theta}$ 变化与广义多尺度区间值决策系统最优尺度组合之间的关系

**性质 6**　设 $MS\text{-}IVDS=(U, C\cup\{d\})$ 为广义多尺度区间值决策系统，记 $\theta\in[0,1]$，$K=(l_1, l_2, \cdots, l_m)\in\mathcal{L}$，$U/R_d=\{D_1, D_2, \cdots, D_r\}$，令

$$\theta_{C^{K_0}}=\max_{1\leqslant t\leqslant n}\{\max_{1\leqslant s\leqslant n}(J_{C^{K_0}}(x_s, x_t): s\neq t, x_s, x_t\in U)\}$$

当 $\theta\in(\theta_{C^{K_0}}, 1)$ 时

1）$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调；

2）$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调；

3）$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 似然分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调.

**证**　1）一方面，若 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调，推出 $\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=\overline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由于 $\theta\in(\theta_{C^{K_0}}, 1)$，获得 $\forall x_s\in U$，$S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\{x_s\}$，$\overline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)=D_h=\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)$ 且 $\underline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)=D_h$. 下证，$\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由下近似定义可以推出：$\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)\subseteq D_h$. 下面，采用反证法，证明 $D_h\subseteq\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)$，假设存在 $\tilde{h}$，使 $D_{\tilde{h}}\not\subseteq\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})$，即存在 $x_t$，使得 $x_t\in D_{\tilde{h}}$，$x_t\notin\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})$. 可得，$S^{\theta}_{C^K}(x_t)\not\subseteq D_{\tilde{h}}$，$\exists x_{\tilde{t}}$，$x_{\tilde{t}}\in S^{\theta}_{C^K}(x_t)$，$x_{\tilde{t}}\notin D_{\tilde{h}}$. 依据对称性 $x_t\in S^{\theta}_{C^K}(x_{\tilde{t}})$，$S^{\theta}_{C^K}(x_{\tilde{t}})\cap D_{\tilde{h}}\neq\varnothing$，$x_{\tilde{t}}\in\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})$. 由于，$\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h$，所以 $x_{\tilde{t}}\in D_{\tilde{h}}$，与 $x_{\tilde{t}}\notin D_{\tilde{h}}$ 矛盾. $\forall x_t\in D_{\tilde{h}}$，$x_t\in\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})$，可得 $\forall h$，$D_h\subseteq\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)$. 综上 $\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h$，$\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=\underline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)=D_h$，$1\leqslant h\leqslant r$，故 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调.

另一方面，若 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调，$\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=\underline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由于，$\theta\in(\theta_{C^{K_0}}, 1)$，$\forall x_s\in U$，$S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\{x_s\}$，获得 $\underline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)=D_h=\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)$ 且 $\overline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)=D_h$. 下证，$\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由上近似定义可以推出：$D_h\subseteq\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)$. 再证，$\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)\subseteq D_h$，采用反证法. 假设存在 $\tilde{h}$，使得 $\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})\not\subseteq D_{\tilde{h}}$，即存在 $x_t$，使得 $x_t\in\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})$，$x_t\notin D_{\tilde{h}}$. $S^{\theta}_{C^K}(x_t)\cap D_{\tilde{h}}\neq\varnothing$ 且 $S^{\theta}_{C^K}(x_t)\cap D_{\tilde{h}}\neq x_t$，推出 $\exists x_{\tilde{t}}$，$x_{\tilde{t}}\in S^{\theta}_{C^K}(x_t)$ 且 $x_{\tilde{t}}\in D_{\tilde{h}}$. 依据对称性，$x_t\in S^{\theta}_{C^K}(x_{\tilde{t}})$，由上知，对任意 $h$，$\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h$，有 $\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})=D_{\tilde{h}}$，$x_{\tilde{t}}\in\underline{S^{\theta}_{C^K}}(D_{\tilde{h}})$，$S^{\theta}_{C^K}(x_{\tilde{t}})\subseteq D_{\tilde{h}}$. $x_t\in D_{\tilde{h}}$，与 $x_t\notin D_{\tilde{h}}$ 矛盾，$\forall h$，$\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)\subseteq D_h$，$\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h$，可得 $\overline{S^{\theta}_{C^K}}(D_h)=D_h=\overline{S^{\theta}_{C^{K_0}}}(D_h)$，$1\leqslant h\leqslant r$. 综上，$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调.

2）一方面，若 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调，$\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)|}{|U|}=\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)|}{|U|}$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由于，$\theta\in(\theta_{C^{K_0}},1)$，$\forall x_s\in U$，$S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\{x_s\}$，$\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)=D_h$，$\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)|}{|U|}=\dfrac{|D_h|}{|U|}=\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)|}{|U|}$. 下证，$\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)=D_h$，由下近似定义可知：$\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)\subseteq D_h$，再证 $D_h\subseteq\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)$. 假设存在 $\tilde{h}$，使得 $D_{\tilde{h}}\nsubseteq \underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_{\tilde{h}})$，即，存在 $\tilde{x}_s\in D_{\tilde{h}}$，$\tilde{x}_s\notin\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_{\tilde{h}})$，依据下近似定义，$S^{\theta}_{C^K}(\tilde{x}_s)\nsubseteq D_{\tilde{h}}$，$|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_{\tilde{h}})|=|\{x_s\mid S^{\theta}_{C^K}(x_s)\subseteq D_{\tilde{h}}\}|<|D_{\tilde{h}}|$，$\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_{\tilde{h}})|}{|U|}\neq\dfrac{|D_{\tilde{h}}|}{|U|}$，与 $\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)|}{|U|}=\dfrac{|D_h|}{|U|}$，$1\leqslant h\leqslant r$ 矛盾. $\forall 1\leqslant h\leqslant r$，$\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)=D_h$，$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调.

另一方面，若 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调，由定义 14 推出 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调.

3）同理可证 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 似然分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调.

**性质 7**　设 $MS\text{-}IVDS=(U,C\cup\{d\})$ 为广义多尺度区间值决策系统，记 $\theta\in[0,1]$，$K\in\mathcal{L}$，$U/R_d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，令

$$\tilde{\theta}_{C^{K_0}}=\min_{1\leqslant t\leqslant n}\{\min_{1\leqslant s\leqslant n}(J_{C^{K_0}}(x_s,x_t):x_s,x_t\in U)\}$$

当 $\theta\in[0,\tilde{\theta}_{C^{K_0}}]$ 时

1）$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调；

2）$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 似然分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调.

**证**　1）一方面，若 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调，$\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)|}{|U|}=\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)|}{|U|}$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由于 $\theta\in[0,\tilde{\theta}_{C^{K_0}}]$，$\forall x_s\in U$，$S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 将 $U/R_d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$ 分两种情况.

① $D_1=D_2=\cdots=D_r=U$，$r=1$. $\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_1)=U$，$\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_1)|}{|U|}=\dfrac{|U|}{|U|}=\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_1)|}{|U|}$. 由于 $D_1=U$，$\forall x_s\in U$，$S^{\theta}_{C^K}(x_s)\subseteq S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)\subseteq D_1$，$\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_1)=U$，$\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_1)=\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_1)$.

② 对任意 $D_h\neq U$，$1\leqslant h\leqslant r$. 由于 $S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$x_s\in U$，得 $\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)=\varnothing$，$\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)|}{|U|}=\dfrac{0}{|U|}=\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)|}{|U|}$，由 $\dfrac{|\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)|}{|U|}=\dfrac{0}{|U|}$，可知，对任意 $x_s\in U$，$S^{\theta}_{C^K}(x_s)\nsubseteq[x_s]_{R_d}$. $\underline{S}^{\theta}_{C^{K_0}}(D_h)=\underline{S}^{\theta}_{C^K}(D_h)=\varnothing$，即 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调. 由定义 14，$MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 下分布协调 $\Rightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 信任分布协调.

2）同理可证 $MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 似然分布协调 $\Leftrightarrow MS\text{-}IVDS^K$ 关于 $MS\text{-}IVDS$ 上分布协调.

**推论 1**　在广义多尺度区间值决策系统 $MS\text{-}IVDS=(U,C\cup\{d\})$ 中，对任意 $\theta\in[0,\tilde{\theta}_{C^{K_0}}]$，若 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个下分布最优尺度组合 $\Leftrightarrow K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个信任分布最优尺度组合，若 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个上分布最优尺度组合 $\Leftrightarrow K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个似然分布最优尺度组合. 对任意 $\theta\in(\theta_{C^{K_0}},1)$，若 $K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个上分布最优尺度组合 $\Leftrightarrow K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个下分布最优尺度组合 $\Leftrightarrow K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个似然分布最优尺度组合 $\Leftrightarrow K$ 是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个信任分布最优尺度组合.

**性质 8**　在不协调 $MS\text{-}IVDS=(U,C\cup\{d\})$ 中，记 $\theta\in[0,1]$，$K\in\mathcal{L}$，$U/R_d=\{D_1,\cdots,D_r\}$. 任

取一个 $\theta$ 值，得到 $MS\text{-}IVDS$ 的最优尺度组合，用集合 $K^*$ 表示 $K^*=\{K_1,\cdots,K_w,\cdots,K_W\}$，比最优尺度组合 $K_w$ 粗的所有尺度组合表示 $\mathrm{Crude}(K_w)=\{K_{w_1},K_{w_2},\cdots,K_{w_p}\}$，依据属性集 $C^K$ 构造的关系矩阵用 $A^K$ 表示，$A^K$ 中每一个元素表示为 $\alpha_{st}^{A^K}$，$A_w=\{A^{K_0},A^{K_w},A^{\mathrm{Crude}(K_w)}\}$.

1）如果

$$\tilde{\theta}\in(\max\{\min_{A\in A_w}\{\alpha_{st}^A,\theta\}\},\min\{\max_{A\in A_w}\{\alpha_{st}^A,\theta\}\}]$$

$(s,t=1,2,\cdots,m)$，则 $K_w$ 保持是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个最优尺度组合.

2）如果

$$\hat{\theta}\in\bigcap_{1\leqslant w\leqslant W}(\max\{\min_{A\in A_w}\{\alpha_{st}^A,\theta\}\},\min\{\max_{A\in A_w}\{\alpha_{st}^A,\theta\}\}]$$

则 $K^*$ 中的任一个尺度组合也保持是 $MS\text{-}IVDS$ 的最优尺度组合.

(下面保持概率分布协调，获取最优尺度组合).

**证** 任取一个 $\theta$ 值，经过算法 1 获取 $MS\text{-}IVDS$ 中的最优尺度组合，用 $K^*=\{K_1,\cdots,K_w,\cdots,K_W\}$ 表示. 对象 $x_s$ 关于尺度组合 $K_0$，$K_w$ 以及比 $K_w$ 粗的所有尺度组合 $\mathrm{Crude}(K_w)$ 分别关于决策类 $U/R_d$ 的概率分布值为 $\mu_{C^{K_0}}^{\theta}(x_s)=\{v_{C^{K_0}}^1,v_{C^{K_0}}^2,\cdots,v_{C^{K_0}}^r\}$，$s=1,2,\cdots,n$.

$$\mu_{C^{K_w}}^{\theta}(x_s)=\{v_{C^{K_w}}^1,v_{C^{K_w}}^2,\cdots,v_{C^{K_w}}^r\}$$

$$\mu_{C^{K_{w_1}}}^{\theta}(x_s)=\{v_{C^{K_{w_1}}}^1,v_{C^{K_{w_1}}}^2,\cdots,v_{C^{K_{w_1}}}^r\}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{C^{K_{w_p}}}^{\theta}(x_s)=\{v_{C^{K_{w_p}}}^1,v_{C^{K_{w_p}}}^2,\cdots,v_{C^{K_{w_p}}}^r\}$$

根据定义 14，对任意 $x_s\in U$，$\mu_{C^{K_0}}^{\theta}(x_s)=\mu_{C^{K_w}}^{\theta}(x_s)$. 同时，存在对象使得比 $K_w$ 粗的任一个尺度组合与最细尺度组合 $K_0$ 对应决策系统的概率分布值不相等. 在概率分布定义中 $D[D_h/S_{C^K}^{\theta}(x_s)]=\dfrac{|D_h\cap S_{C^K}^{\theta}(x_s)|}{|S_{C^K}^{\theta}(x_s)|}$，$D[D_h/S_{C^K}^{\theta}(x_s)]$ 的取值随 $D_h$ 与 $S_{C^K}^{\theta}(x_s)$ 中元素变化而变化，$h=1,2,\cdots,r$，$s=1,2,\cdots,m$. 而 $\theta$ 的变化会改变 $S_{C^K}^{\theta}(x_s)$ 中元素，不会改变 $D_h$ 中元素. 可知，$S_{C^K}^{\theta}(x_s)$ 中的元素满足 $J_{C^K}(x_s,x_t)\geqslant\theta$，$x_s,x_t\in U$.

1）若存在 $x_{\dot t}$ 使得 $J_{C^K}(x_s,x_{\dot t})<\theta$，那么，$\tilde{\theta}$ 取 $J_{C^K}(x_s,x_t)$ 中最小值与 $J_{C^K}(x_s,x_{\dot t})$ 中最大值之间的数时，不会改变 $S_{C^K}^{\theta}(x_s)$ 中的元素(在下面用 $\alpha_{st}^K$ 表示 $J_{C^K}(x_s,x_t)$). 设 $\beta^K=\{\alpha_{st}^K:\alpha_{st}^K\geqslant\theta\}$，$\tilde{\beta}^K=\{\alpha_{s\dot t}^K:\alpha_{s\dot t}^K<\theta\}$ 取 $\overline{\theta}_{C^K}=\min\beta^K=\min\{\alpha_{st}^K:\alpha_{st}^K\geqslant\theta\}$，$\underline{\theta}_{C^K}=\max\tilde{\beta}^K=\max\{\alpha_{s\dot t}^K:\alpha_{s\dot t}^K<\theta\}$. 因而，$\tilde{\theta}$ 取 $(\underline{\theta}_{C^K},\overline{\theta}_{C^K}]$ 中的值时不会改变 $S_{C^K}^{\theta}(x_s)$ 中的元素，$\mu_{C^K}^{\theta}(x_s)$ 的取值也不发生改变. 那么，尺度组合 $K_0$，$K_w$ 以及 $\mathrm{Crude}(K_w)$ 分别可以得到关于 $\theta$ 的取值，$(\underline{\theta}_{C^{K_0}},\overline{\theta}_{C^{K_0}}]$、$(\underline{\theta}_{C^{K_w}},\overline{\theta}_{C^{K_w}}]$、$(\underline{\theta}_{C^{\mathrm{Crude}(K_w)}},\overline{\theta}_{C^{\mathrm{Crude}(K_w)}}]$，将这 3 个区间取交运算后得到区间范围 $(\underline{\theta},\overline{\theta}]$. 在这里，$(\underline{\theta}_{C^{\mathrm{Crude}(K_w)}},\overline{\theta}_{C^{\mathrm{Crude}(K_w)}}]=(\underline{\theta}_{C^{K_{w_1}}},\overline{\theta}_{C^{K_{w_1}}}]\cap\cdots\cap(\underline{\theta}_{C^{K_{w_p}}},\overline{\theta}_{C^{K_{w_p}}}]$.

由上证明过程，$\tilde{\theta}\in(\underline{\theta},\overline{\theta}]$ 时，可得

$$S_{C^{K_0}}^{\theta}(x_s)=S_{C^{K_0}}^{\tilde{\theta}}(x_s)$$

$$S_{C^{K_w}}^{\theta}(x_s)=S_{C^{K_w}}^{\tilde{\theta}}(x_s)$$

$$S_{C^{K_{w_1}}}^{\theta}(x_s)=S_{C^{K_{w_1}}}^{\tilde{\theta}}(x_s)$$

$$\vdots$$

$$S^{\theta}_{C^{K_{w_p}}}(x_s)=S^{\tilde{\theta}}_{C^{K_{w_p}}}(x_s),\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

因而，可得

$$\mu^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\mu^{\tilde{\theta}}_{C^{K_0}}(x_s)$$

$$\mu^{\theta}_{C^{K_w}}(x_s)=\mu^{\tilde{\theta}}_{C^{K_w}}(x_s)$$

$$\mu^{\theta}_{C^{K_{w_1}}}(x_s)=\mu^{\tilde{\theta}}_{C^{K_{w_1}}}(x_s)$$

$$\vdots$$

$$\mu^{\theta}_{C^{K_{w_p}}}(x_s)=\mu^{\tilde{\theta}}_{C^{K_{w_p}}}(x_s),\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

再根据，$\mu^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=\mu^{\theta}_{C^{K_w}}(x_s)$，推出

$$\mu^{\tilde{\theta}}_{C^{K_0}}(x_s)=\mu^{\tilde{\theta}}_{C^{K_w}}(x_s)\qquad s=1,2,\cdots,n$$

可知取 $\theta$ 时，存在对象，使得比 $K_w$ 粗的任一个尺度组合与最细尺度组合 $K_0$ 对应决策系统的概率分布值不相等，因而，取 $\tilde{\theta}$ 也成立．依据定义 14，$K_w$ 保持是 *MS-IVDS* 的一个最优尺度组合．

2）若不存在 $x_t\in U$，使得 $J(x_s,\ x_t)<\theta$，那么可得 0 到 $J_{C^K}(x_s,\ x_t)$ 的最小值之间，不会改变 $S^{\theta}_{C^K}(x_s)$ 中的元素．同 1）证明过程，尺度组合 $K_0$，$K_w$ 以及 Crude($K_w$) 也分别可以得到一个区间使得 $S^{\theta}_{C^K_0}(x_s)$、$S^{\theta}_{C^{K_w}}(x_s)$、$S^{\theta}_{C^{\text{Crude}(K_w)}}(x_s)(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 中元素不发生改变．然后取交运算，也可以得到一个区间，$\theta$ 在这个区间范围内变化，$K_w$ 保持是 *MS-IVDS* 的一个最优尺度组合．

2）由 1）知 $\tilde{\theta}\in(\max\{\min\limits_{A\in A_w}\{\alpha^A_{st},\ \theta\}\},\ \min\{\max\limits_{A\in A_w}\{\alpha^A_{st},\ \theta\}\}]$，$K^*$ 中的 $K_w$ 保持是 *MS-IVDS* 的一个最优尺度组合．若 $K^*$ 中的任一个尺度组合也保持是 *MS-IVDS* 的最优尺度组合，则需遍历 $K^*$ 中每一个元素，即

$$\hat{\theta}\in\bigcap_{1\leqslant w\leqslant W}(\max\{\min_{A\in A_w}\{\alpha^A_{st},\ \theta\}\},\ \min\{\max_{A\in A_w}\{\alpha^A_{st},\ \theta\}\}]$$

**注 2**　在性质 8 证明过程中，当 $\tilde{\theta}\in(\underline{\theta},\ \overline{\theta}]$ 时，可得

$$S^{\theta}_{C^{K_0}}(x_s)=S^{\tilde{\theta}}_{C^{K_0}}(x_s)$$

$$S^{\theta}_{C^{K_w}}(x_s)=S^{\tilde{\theta}}_{C^{K_w}}(x_s)$$

$$S^{\theta}_{C^{K_{w_1}}}(x_s)=S^{\tilde{\theta}}_{C^{K_{w_1}}}(x_s)$$

$$\vdots$$

$$S^{\theta}_{C^{K_{w_p}}}(x_s)=S^{\tilde{\theta}}_{C^{K_{w_p}}}(x_s),\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

说明 $\tilde{\theta}\in(\underline{\theta},\ \overline{\theta}]$ 时，可以保证每一对象关于尺度组合 $K_0$，$K_w$ 以及 Crude($K_w$) 对应条件属性集形成的相容类与取 $\theta$ 时一致．因此，性质 8 也可以保持最大分布协调、上分布协调、下分布协调、似然分布协调、信任分布协调得到关于 $\theta$ 的区间范围．

文献[6]中，分别讨论了在协调与不协调广义多尺度决策系统中获得的最优尺度组合之间的关系．在协调背景下，保持信任分布协调、似然分布协调、下分布协调、上分布协调获取最优尺度组合相同；在不协调背景下，保持似然分布协调与保持上分布协调获得的最优尺度组合相同、保持信任分布协调与保持下分布协调获得的最优尺度组合相同．在本节内容中，当阈值 $\theta\in(\theta_{C^{K_0}},\ 1)$ 时，对应广义多尺度区间值决策系统为协调的，此时保持上述四种分布获取最优尺度组合也均是相同的；当 $\theta\in[0,\ \tilde{\theta}_{C^{K_0}}]$ 时，广义多尺度区

间值决策系统可以对应协调的也可以对应不协调的情形，而此时保持似然分布协调与保持上分布协调获得的最优尺度组合相同、保持信任分布协调与保持下分布协调获得的最优尺度组合也相同. 不同之处：任取一个 $\theta$ 值可以找到关于该值的区间范围，阈值在区间内变化最优尺度组合不发生改变.

## 5 实验验证与分析

基于文献[26]中，依据西瓜属性判断西瓜好坏的背景，构造了一个广义多尺度区间值决策系统 $MS\text{-}IVDS=(U, C\cup\{d\})$. 其中，对象集 $U=\{x_1, \cdots, x_5\}$，表示5种不同品种的西瓜，$C=\{a_1, a_2, a_3\}$ 为条件属性集，分别表示西瓜的色泽、根蒂、纹理. $d$ 表示专家判断这5种西瓜是否是好瓜，0代表不是好瓜、1代表是好瓜(表2).

条件属性的尺度粗细表现在不同数量的西瓜样本，检测样本数量越多尺度越细，样本数量越少尺度越粗. 条件属性取值取决于西瓜在某个特征上好的可能性程度. 在概率论中，固定置信水平，检测样本数量越多，所能提供的信息就越多，但耗费人力、物力就越多. 因此，可以利用挑选最优尺度组合的思想，在得到相同信息量的前提下，尽可能采用较少的西瓜样本.

**表2 检测5种西瓜是否是好瓜的决策表**

| | $a_1^1$ | $a_1^2$ | $a_2^1$ | $a_2^2$ | $a_3^1$ | $a_3^2$ | $a_3^3$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | [0.90, 0.95] | [0.85, 0.96] | [0.88, 0.92] | [0.85, 0.93] | [0.90, 0.93] | [0.89, 0.95] | [0.89, 0.97] | 0 |
| $x_2$ | [0.89, 0.92] | [0.87, 0.92] | [0.86, 0.94] | [0.84, 0.95] | [0.83, 0.91] | [0.81, 0.92] | [0.79, 0.95] | 0 |
| $x_3$ | [0.90, 0.93] | [0.88, 0.97] | [0.93, 0.97] | [0.91, 0.98] | [0.94, 0.97] | [0.93, 0.98] | [0.85, 0.99] | 1 |
| $x_4$ | [0.91, 0.94] | [0.89, 0.94] | [0.91, 0.93] | [0.88, 0.97] | [0.86, 0.93] | [0.84, 0.93] | [0.84, 0.94] | 1 |
| $x_5$ | [0.91, 0.95] | [0.88, 0.96] | [0.91, 0.93] | [0.87, 0.95] | [0.87, 0.89] | [0.87, 0.93] | [0.80, 0.94] | 0 |

当 $\theta=0.6$ 时，依据算法1得到 $MS\text{-}IVDS$ 的最优尺度组合 $(a_1^2, a_2^1, a_3^3)$，$(a_1^1, a_2^2, a_3^1)$.

通过最优尺度组合的结果可以发现，在保持概率分布一致的前提下，检测西瓜根蒂的数量最多，色泽和纹理的数量最少时，与分别检测这3种属性取最多西瓜数量时的信息量相同. 或者，检测色泽和纹理的西瓜数量最多，西瓜根蒂的数量最少时，也可以得到相同的信息量.

依据推论1，当 $\theta\in[0, 0.13]$ 时，$MS\text{-}IVDS$ 获得的信任分布最优尺度组合与下分布最优尺度组合相同，似然分布最优尺度组合与上分布最优尺度组合相同. 当 $\theta\in(0.68, 1)$ 时，获得的上分布、下分布、信任分布、似然分布最优尺度组合相同.

依据性质8.1可以得到 $\theta\in(0.59, 0.68]$ 时，$(a_1^2, a_2^1, a_3^3)$ 保持是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个概率分布最优尺度组合. $\theta\in(0.59, 0.61]$，$(a_1^1, a_2^2, a_3^1)$ 也保持是 $MS\text{-}IVDS$ 的一个概率分布最优尺度组合. 依据性质8.2，$\theta\in(0.59, 0.61]$ 时，这两个尺度组合均是 $MS\text{-}IVDS$ 的概率分布最优尺度组合.

多尺度信息系统是单尺度信息系统的扩展，它可以从不同角度、不同层次描述现象、分析问题，呈现出从细粒度到粗粒度的一种规律. 本研究基于广义多尺度信息系统，定义了广义多尺度区间值信息系统的概念并构造了 $\theta$-相容关系. 讨论了 $\theta$ 的取值范围，使关于 $MS\text{-}IVDS$ 的4种分布协调性相互等价. 证明了任取一个 $\theta$ 值，可以找到关于 $\theta$ 的区间范围，$\theta$ 在区间范围内变化，最优尺度组合不发生改变. 在未来的工作中需要考虑如何找到 $\theta$ 的取值范围，使尺度组合具有粗细关系时，$\theta$-相容类具有包含关系.

**参考文献：**

[1] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] PAWLAK Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data [M]. Boston, USA: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] WU W Z, LEUNG Y. Theory and Applications of Granular Labelled Partitions in Multi-scale Decision Tables [J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897.

[4] LI F, HU B Q. A New Approach of Optimal Scale Selection to Multi-Scale Decision Tables [J]. Information Sciences,

2017，381：193-208.

[5] WU W Z，LEUNG Y. Optimal Scale Selection for Multi-Scale Decision Tables [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2013，54(8)：1107-1129.

[6] WU W Z，LEUNG Y. A Comparison Study of Optimal Scale Combination Selection in Generalized Multi-Scale Decision Tables [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2020，11(5)：961-972.

[7] GU S M，WU W Z. On Knowledge Acquisition in Multi-Scale Decision Systems [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2013，4(5)：477-486.

[8] BAO H，WU W Z，ZHENG J W，et al. Entropy Based Optimal Scale Combination Selection for Generalized Multi-Scale Information Tables [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2021，12(5)：1427-1437.

[9] HUANG B，LI H X，FENG G F，et al. Dominance-Based Rough Sets in Multi-Scale Intuitionistic Fuzzy Decision Tables [J]. Applied Mathematics and Computation，2019，348：487-512.

[10] SHE Y H，LI J H，YANG H L. A Local Approach to Rule Induction in Multi-Scale Decision Tables [J]. Knowledge-Based Systems，2015，89：398-410.

[11] CHENG Y L，ZHANG Q H，WANG G Y，et al. Optimal Scale Selection and Attribute Reduction in Multi-Scale Decision Tables Based on Three-Way Decision [J]. Information Sciences，2020，541：36-59.

[12] LI F，HU B Q，WANG J. Stepwise Optimal Scale Selection for Multi-Scale Decision Tables Via Attribute Significance [J]. Knowledge-Based Systems，2017，129：4-16.

[13] HAO C，LI J H，MIN F，et al. Optimal Scale Selection in Dynamic Multi-Scale Decision Tables Based on Sequential Three-Way Decisions [J]. Information Sciences，2017，415：213-232.

[14] HUANG Z H，LI J J，DAI W Z，et al. Generalized Multi-Scale Decision Tables with Multi-Scale Decision Attributes [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2019，115：194-208.

[15] DAI J H，WANG W T，MI J S. Uncertainty Measurement for Interval-Valued Information Systems [J]. Information Sciences，2013，251(4)：63-78.

[16] DAI J H，HU H，ZHENG G J，et al. Attribute Reduction in Interval-Valued Information Systems Based on Information Entropies [J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering，2016，17(9)：919-928.

[17] HUANG B，ZHUANG Y L，LI H X. Information Granulation and Uncertainty Measures in Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Information Systems [J]. European Journal of Operational Research，2013，231(1)：162-170.

[18] HUANG B，WEI D K，LI H X，et al. Using a Rough Set Model to Extract Rules in Dominance-Based Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Information Systems [J]. Information Sciences，2013，221：215-229.

[19] ZHANG H Y，ZHANG W X，WU W Z. On Characterization of Generalized Interval-Valued Fuzzy Rough Sets on Two Universes of Discourse [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2009，51(1)：56-70.

[20] HU B Q. Generalized Interval-Valued Fuzzy Variable Precision Rough Sets Determined By Fuzzy Logical Operators [J]. International Journal of General Systems，2015，44(7-8)：849-875.

[21] XIE B，LI L J，MI J S. A Novel Approach for Ranking in Interval-Valued Information Systems [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，2016，30(1)：523-534.

[22] LIN B Y，XU W H. Multi-Granulation Rough Set for Incomplete Interval-Valued Decision Information Systems Based on Multi-Threshold Tolerance Relation [J]. Symmetry-Basel，2018，10(6)：208.

[23] ZHANG C，LI D Y，LIANG J Y. Interval-Valued Hesitant Fuzzy Multi-Granularity Three-Way Decisions in Consensus Processes with Applications to Multi-Attribute Group Decision Making [J]. Information Sciences，2020，511：192-211.

[24] GU S M，WAN Y H，WU W Z，et al. Rough Set Approximations in Multi-Scale Interval Information Systems [C] // Proc of the 2015 RSFDGrC on Springer-Verlag Berlin. Jeju Island：2015：73-81.

[25] 吴伟志，杨玉芳. 空间遥感数据的多粒度标记分类 [J]. 计算机科学，2012，39(4)：23-27.

[26] 周志华. 机器学习 [M]. 北京：清华大学出版社，2016：30-47.

**责任编辑**　欧宾