

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2024.05.005

常瑜珠, 万青, 张娟娟. 基于直观图的(三支)近似概念获取研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2024, 46 (5): 51-66.

基于直观图的(三支)近似概念获取研究

常瑜珠¹, 万青^{1,2}, 张娟娟¹

1. 西安工程大学 理学院, 西安 710048; 2. 西北大学 概念、认知与智能研究中心, 西安 710127

摘要: 不完备背景是形式概念分析中的一类重要数据类型, (三支)近似概念是通过(三支)近似算子在不完备背景中提取的具有某种意义的共有信息. 针对不完备背景, 该文基于直观图从格同构和近似算子两个角度研究了(三支)近似概念的获取方法. 对于两类三支近似概念, 一方面借助两类三支近似概念格与某些特定形式背景概念格的同构关系, 基于这些特定形式背景的直观图给出相应的获取方法; 另一方面, 基于三支近似算子定义的三支近似直观图直接给出相应的获取方法. 对于近似概念, 证明了存在某种特定形式背景的概念格与近似概念格同构, 在此基础上采用与研究三支近似概念获取方法相同的方式给出相应的获取方法.

关键词: 不完备背景; 三支近似概念; 近似概念; 三支近似直观

图; 近似直观图

中图分类号: TP18

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



文章编号: 1673-9868(2024)05-0051-16

(Three-Way) Approximate Concept Acquisition Based on Pictorial Diagrams

CHANG Yuzhu¹, WAN Qing^{1,2}, ZHANG Juanjuan¹

1. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China;

2. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: Incomplete contexts are the important data type in formal concept analysis. The (three-way) approximate concepts, the common information with certain meaning, are extracted from the incomplete contexts by (three-way) approximate operators. In incomplete contexts, from the perspectives of lattice isomorphism and approximate operators, the acquisition approaches to (three-way) approximate concepts were investigated based on pictorial diagrams. For two kinds of three-way approximate concepts, on the one hand, with the help of the isomorphic relationship between these three-way approximate concept lat-

收稿日期: 2023-06-05

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12101478).

作者简介: 常瑜珠, 硕士研究生, 主要从事形式概念分析研究.

通信作者: 万青, 博士研究生, 副教授.

tices and the concept lattices of some specific formal contexts, the acquisition methods of three-way approximate concept were studied by using the pictorial diagrams of these specific formal contexts. On the other hand, the relevant acquisition method was given based on the definitions of three-way approximate pictorial diagrams. For approximate concepts, it was proved that the approximate concept lattice was isomorphic to the concept lattice of a specific formal context. Thus, follow the same pattern as the research of three-way approximate concepts acquisition methods, the approximate concepts acquisition methods were given. The conclusions obtained further enrich the theory and method of formal concept analysis.

Key words: incomplete context; three-way approximate concept; approximate concept; three-way approximate pictorial diagram; approximate pictorial diagram

形式概念分析^[1]是一种数据分析和决策获取的数学工具,目前该理论已被应用于计算机网络^[2-3]、专家系统^[4]、冲突分析^[5-6]以及社会网络分析^[7]等多个领域.在形式背景中通过定义一对导出算子,将产生的不动点称之为形式概念,简称概念.概念是由对象子集和属性子集构成的二元对,反映了形式背景中的共有信息.在一个形式背景的所有概念构成的集合上,通过定义偏序关系、上确界和下确界,形成一个完备格,称为概念格.概念格实现了数据的可视化,是形式概念分析的核心数据结构.

三支概念分析^[8]是形式概念分析与三支决策理论^[9]结合而产生的新理论.自该理论提出至今,已被诸多学者应用于文本分类^[10]、认知记忆^[11]、医疗诊断^[12]、社团发现^[13]和个性化推荐^[14]等方面.文献[15]通过在形式背景中引入负算子,定义了两类三支算子:对象导出算子和属性导出算子,进一步挖掘形式背景中隐含的共有信息,提出了对象导出三支概念和属性导出三支概念,利用二元对来刻画概念的外延和内涵,将概念的语义进行扩充,使得获取的概念知识更为丰富.在该理论中,由这两类三支概念产生了两类格:对象导出三支概念格和属性导出三支概念格.文献[15]进一步深入分析了这两类三支概念格与概念格之间的关联性,而文献[16]通过形式背景的并置和叠置运算给出了这两类三支概念格的获取方法.

无论是形式概念分析还是三支概念分析,它们的数据类型都是形式背景.在形式背景中,每个对象与每个属性之间的关系都是确定的,即:要么一个对象具有某一个属性,要么该对象不具有相应的属性.然而,在实际生活中,由于各种原因,我们并不能很确定地判断某些对象是否具有某些属性.因此,文献[17]引入了不完备背景这一概念.

在不完备背景中,有些对象不确定是否具有某些属性.如果将这些不确定的信息用确定的信息替换,则可得到新的形式背景,将这些新的形式背景称为不完备背景的完备化^[18].目前,关于不完备背景的知识获取引起许多学者的关注.比如,文献[19]提出近似概念格的构造方法,并且研究了不完备决策背景的规则提取和属性约简问题;文献[20]用区间集来刻画概念的外延和内涵,给出了3种部分已知概念的定义;文献[21]在文献[20]的基础上,进一步给出3种部分已知概念的结构,并详细分析了它们之间的关系以及这些部分已知概念与概念之间的联系;文献[22]将三支算子引入到不完备背景中,提出了两类三支近似概念,并基于形式背景的并置和叠置运算给出了相应的获取方法.

对于一个形式背景,文献[23]给出了它的等价描述:对象直观图和属性直观图,并通过直观图得到了概念的获取方法.基于此,文献[24]利用形式背景的三支概念格与特定形式背景的概念格之间的同构关系,借助直观图研究了不同类型的三支概念的获取方法.

本文借鉴文献[24]中的研究方法,将直观图的定义引入到不完备背景中,借助(三支)近似概念格和某些特定形式背景的概念格之间的同构关系研究(三支)近似概念的获取方法.具体内容为:首先,根据两类三支近似概念格与某些特定形式背景概念格的同构关系,从形式背景直观图的角度给出相应的获取方法;

接着, 利用三支近似算子在不完备背景中定义三支近似直观图, 分析三支近似直观图与相应的特定形式背景直观图的关系, 进而给出从三支近似直观图获取三支近似概念的方法. 针对近似概念, 利用上述研究三支近似概念的方式, 仍然从格同构与近似算子两个角度出发给出相应的获取方法.

1 预备知识

本节主要介绍形式背景、直观图和不完备背景的基础知识以及集合幂集的笛卡尔积上的相关运算.

1.1 形式背景及直观图的基础知识

定义 1^[1] 称 $K = (G, M, I)$ 为一个形式背景, 其中, $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ 为对象集, 每个 $g_i (i \leq p)$ 称为一个对象; $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ 为属性集, 每个 $m_j (j \leq q)$ 称为一个属性; I 为 G 和 M 之间的二元关系, $I \subseteq G \times M$. 若 $(g, m) \in I$, 则称对象 g 具有属性 m ; 若 $(g, m) \notin I$, 则称对象 g 不具有属性 m .

注 1 本文所研究的形式背景是有限的且是正则的.

定义 2^[1,8] 设 $K = (G, M, I)$ 为形式背景. 对于对象子集 $X \subseteq G$, 属性子集 $A \subseteq M$, 定义

$*$ 算子:

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \in I\}$$

$$A^* = \{g \in G \mid \forall m \in A, (g, m) \in I\}$$

$\overline{*}$ 算子:

$$X^{\overline{*}} = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \notin I\}$$

$$A^{\overline{*}} = \{g \in G \mid \forall m \in A, (g, m) \notin I\}$$

记 $I^c = (G \times M) \setminus I$, 则称 $K^c = (G, M, I^c)$ 为 $K = (G, M, I)$ 的补背景. 事实上, $\overline{*}$ 算子就是 K^c 上的 $*$ 算子.

定义 3^[1] 设 $K = (G, M, I)$ 为形式背景. 对于任意的 $X \subseteq G, A \subseteq M$, 若 $X = A^*$ 且 $A = X^*$, 则称 (X, A) 是一个形式概念, 简称概念. 其中, X 为概念的外延, A 为其内涵. 记所有概念的集合为 $L(K)$.

定理 1^[1] 设 $K = (G, M, I)$ 为形式背景. 若对于任意 $(X_1, A_1), (X_2, A_2) \in L(K)$, 定义如下偏序关系和上、下确界,

$$(X_1, A_1) \leq (X_2, A_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (\Leftrightarrow A_1 \supseteq A_2)$$

$$(X_1, A_1) \vee (X_2, A_2) = ((X_1 \cup X_2)^{**}, A_1 \cap A_2)$$

$$(X_1, A_1) \wedge (X_2, A_2) = (X_1 \cap X_2, (A_1 \cup A_2)^{**})$$

则 $L(K)$ 是完备格, 称为概念格.

对于给定的一个形式背景, 文献[23] 提出了对象直观图和属性直观图的定义, 并基于此研究了概念的获取方法. 相关的定义和方法如下:

定义 4^[23] 设 $K = (G, M, I)$ 是形式背景. 记

$$H_G^*(K) = \{([g], g^*) \mid g \in G\}$$

$$H_M^*(K) = \{(m^*, [m]) \mid m \in M\}$$

对任意的 $g_i, g_j \in G$, 若 $g_i^* \subseteq g_j^*$, 则记

$$([g_i], g_i^*) \leq ([g_j], g_j^*)$$

称 $(H_G^*(K), \leq)$ 是形式背景 K 的对象直观图. 对偶的, 对任意的 $m_s, m_t \in M$, 若 $m_s^* \subseteq m_t^*$, 则记

$$(m_s^*, [m_s]) \leq (m_t^*, [m_t])$$

称 $(H_M^*(K), \leq)$ 是形式背景 K 的属性直观图.

注 2 在定义 4 中, $[g]$ 表示对象 g 的等价类, $[m]$ 表示属性 m 的等价类.

例 1 表 1 为形式背景 $K = (G, M, I)$, 其对象直观图和属性直观图分别如图 1 和图 2 所示.

表 1 形式背景 $K = (G, M, I)$

G	a	b	c	d	e
1	+	+	+	+	—
2	+	+	+	—	—
3	—	—	—	+	—
4	+	+	—	—	+

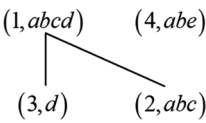


图 1 对象直观图 $(H_G^*(K), \leq)$

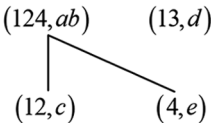


图 2 属性直观图 $(H_M^*(K), \leq)$

通过直观图获取概念的方法如下:

定理 2^[23] 设 $K = (G, M, I)$ 是形式背景, $(H_G^*(K), \leq)$ 和 $(H_M^*(K), \leq)$ 分别是其对象直观图和属性直观图. 则以下结论成立:

1) $\forall ([g], g^*) \in H_G^*(K)$, 有

$$\lambda_{\cap}(\uparrow([g], g^*)) = (\bigcup_{j \in \tau} [g_j], g^*) \in L(K)$$

(1)

2) $\forall (m^*, [m]) \in H_M^*(K)$, 有

$$\mu_{\cap}(\uparrow(m^*, [m])) = (m^*, \bigcup_{i \in \omega} [m_i]) \in L(K)$$

(2)

其中

$$([g_j], g_j^*) \geq ([g], g^*), (m_i^*, [m_i]) \geq (m^*, [m])$$

τ 和 ω 为指标集.

定理 2 表明, 我们可以通过形式背景的直观图得到一些概念. 由于这些概念包含了概念格中的交、并不可约元, 因此通过概念格中的上、下确界运算进一步可以得到所有的概念^[23].

1.2 不完备背景的基础知识

定义 5^[17] 称四元组 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 为不完备背景. 其中: G 为对象集; M 为属性集; $\{+, ?, -\}$ 为属性值集; $J: G \times M \longrightarrow \{+, ?, -\}$ 为映射. 若 $J(g, m) = +$, 则表示对象 g 拥有属性 m ; 若 $J(g, m) = ?$, 则表示不确定对象 g 是否拥有属性 m ; 若 $J(g, m) = -$, 则表示对象 g 不拥有属性 m .

称 $K = (G, M, I)$ 为不完备背景 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 的一个完备化^[18], 此时二元关系 I 满足条件:

$$J(g, m) = + \Rightarrow (g, m) \in I$$

$$J(g, m) = - \Rightarrow (g, m) \notin I$$

即 I 可以通过将不完备背景中的每个“?”替换为“+”或“-”来获得. 若将不完备背景中的所有“?”替换为“-”, 得到的形式背景称为 IK 的最小完备化, 记为 $IK_- = (G, M, I_-)$; 若将不完备背景中的所有“?”替换为“+”, 得到的形式背景称为 IK 的最大完备化, 记为 $IK_+ = (G, M, I_+)$.

例 2^[22] 表 2 为不完备背景 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$, 其最小完备化 IK_- 和最大完备化 IK_+ 分别如表 3 和表 4 所示.

表 2 不完备背景 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$

G	a	b	c	d	e	f	k
1	+	+	—	+	+	—	+
2	?	?	+	—	—	?	?
3	—	—	—	+	—	—	?
4	+	+	+	—	—	+	—

表 3 表 2 的最小完备化 IK_-

G	a	b	c	d	e	f	k
1	+	+	—	+	+	—	+
2	—	—	+	—	—	—	—
3	—	—	—	+	—	—	—
4	+	+	+	—	—	+	—

表 4 表 2 的最大完备化 IK_+

G	a	b	c	d	e	f	k
1	+	+	—	+	+	—	+
2	+	+	+	—	—	+	+
3	—	—	—	+	—	—	+
4	+	+	+	—	—	+	—

1.3 集合幂集的笛卡尔积上的相关运算

本小节主要回顾任意非空有限集合幂集的笛卡儿积上的相关运算。
设 S 为任意的非空有限集合, $\mathcal{DP}(S) = \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ 是 S 幂集的笛卡儿积, 对任意的 $(A, B), (C, D) \in \mathcal{DP}(S)$, 定义偏序关系及交、并、补运算为:

$$\begin{aligned}(A, B) \subseteq (C, D) &\Leftrightarrow A \subseteq C \text{ 且 } B \subseteq D \\ (A, B) \cap (C, D) &= (A \cap C, B \cap D) \\ (A, B) \cup (C, D) &= (A \cup C, B \cup D) \\ (A, B)^c &= (S - A, S - B) = (A^c, B^c)\end{aligned}$$

特别地, 当 $(A, B) = (C, D)$ 时, $A = C$ 且 $B = D$.

2 三支近似概念的获取方法

本节基于直观图, 从两个角度给出三支近似概念的获取方法. 一是从三支近似概念格与某些特定形式背景概念格的同构关系出发, 二是从三支近似算子的角度出发. 下面先给出三支近似概念的相关知识.

2.1 三支近似概念的基础知识

定义 6^[22] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 为不完备背景. 对任意的 $X, Y \subseteq G, A, B \subseteq M$, 定义
1) OE 三支近似算子:

$$X^{\leftarrow} = (X^*, X^{\overline{*}}), (A, B)^{\rightarrow} = A^* \cap B^{\overline{*}}$$

2) AE 三支近似算子:

$$A^{\leftarrow} = (A^*, A^{\overline{*}}), (X, Y)^{\rightarrow} = X^* \cap Y^{\overline{*}}$$

式中

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, J(g, m) = +\}$$

$$X^- = \{m \in M \mid \forall g \in X, J(g, m) = -\}$$

$$A^* = \{g \in G \mid \forall m \in A, J(g, m) = +\}$$

$$A^- = \{g \in G \mid \forall m \in A, J(g, m) = -\}$$

称 $*$ 为正算子, $\bar{*}$ 为负算子.

事实上, 这里的正算子 $*$ 是 IK 最小完备化 IK_- 中的算子 $*$, 而负算子 $\bar{*}$ 是 IK 最大完备化 IK_+ 中的算子 $\bar{*}$.

定义 7^[22] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 对任意的 $X, Y \subseteq G, A, B \subseteq M$,

1) 若满足 $X^{\leftarrow} = (A, B)$ 且 $(A, B)^{\rightarrow} = X$, 则称 $(X, (A, B))$ 为 IK 的对象导出三支近似概念, 简称 OE 近似概念. 其中, 称 X 为 OE 近似概念的外延, (A, B) 为其内涵.

2) 若满足 $(X, Y)^{\rightarrow} = A$ 且 $A^{\leftarrow} = (X, Y)$, 则称 $((X, Y), A)$ 为 IK 的属性导出三支近似概念, 简称 AE 近似概念. 其中, 称 (X, Y) 为 AE 近似概念的外延, A 为其内涵.

用 $OEL(IK)$ 表示 IK 中所有 OE 近似概念的集合, $AEL(IK)$ 表示 IK 中所有 AE 近似概念的集合.

定理 3^[22] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 为不完备背景.

1) 对于任意的两个 OE 近似概念, 定义偏序关系以及上、下确界如下:

$$(X_1, (A_1, B_1)) \leq (X_2, (A_2, B_2)) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \Leftrightarrow (A_1, B_1) \supseteq (A_2, B_2)$$

$$(X_1, (A_1, B_1)) \vee (X_2, (A_2, B_2)) = ((X_1 \cup X_2)^{\leftarrow}, (A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2))$$

$$(X_1, (A_1, B_1)) \wedge (X_2, (A_2, B_2)) = (X_1 \cap X_2, (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)^{\rightarrow\leftarrow})$$

则 $OEL(IK)$ 是完备格, 称为对象导出三支近似概念格, 简称 OE 近似概念格.

2) 对于任意的两个 AE 近似概念, 定义偏序关系以及上、下确界, 如下:

$$((X_1, Y_1), A_1) \leq ((X_2, Y_2), A_2) \Leftrightarrow (X_1, Y_1) \subseteq (X_2, Y_2) \Leftrightarrow A_1 \supseteq A_2$$

$$((X_1, Y_1), A_1) \vee ((X_2, Y_2), A_2) = ((X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2)^{\rightarrow\leftarrow}, A_1 \cap A_2)$$

$$((X_1, Y_1), A_1) \wedge ((X_2, Y_2), A_2) = ((X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2), (A_1 \cup A_2)^{\leftarrow\rightarrow})$$

则 $AEL(IK)$ 是完备格, 称为属性导出三支近似概念格, 简称 AE 近似概念格.

例 3^[22] (续例 2) 对于表 2 的不完备背景, 其 OE 近似概念格和 AE 近似概念格分别如图 3 和图 4 所示.

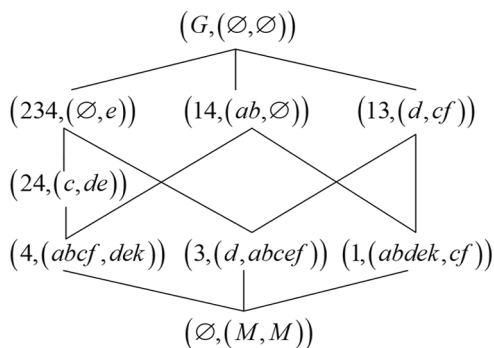


图 3 表 2 的 $OEL(IK)$

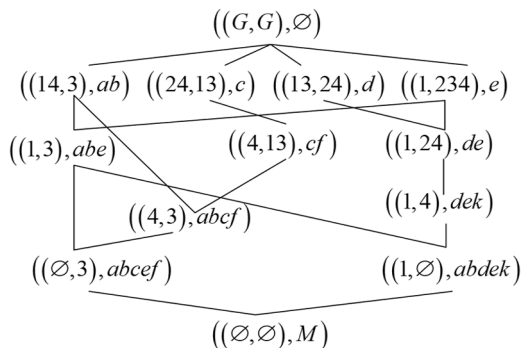


图 4 表 2 的 $AEL(IK)$

2.2 基于同构关系的三支近似概念获取方法

本文记最小完备化与最大完备化的补背景的并置为 $IK_- \mid IK_+^c = (G, M \cup \hat{M}, I_- \cup I_+^c)$, 其中 $\hat{M} = \{\hat{m}_j \mid m_j \in M\}$, 对应的概念格记为 $L(IK_- \mid IK_+^c)$; 记最小完备化与最大完备化的补背景的叠置为 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$

$(\hat{G} \cup G, M, I_- \cup I_+^c)$, 其中 $\hat{G} = \{\hat{g}_i \mid g_i \in G\}$, 对应的概念格为 $L\left(\frac{IK_-}{IK_+^c}\right)$.

注 3 为了便于后续内容的描述, 本文将两个形式背景并置所构成的新形式背景称为并置背景, 将它们叠置所构成的新形式背景称为叠置背景.

对于 OE 近似概念和 AE 近似概念, 文献[22] 给出了通过不完备背景的最小完备化和最大完备化的补背景的并置和叠置获取这两种三支近似概念的方法, 具体内容如下.

定理 4^[22] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $IK_- \mid IK_+^c$ 和 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$ 分别是 IK 的最小完备化和最大完备化的补背景的并置背景和叠置背景, 则有

1) 存在一个同构映射 f_1 :

$$OEL(IK) \longrightarrow L(IK_- \mid IK_+^c)$$

有 $f_1((X, (A, B))) = (X, A \cup \hat{B})$, 其中 $\hat{B} = \{\hat{b} \mid b \in B\}$.

2) 存在一个同构映射 f_2 :

$$AEL(IK) \longrightarrow L\left(\frac{IK_-}{IK_+^c}\right)$$

有 $f_2(((X, Y), A)) = (X \cup \hat{Y}, A)$, 其中 $\hat{Y} = \{\hat{y} \mid y \in Y\}$.

定义 8^[24] 对任意的 $(P, Q) \in \mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(M \cup \hat{M})$, 定义

$$[(P, Q)]_m = (P, (Q_1, Q_2)) \quad (3)$$

称 $[\cdot]_m$ 为属性分离映射, 其中

$$Q_1 = \{m \mid m \in Q \cap M\} \quad Q_2 = \{m \mid \hat{m} \in Q \cap \hat{M}\}$$

类似地, 对任意的 $(P, Q) \in \mathcal{P}(G \cup \hat{G}) \times \mathcal{P}(M)$, 定义

$$[(P, Q)]_g = ((P_1, P_2), Q) \quad (4)$$

称 $[\cdot]_g$ 为对象分离映射, 其中 $P_1 = \{g \mid g \in P \cap G\}$, $P_2 = \{g \mid \hat{g} \in P \cap \hat{G}\}$.

通过定理 2 可从 $(H_G^*(K), \leq)$ 和 $(H_M^*(K), \leq)$ 中获取概念, 于是结合定理 4 的 1) 和定义 8 中的式(3), 可得从 $(H_G^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$ 和 $(H_M^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$ 中直接获取不完备背景中 OE 近似概念的方法.

定理 5 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $(H_G^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$ 和 $(H_M^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$ 分别是并置背景 $IK_- \mid IK_+^c$ 的对象直观图和属性直观图. 则下列结论成立:

1) $\forall ([g], g^*) \in H_G^*(IK_- \mid IK_+^c)$, 有

$$[\lambda_{\cap}(\uparrow([g], g^*))]_m \in OEL(IK)$$

2) $\forall (m^*, [m]) \in H_M^*(IK_- \mid IK_+^c)$, 有

$$[\mu_{\cap}(\uparrow(m^*, [m]))]_m \in OEL(IK)$$

定理 5 表明, 对于不完备背景, 我们可以通过并置背景 $IK_- \mid IK_+^c$ 的对象直观图或属性直观图得到部分的 OE 近似概念. 而通过对这些部分的 OE 近似概念进行上确界或下确界运算, 便可以得到所有的 OE 近似概念. 下面我们以对象直观图为例, 给出具体的求解步骤.

1) 画出并置背景 $IK_- \mid IK_+^c$ 的对象直观图 $(H_G^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$.

2) 对 $(H_G^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$ 中的元素, 先根据定理 2 中的式(1)进行运算 $\lambda_{\cap} \circ \uparrow$, 再根据定义 8 中的式(3)进行运算 $[\cdot]_m$.

3) 对步骤 2) 得到的 OE 近似概念, 根据定理 3 的 1) 进行上确界运算便可得其他的 OE 近似概念.

例 4(续例 2) 最小完备化 IK_- 和最大完备化 IK_+ 的补背景的并置背景 $IK_-|IK_+^c$ 如表 5 所示.

表 5 并置背景 $IK_-|IK_+^c$

G	a	b	c	d	e	f	k	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	$\hat{d}$	$\hat{e}$	$\hat{f}$	$\hat{k}$
1	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
2	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
3	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-
4	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+

根据定义 4, 可得

$$H_G^*(IK_-|IK_+^c) = \{(1, abdek\hat{c}\hat{f}), (2, cd\hat{e}), (3, d\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{e}\hat{f}), (4, abcfd\hat{e}\hat{k})\}$$

$$H_M^*(IK_-|IK_+^c) = \{(14, ab), (24, cd), (13, d\hat{c}\hat{f}), (1, ek), (3, \hat{a}\hat{b}), (234, \hat{e}), (4, f\hat{k})\}$$

进而可得并置背景的对象直观图和属性直观图分别如图 5 和图 6 所示.

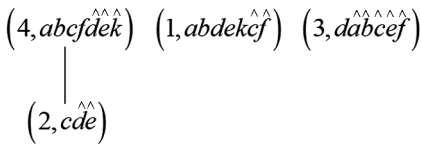


图 5 对象直观图($H_G^*(IK_-|IK_+^c), \leq$)

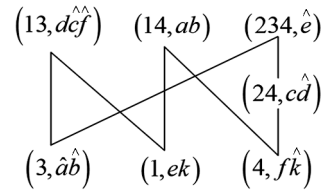


图 6 属性直观图($H_M^*(IK_-|IK_+^c), \leq$)

对于对象直观图($H_G^*(IK_-|IK_+^c), \leq$)中的元素($2, cd\hat{e}$), 根据定理 2 中的式(1)的运算 $\lambda_\cap \circ \uparrow$ 可得

$$\lambda_\cap (\uparrow (2, cd\hat{e})) = (24, cd\hat{e})$$

再由定义 8 中的式(3)可得

$$[\lambda_\cap (\uparrow (2, cd\hat{e}))]_m = [(24, cd\hat{e})]_m = (24, (c, de))$$

对于属性直观图($H_M^*(IK_-|IK_+^c), \leq$)中的元素($24, cd$), 根据定理 2 中的式(2)的运算 $\mu_\cap \circ \uparrow$ 可得

$$\mu_\cap (\uparrow (24, cd)) = (24, cd\hat{e})$$

再由定义 8 中的式(3)可得

$$[\mu_\cap (\uparrow (24, cd))]_m = [(24, cd\hat{e})]_m = (24, (c, de))$$

由图 3 分别可以验证 $[\lambda_\cap (\uparrow (2, cd\hat{e}))]_m \in OEL(IK)$ 和 $[\mu_\cap (\uparrow (24, cd))]_m \in OEL(IK)$.

下面通过结合定理 2 和定理 4 的 2), 可得从 $(H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 和 $(H_M^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 中直接获取不完备背景中 AE 近似概念的方法.

定理 6 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $(H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 和 $(H_M^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 分别是叠置背景 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$ 的对象直观图和属性直观图. 则下列结论成立:

1) $\forall ([g], g^*) \in H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}),$ 有

$$[\lambda_\cap (\uparrow ([g], g^*))]_g \in AEL(IK)$$

2) $\forall (m^*, [m]) \in H_M^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}),$ 有

$$[\mu_{\cap}(\uparrow(m^*, [m]))]_g \in AEL(IK)$$

定理 6 表明, 我们可以通过叠置背景 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$ 的对象直观图或属性直观图得到部分的 AE 近似概念. 类似地, 通过对这些 AE 近似概念进行上确界或下确界运算, 便可以得到所有的 AE 近似概念. 下面我们仍以对象直观图为例, 给出具体的求解步骤.

- 1) 画出叠置背景 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$ 的对象直观图 $(H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$.
- 2) 对 $(H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 中的元素, 先根据定理 2 中的式(1) 进行运算 $\lambda_{\cap} \circ \uparrow$, 再根据定义 8 中的式(4) 进行运算 $[\cdot]_g$.
- 3) 对步骤 2) 得到的 AE 近似概念, 根据定理 3 的 2) 进行上确界运算便可得其他的 AE 近似概念.

例 5(续例 2) 最小完备化 IK_- 和最大完备化 IK_+ 的补背景的叠置背景 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$ 如表 6 所示.

表 6 叠置背景 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$

G	a	b	c	d	e	f	k
1	+	+	—	+	+	—	+
2	—	—	+	—	—	—	—
3	—	—	—	+	—	—	—
4	+	+	+	—	—	+	—
$\hat{1}$	—	—	+	—	—	+	—
$\hat{2}$	—	—	—	+	+	—	—
$\hat{3}$	+	+	+	—	+	+	—
$\hat{4}$	—	—	—	+	+	—	+

根据定义 4, 可得

$$H_G^*\left(\frac{IK_-}{IK_+^c}\right)=\{(1, abdek), (2, c), (3, d), (4, abcf), (\hat{1}, cf), (\hat{2}, de), (\hat{3}, abcef), (\hat{4}, dek)\}$$

$$H_M^*\left(\frac{IK_-}{IK_+^c}\right)=\{(14\hat{3}, ab), (24\hat{1}\hat{3}, c), (13\hat{2}\hat{4}, d), (1\hat{2}\hat{3}\hat{4}, e), (4\hat{1}\hat{3}, f), (1\hat{4}, k)\}$$

进而可得叠置背景的对象直观图和属性直观图分别如图 7 和图 8 所示.

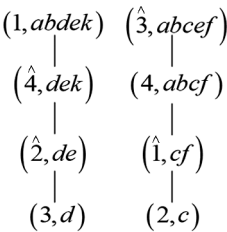


图 7 对象直观图 $(H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$

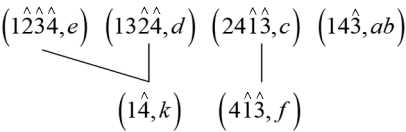


图 8 属性直观图 $(H_M^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$

对于对象直观图 $(H_G^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 中的元素 $(\hat{2}, de)$, 先根据定理 2 中的式(1) 的运算 $\lambda_{\cap} \circ \uparrow$ 可得

$$\lambda_{\cap}(\uparrow(\hat{2}, de))=(1\hat{2}\hat{4}, de)$$

再由定义 8 中的式(4) 可得

$$[\lambda_{\cap}(\uparrow(\hat{2}, de))]_g = [(1\hat{2}\hat{4}, de)]_g = ((1, 24), de)$$

对于属性直观图 $(H_M^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$ 中的元素 $(4\hat{1}\hat{3}, f)$, 先根据定理 2 中的式(2) 的运算 $\mu_{\cap} \circ \uparrow$ 可得

$$\mu_{\cap}(\uparrow(4\hat{1}\hat{3}, f)) = (4\hat{1}\hat{3}, cf)$$

再由定义 8 中的式(4) 可得

$$[\mu_{\cap}(\uparrow(4\hat{1}\hat{3}, f))]_g = [(4\hat{1}\hat{3}, cf)]_g = ((4, 13), cf)$$

由图 4 分别可以验证 $[\lambda_{\cap}(\uparrow(\hat{2}, de))]_g \in AEL(IK)$ 和 $[\mu_{\cap}(\uparrow(4\hat{1}\hat{3}, f))]_g \in AEL(IK)$.

2.3 基于三支近似算子的三支近似概念获取方法

定义 9 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 记

$$H_G^{\leftarrow}(IK) = \{([g], (g^*, g^{\bar{*}})) \mid g \in G\}$$

$$H_M^{\leftarrow}(IK) = \{((m^*, m^{\bar{*}}), [m]) \mid m \in M\}$$

对任意的 $g_i, g_j \in G$, 若 $(g_i^*, g_i^{\bar{*}}) \subseteq (g_j^*, g_j^{\bar{*}})$, 则记

$$([g_i], (g_i^*, g_i^{\bar{*}})) \leq ([g_j], (g_j^*, g_j^{\bar{*}}))$$

并称 $(H_G^{\leftarrow}(IK), \leq)$ 是 IK 的对象三支近似直观图. 对偶的, 对任意的 $m_s, m_t \in M$, 若 $(m_s^*, m_s^{\bar{*}}) \subseteq (m_t^*, m_t^{\bar{*}})$, 则记

$$((m_s^*, m_s^{\bar{*}}), [m]) \leq ((m_t^*, m_t^{\bar{*}}), [m])$$

并称 $(H_M^{\leftarrow}(IK), \leq)$ 是 IK 的属性三支近似直观图.

例 6(续例 2) 对于表 2 所示的不完备背景, 其对象三支近似直观图和属性三支近似直观图分别如图 9 和图 10 所示.

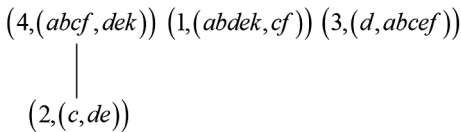


图 9 对象三支近似直观图 $(H_G^{\leftarrow}(IK), \leq)$

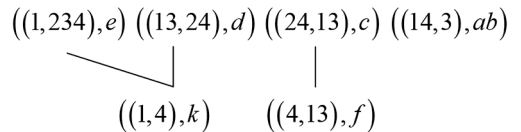


图 10 属性三支近似直观图 $(H_M^{\leftarrow}(IK), \leq)$

由定义 9 和定义 4 易知, 不完备背景 IK 的对象(属性)三支近似直观图和并置背景 $IK_- \mid IK_+$ (叠置背景 $\frac{IK_-}{IK_+^c}$) 的对象(属性)直观图之间存在一一对应关系. 具体见如下推论.

推论 1 对任意的 $([g], g^*) \in (H_G^*(IK_- \mid IK_+^c), \leq)$, 存在 $([g], (g^*, g^{\bar{*}})) \in (H_G^{\leftarrow}(IK), \leq)$, 有

$$([g], g^*)]_m = ([g], (g^*, g^{\bar{*}}))$$

推论 2 对任意的 $(m^*, [m]) \in (H_M^*(\frac{IK_-}{IK_+^c}), \leq)$, 存在 $((m^*, m^{\bar{*}}), [m]) \in (H_M^{\leftarrow}(IK), \leq)$, 有

$$[(m^*, [m])]_g = ((m^*, m^{\bar{*}}), [m])$$

根据上述推论 1 和推论 2 以及定理 5 和定理 6, 可得下面的结论.

定理 7 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $(H_G^{\leftarrow}(IK), \leq)$ 和 $(H_M^{\leftarrow}(IK), \leq)$ 分别是 IK 的对象三支近似直观图和属性三支近似直观图. 则下列结论成立:

1) $\forall ([g], (g^*, g^{\bar{*}})) \in H_G^{\leftarrow}(IK)$, 有

$$\lambda_{\cap}(\uparrow([g], (g^*, g^{\bar{*}}))) = (\bigcup_{j \in \tau} [g_j], (g^*, g^{\bar{*}})) \in OEL(IK)$$

2) $\forall ((m^*, m^{\bar{*}}), [m]) \in H_M^{\leq}(IK)$, 有

$$\mu_{\cap}(\uparrow(m^*, m^{\bar{*}}), [m]) = ((m^*, m^{\bar{*}}), \bigcup_{t \in \omega} [m_t]) \in AEL(IK)$$

式中

$$([g], (g^*, g^{\bar{*}})) \leq ([g_j], (g_j^*, g_j^{\bar{*}})), ((m^*, m^{\bar{*}}), [m]) \leq ((m_t^*, m_t^{\bar{*}}), [m_t])$$

τ 和 ω 为指标集.

证 由推论 1 和推论 2, 以及定理 5 和定理 6 可证.

定理 7 表明, 对于不完备背景, 我们可以通过对象(属性)三支近似直观图得到部分的 $OE(AE)$ 近似概念. 再根据近似概念的上确界或下确界运算, 便可以得到所有的 OE 近似概念和 AE 近似概念. 下面我们对象三支近似直观图为例, 给出具体的求解步骤.

1) 画出 IK 的对象三支近似直观图($H_G^{\leq}(IK), \leq$).

2) 对($H_G^{\leq}(IK), \leq$)中的元素, 利用定理 2 中的式(1)进行运算 $\lambda_{\cap} \circ \uparrow$.

3) 对步骤 2) 得到的 OE 近似概念, 根据定理 3 的 1) 进行上确界运算便可得其他的 OE 近似概念.

例 7(续例 6) 对于($H_G^{\leq}(IK), \leq$)中的元素(2, (c, de)), 通过定理 2 中的式(1)可得

$$\uparrow(2, (c, de)) = \{(2, (c, de)), (4, (abcf, dek))\}$$

$$\lambda_{\cap}(\uparrow(2, (c, de))) = (24, (c, de))$$

同样的, 对于($H_M^{\leq}(IK), \leq$)中的元素((4, 13), f), 根据定理 2 中的式(2)可得

$$\uparrow((4, 13), f) = \{((4, 13), f), ((24, 13), c)\}$$

$$\mu_{\cap}(\uparrow((4, 13), f)) = ((4, 13), cf)$$

由图 3 和图 4 分别可以验证 $(24, (c, de)) \in OEL(IK)$ 和 $((4, 13), cf) \in AEL(IK)$.

3 近似概念的获取方法

采用与第 2 节相同的研究方式, 本节也是从格同构和近似算子两个角度给出近似概念的获取方法. 下面先给出近似概念的相关知识.

3.1 近似概念的基础知识

设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 对于 $X \subseteq G$, 定义^[19]

$$\underline{R}(X) = \{m \in M \mid J(g, m) = +, \forall g \in X\}$$

$$\overline{R}(X) = \{m \in M \mid J(g, m) = + \text{ or } J(g, m) = ?, \forall g \in X\}$$

其中 $\underline{R}(X)$ 是 X 中所有对象一定共同具有的属性全体构成的集合, 而 $\overline{R}(X)$ 是 X 中所有对象可能共同具有的属性全体构成的集合. 因此, 一定有 $\underline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$. 当 $X = \{g\}$, 记 $\underline{R}(\{g\})$ 和 $\overline{R}(\{g\})$ 分别为 $\underline{R}(g)$ 和 $\overline{R}(g)$.

注 4 $\underline{R}(\cdot)$ 是最小完备化 IK_{-} 上的 $*$ 运算, $\overline{R}(\cdot)$ 是最大完备化 IK_{+} 上的 $*$ 运算.

定义 10^[19] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 对任意的 $X \subseteq G, A, B \subseteq M$, 定义两个算子:

$$X^{\square} = (\underline{R}(X), \overline{R}(X))$$

$$(A, B)^{\diamond} = \{g \in G \mid (A, B) \leq (\underline{R}(g), \overline{R}(g))\}$$

定义 11^[19] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 对任意的 $X \subseteq G, A, B \subseteq M$, 若满足 $X^{\square} = (A, B)$ 且 $(A, B)^{\diamond} = X$, 则称 $(X, (A, B))$ 是 IK 的近似概念. 其中, 称 X 为近似概念的外延, (A, B) 为其内涵. 用 $L(IK)$ 表示所有近似概念的集合.

定理 8^[19] 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 对于任意的两个近似概念, 定义偏序关系

以及上、下确界如下:

$$\begin{aligned}(X_1, (A_1, B_1)) &\leq (X_2, (A_2, B_2)) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \Leftrightarrow (A_1, B_1) \supseteq (A_2, B_2) \\ (X_1, (A_1, B_1)) \vee (X_2, (A_2, B_2)) &= ((X_1 \cup X_2)^{\square\Diamond}, (A_1, B_1) \cap (A_2, B_2)) \\ (X_1, (A_1, B_1)) \wedge (X_2, (A_2, B_2)) &= (X_1 \cap X_2, ((A_1, B_1) \cup (A_2, B_2))^{\square\Diamond})\end{aligned}$$

则 $L(IK)$ 是完备格, 称为不完备背景的近似概念格.

例 8(续例 2) 对于表 2 的不完备背景, 其近似概念格如图 11 所示.

3.2 基于同构关系的近似概念获取方法

本文记最小完备化与最大完备化的并置为

$$IK_- | IK_+ = (G, M \cup \hat{M}, I_- \cup I_+)$$

对应的概念格记为 $L(IK_- | IK_+)$. 为了便于区分, 我们记并置背景 $IK_- | IK_+$ 上的 $*$ 运算为 $\uparrow$. 下面给出并置背景中的算子 $\uparrow$ 与文献[19]中算子 $\square, \Diamond$ 的关系.

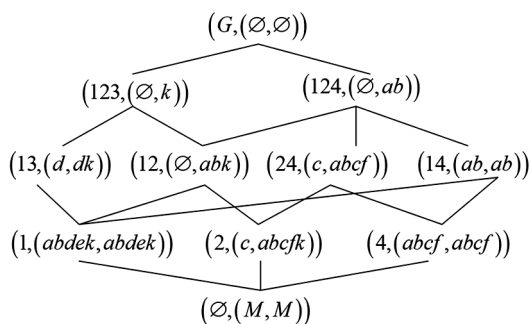


图 11 表 2 的 $L(IK)$

引理 1 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $IK_- | IK_+$ 是最小完备化与最大完备化的并置背景. 则有

- 1) 任意的 $X \subseteq G$, $X^\uparrow = \underline{R}(X) \cup \overline{R}(X)$;
- 2) 任意的 $F \subseteq M \cup \hat{M}$, $F^\uparrow = (A, B)^\Diamond$, 其中 $A = F \cap M$, $B = \{b \mid \hat{b} \in F \cap \hat{M}\}$.

证 1) 易由 $\underline{R}(X)$ 和 $\overline{R}(X)$ 的定义及 $IK_- | IK_+$ 的定义可证.

2) 记 $\hat{B} = F \cap \hat{M}$, 则 $F = A \cup \hat{B}$, 进而由算子 $*$ 的性质 $\forall A_1, A_2 \subseteq M, (A_1 \cup A_2)^* = A_1^* \cap A_2^*$ [1] 可得

$$F^\uparrow = (A \cup \hat{B})^\uparrow = A^\uparrow \cap \hat{B}^\uparrow$$

因 $A \subseteq M$, $\hat{B} \subseteq \hat{M}$, 故根据 $\underline{R}(\cdot), \overline{R}(\cdot)$ 和 $\Diamond$ 的定义可得

$$\begin{aligned}A^\uparrow \cap \hat{B}^\uparrow &= \{g \in G \mid A \subseteq \underline{R}(g)\} \cap \{g \in G \mid B \subseteq \overline{R}(g)\} = \\ &= \{g \in G \mid A \subseteq \underline{R}(g) \text{ 且 } B \subseteq \overline{R}(g)\} = \\ &= \{g \in G \mid (A, B) \leq (\underline{R}(g), \overline{R}(g))\} = \\ &= (A, B)^\Diamond\end{aligned}$$

下面给出不完备背景的近似概念格与特定形式背景的概念格的同构关系.

定理 9 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $IK_- | IK_+$ 是 IK 的最小完备化和最大完备化的并置背景. 则存在一个同构映射 $f_3: L(IG) \rightarrow L(IK_- | IK_+)$, 有 $f_3((X, (A, B))) = (X, A \cup \hat{B})$.

证 首先证 $(X, A \cup \hat{B}) \in L(IK_- | IK_+)$, 即证 f_3 是一个映射. 若 $(X, (A, B)) \in L(IG)$, 则有

$$X^\square = (\underline{R}(X), \overline{R}(X)) = (A, B)$$

即

$$A = \underline{R}(X), B = \overline{R}(X)$$

以及

$$(A, B)^\Diamond = \{g \in G \mid (A, B) \leq (\underline{R}(g), \overline{R}(g))\} = X$$

进而由引理 1 可知

$$\begin{aligned} X^\uparrow &= \underline{R}(X) \cup \overline{\hat{R}}(X) = A \cup \hat{B} \\ (A \cup \hat{B})^\uparrow &= (A, B)^\diamond = X \end{aligned}$$

因此, 根据定义 3 可知 $(X, A \cup \hat{B}) \in L(IK_- | IK_+)$. 也就是说 f_3 是一个映射.

其次, 证明 f_3 是一个双射. 对任意的 $(X, F) \in L(IK_- | IK_+)$, 有 $X^\uparrow = F$ 且 $F^\uparrow = X$. 记 $A = F \cap M$, $\hat{B} = F \cap \hat{M}$. 于是有 $A = X^\uparrow \cap M$, $\hat{B} = X^\uparrow \cap \hat{M}$. 根据引理 1 可得

$$\begin{aligned} A &= (\underline{R}(X) \cup \overline{\hat{R}}(X)) \cap M = \underline{R}(X) \cap M = \underline{R}(X) \\ \hat{B} &= (\underline{R}(X) \cup \overline{\hat{R}}(X)) \cap \hat{M} = \overline{\hat{R}}(X) \cap \hat{M} = \overline{\hat{R}}(X) \end{aligned}$$

即 $B = \overline{R}(X)$. 于是, 由算子 $\square$ 的定义可得 $X^\square = (A, B)$. 又由 $X = F^\uparrow = (A \cup \hat{B})^\uparrow$ 及引理 1 可得 $X = (A, B)^\diamond$. 因此, 可以证得 $(X, (A, B)) \in L(IK)$, 即 f_3 是一个满射.

对于两个近似概念 $(X_1, (A_1, B_1))$ 和 $(X_2, (A_2, B_2))$, 若 $(X_1, (A_1, B_1)) \neq (X_2, (A_2, B_2))$, 则有 $X_1 \neq X_2$; 另一方面,

$$\begin{aligned} f_3((X_1, (A_1, B_1))) &= (X_1, A_1 \cup \hat{B}_1) \\ f_3((X_2, (A_2, B_2))) &= (X_2, A_2 \cup \hat{B}_2) \end{aligned}$$

于是

$$f_3((X_1, (A_1, B_1))) \neq f_3((X_2, (A_2, B_2)))$$

即 f_3 是一个单射. 综上可得, f_3 是一个双射.

通过结合定理 9 和定义 8, 可得从 $(H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 和 $(H_M^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 中直接获取不完备背景中近似概念的方法如下.

定理 10 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $(H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 和 $(H_M^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 分别是并置背景 $IK_- | IK_+$ 的对象直观图和属性直观图, 则下列结论成立:

- 1) $\forall ([g], g^*) \in H_G^*(IK_- | IK_+)$, 有 $[\lambda_\cap (\uparrow([g], g^*))]_m \in L(IK)$,
- 2) $\forall (m^*, [m]) \in H_M^*(IK_- | IK_+)$, 有 $[\mu_\cap (\uparrow(m^*, [m]))]_m \in L(IK)$.

根据定理 10, 我们可以通过并置背景 $IK_- | IK_+$ 的对象直观图或属性直观图得到部分的近似概念. 进而再根据近似概念的上确界或下确界运算, 便可以得到所有的近似概念. 下面我们以对象直观图为例, 给出具体的求解步骤.

- 1) 画出 $IK_- | IK_+$ 的对象直观图 $(H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$.

2) 对 $(H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 中的元素, 先利用定理 2 中的式(1)进行运算 $\lambda_\cap \circ \uparrow$, 再根据定义 8 中的式(3)进行运算 $[\cdot]_m$.

- 3) 对步骤 2) 得到的近似概念, 根据定理 8 进行上确界运算便可得其他的近似概念.

例 9(续例 2) 最小完备化 IK_- 和最大完备化 IK_+ 的并置背景 $IK_- | IK_+$ 如表 7 所示.

表 7 并置背景 $IK_- | IK_+$

G	a	b	c	d	e	f	k	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	$\hat{d}$	$\hat{e}$	$\hat{f}$	$\hat{k}$
1	+	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+
2	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+
3	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
4	+	+	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-

根据定义 4, 可得

$$H_G^*(IK_- | IK_+) = \{(1, abdekab\hat{d}\hat{e}\hat{k}), (2, cab\hat{c}\hat{f}\hat{k}), (3, d\hat{d}\hat{k}), (4, abcfab\hat{c}\hat{f})\}$$

$$H_M^*(IK_- | IK_+) = \{(14, ab), (24, c\hat{c}\hat{f}), (13, d\hat{d}), (1, ek\hat{e}), (4, f), (124, \hat{a}\hat{b}), (123, \hat{k})\}$$

进而可得并置背景的对象直观图和属性直观图分别如图 12 和图 13 所示.

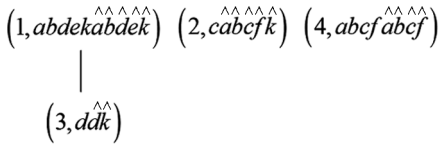


图 12 对象直观图 $(H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$

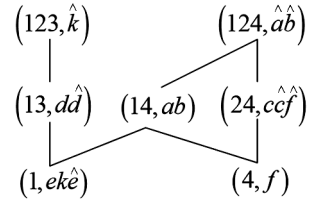


图 13 属性直观图 $(H_M^*(IK_- | IK_+), \leq)$

对于对象直观图 $(H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 中的元素 $(3, d\hat{d}\hat{k})$, 先根据定理 2 中的式(1) 的运算 $\lambda_{\cap} \circ \uparrow$ 可得

$$\lambda_{\cap} (\uparrow (3, d\hat{d}\hat{k})) = (13, d\hat{d}\hat{k})$$

再由定义 8 中的式(3) 可得

$$[\lambda_{\cap} (\uparrow (3, d\hat{d}\hat{k}))]_m = [(13, d\hat{d}\hat{k})]_m = (13, (d, dk))$$

对于属性直观图 $(H_M^*(IK_- | IK_+), \leq)$ 中的元素 $(24, c\hat{c}\hat{f})$, 先根据定理 2 中的式(2) 的运算 $\mu_{\cap} \circ \uparrow$ 可得

$$\mu_{\cap} (\uparrow (24, c\hat{c}\hat{f})) = (24, cab\hat{c}\hat{f})$$

再由定义 8 中的式(3) 可得

$$[\mu_{\cap} (\uparrow (24, c\hat{c}\hat{f}))]_m = [(24, cab\hat{c}\hat{f})]_m = (24, (c, abcf))$$

由图 11 可以分别验证 $(13, (d, dk)) \in L(IK)$ 和 $(24, (c, abcf)) \in L(IK)$.

3.3 基于近似算子的近似概念获取方法

定义 12 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景. 记

$$H_G^{\square}(IK) = \{([\underline{g}], (\underline{R}(g), \overline{R}(g))) \mid g \in G\}$$

对任意的 $g_i, g_j \in G$, 若

$$(\underline{R}(g_i), \overline{R}(g_i)) \subseteq (\underline{R}(g_j), \overline{R}(g_j))$$

则记

$$([\underline{g}_i], (\underline{R}(g_i), \overline{R}(g_i))) \leq ([\underline{g}_j], (\underline{R}(g_j), \overline{R}(g_j)))$$

并称 $(H_G^{\square}(IK), \leq)$ 是 IK 的对象近似直观图.

例 10(续例 2) 表 2 所示不完备背景的对象近似直观图如图 14 所示.

根据定义 12 和定义 4 可知, 不完备背景 IK 的对象近似直观图和并置背景 $IK_- | IK_+$ 的对象直观图之间也存在如下的一一对应关系.

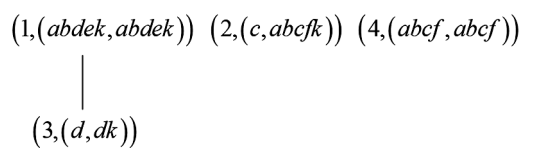


图 14 对象近似直观图 $(H_G^{\square}(IK), \leq)$

推论 3 对任意的 $([\underline{g}], g^*) \in (H_G^*(IK_- | IK_+), \leq)$, 存在 $([\underline{g}], (\underline{R}(g), \overline{R}(g))) \in (H_G^{\square}(IK), \leq)$, 有

$$([\underline{g}], g^*)_m = ([\underline{g}], (\underline{R}(g), \overline{R}(g)))$$

定理 11 设 $IK = (G, M, \{+, ?, -\}, J)$ 是不完备背景, $(H_G^{\square}(IK), \leq)$ 是 IK 的对象近似直观图.

则对任意的 $([g], (\underline{R}(g), \overline{R}(g))) \in H_G^\square(IK)$, 有

$$\lambda_\cap (\uparrow ([g], (\underline{R}(g), \overline{R}(g)))) = (\bigcup_{j \in \tau} [g_j], (\underline{R}(g), \overline{R}(g))) \in L(IK)$$

式中

$$([g], (\underline{R}(g), \overline{R}(g))) \leq ([g_j], (\underline{R}(g_j), \overline{R}(g_j)))$$

τ 为指标集.

证 由推论 3 以及定理 10 可证.

定理 11 表明, 对于不完备背景, 我们可以通过其对象近似直观图得到部分的近似概念. 再根据近似概念的上确界运算, 便可以得到所有的近似概念. 具体的求解步骤为:

- 1) 画出 IK 的对象近似直观图 $(H_G^\square(IK), \leq)$.
- 2) 对 $(H_G^\square(IK), \leq)$ 中的元素, 根据定理 2 中的式(1) 进行运算 $\lambda_\cap \circ \uparrow$.
- 3) 对步骤 2) 得到的近似概念, 根据定理 8 进行上确界运算便可得其他的近似概念.

例 11(续例 10) 对于 $(H_G^\square(IK), \leq)$ 中的元素 $(3, (d, dk))$, 通过定理 2 中的式(1) 可得

$$\begin{aligned} \uparrow (3, (d, dk)) &= \{(3, (d, dk)), (1, (abdek, abdek))\} \\ \lambda_\cap (\uparrow (3, (d, dk))) &= (13, (d, dk)) \end{aligned}$$

由图 11 可以验证 $(13, (d, dk)) \in L(IK)$.

4 结束语

本文利用直观图研究不完备背景的三支近似概念和近似概念的获取方法. 首先借助三支近似概念格与某些特定形式背景的概念格的同构关系, 通过特定形式背景的直观图给出三支近似概念的获取方法; 接着, 利用三支近似算子定义的三支近似直观图给出相应的获取方法. 而对于近似概念, 采用与三支近似概念获取方法相同的研究方式, 从格同构和近似算子两个角度给出相应的获取方法.

另外, 文献[20]中已将文献[19]的近似概念归到了部分已知概念的框架下. 关于部分已知概念还有其他两种类型, 后续将进一步借助直观图研究其他两类部分已知概念的获取方法.

参考文献:

- [1] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations [M]. Berlin: Springer, 1999.
- [2] CHO W C, RICHARDS D. Improvement of Precision and Recall for Information Retrieval in a Narrow Domain: Reuse of Concepts by Formal Concept Analysis [C] //IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence (WI'04). Beijing: IEEE, 2005: 370-376.
- [3] TONELLA P. Using a Concept Lattice of Decomposition Slices for Program Understanding and Impact Analysis [J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2003, 29(6): 495-509.
- [4] SNÁŠEL V, HORÁK Z, ABRAHAM A. Understanding Social Networks Using Formal Concept Analysis [C] //2008 IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology. Sydney: IEEE, 2008: 390-393.
- [5] LANG G M, YAO Y Y. Formal Concept Analysis Perspectives on Three-Way Conflict Analysis [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2023, 152: 160-182.
- [6] ZHI H L, LI J H, LI Y N. Multilevel Conflict Analysis Based on Fuzzy Formal Contexts [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(12): 5128-5142.
- [7] HAO F, MING Y, PEI Z, et al. K-Clique Community Detection in Social Networks Based on Formal Concept Analysis [J]. IEEE Systems Journal, 2017, 11(1): 250-259.
- [8] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-Way Formal Concept Analysis [C] //MIAO D, PEDRYCZ W, ŚLEZAK D, et al. International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Cham: Springer, 2014: 732-741.

- [9] YAO Y Y. An Outline of a Theory of Three-Way Decisions [C] //International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer, 2012: 1-17.
- [10] CHEN X Y, QI J J, ZHU X M, et al. Unlabelled Text Mining Methods Based on Two Extension Models of Concept Lattices [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(2): 475-490.
- [11] SHIVHARE R, CHERUKURI A K. Three-Way Conceptual Approach for Cognitive Memory Functionalities [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 21-34.
- [12] SINGHP K. Medical Diagnoses Using Three-Way Fuzzy Concept Lattice and Their Euclidean Distance [J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(3): 3283-3306.
- [13] HAO F, YANG Y X, MIN G Y, et al. Incremental Construction of Three-Way Concept Lattice for Knowledge Discovery in Social Networks [J]. Information Sciences: an International Journal, 2021, 578(C): 257-280.
- [14] 刘忠慧, 李鑫, 闵帆. 内涵粗糙三支概念及个性化推荐 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2022, 52(5): 774-783.
- [15] QI J J, QIAN T, WEI L. The Connections between Three-Way and Classical Concept Lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 143-151.
- [16] QIAN T, WEI L, QI J J. Constructing Three-Way Concept Lattices Based on Apposition and Subposition of Formal Contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 116(C): 39-48.
- [17] BURMEISTER P, HOLZER R. On the Treatment of Incomplete Knowledge in Formal Concept Analysis [M] //Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2000: 385-398.
- [18] KRUPKA M, LASTOVICKA J. Concept Lattices of Incomplete Data [C] //DOMENACH F, IGNATOV DI, POELMANS J. International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin: Springer, 2012: 180-194.
- [19] LI J H, MEI C L, LV Y J. Incomplete Decision Contexts: Approximate Concept Construction, Rule Acquisition and Knowledge Reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(1): 149-165.
- [20] YAO Y Y. Interval Sets and Three-Way Concept Analysis in Incomplete Contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 3-20.
- [21] REN R S, WEI L, YAO Y Y. An Analysis of Three Types of Partially-Known Formal Concepts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2018, 9(11): 1767-1783.
- [22] LI M Z, WANG G Y. Approximate Concept Construction with Three-Way Decisions and Attribute Reduction in Incomplete Contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 165-178.
- [23] WEI L, WAN Q. Granular Transformation and Irreducible Element Judgment Theory Based on Pictorial Diagrams [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(2): 380-387.
- [24] 万青, 马盈仓, 李金海. 基于直观图的三支概念获取及属性特征分析 [J]. 计算机科学与探索, 2022, 16(12): 2879-2889.

责任编辑 张枸