

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2025.10.016

李善倾, 苏可欣, 袁鸿. 复杂形状固支功能梯度板的弯曲问题分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版): 2025, 47(10): 181-194.

复杂形状固支功能梯度板的弯曲问题分析

李善倾¹, 苏可欣¹, 袁鸿^{1,2}

1. 暨南大学 力学与建筑工程学院, 广州 510632; 2. 广州理工学院 建筑工程学院, 广州 510540

摘要: 在工程实践中, 功能梯度板的弯曲问题往往只有在边界条件简单时才有解析解, 用诸如有限元法之类的数值方法构建试函数求解时需特定施加条件, 较为复杂。而 R -函数可以解决此问题。引入 R -函数理论, 与变分法相结合, 以隐函数形式处理复杂边界条件, 简便地构造满足边界条件的试函数。阐述了变分原理和 R -函数理论, 推导了功能梯度板弯曲问题的变分方程, 并通过矩形、U 型板等的数值算例, 验证了该方法的可行性与准确性, 为解决具有复杂边界条件的功能梯度板弯曲问题提供了新的方法。

关键词: 复杂形状; 试函数; 功能梯度板; R -函数理论; 变分法

中图分类号: O341; TB301

文献标识码: A

文章编号: 1673-9868(2025)10-0181-14

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Analysis for Bending Problems of Functionally Supported Gradient Plates with Complex Shapes

LI Shanqing¹, SU Kexin¹, YUAN Hong^{1,2}

1. School of Mechanics and Construction Engineering, Jinan University, Guangzhou 510623, China;

2. School of Architectural Engineering, Guangzhou Institute of Science and Technology, Guangzhou 510540, China

Abstract: In engineering practice, analytical solutions for the bending problem of functionally graded plates are usually available only when the boundary conditions are simple. When constructing trial functions by means of numerical methods and the like to solve the problem, specific conditions need to be imposed, which is rather complicated. However, the R -function can solve this problem. This study incorporates the R -function theory with the variational method to deal with complex boundaries in the form of implicit functions, thereby facilitating the construction of trial functions that meet the boundary conditions. This

收稿日期: 2025-01-22

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11402099); 广州市科技计划项目(201904010141)。

作者简介: 李善倾, 博士, 副教授, 硕士研究生导师, 主要从事力学数值方法研究。

paper elaborates on the variational principle and R -function theory, derives the variational equation for the bending problem of functionally graded plates, and validates the feasibility and accuracy of the method through numerical examples of rectangular, U-shaped, and L-shaped plates, presenting a novel approach for resolving the bending problems of functionally graded plates with complex boundaries.

Key words: complex shape; trial function; functionally graded plate; R -function theory; variational method

功能梯度材料广泛用于航空航天、生物医学工程、核工业、土木与机械工程等领域。功能梯度板作为一类特殊的线弹性板,其特殊之处在于材料参数(如杨氏模量)在厚度方向呈梯度变化。适用于线弹性板的求解理论在满足一定条件时也可应用于功能梯度板的求解。许多学者对功能梯度板的力学性能展开了研究。解决这类问题的方法主要基于特定的剪切变形理论、有限元法及其他特定理论。

文献[1]基于 von Karman 非线性运动学,采用一阶剪切变形理论,通过牛顿-拉夫森迭代技术提出了一种非线性有限元方法,研究了多向多孔材料功能梯度矩形板的弹塑性特性。文献[2]提出了一种广义单变量剪切变形板理论,用于分析多孔功能梯度矩形板的自由振动。文献[3]求解了一种具有通厚孔隙率的智能层复合材料和功能梯度材料矩形板的静态弯曲问题。文献[4]用高阶剪切法和法向变形板理论分析了不可压缩矩形功能梯度板的弯曲、屈曲和自由振动。文献[5-10]基于各种剪切变形理论提出了适用于分析不同状况的功能梯度矩形板的弯曲、自由振动和屈曲的无网格方法。文献[11]采用无单元 kp-Ritz 方法对具有任意边界条件的功能梯度矩形板在机械和热载荷作用下进行了静力分析。文献[12]提出了一种基于边缘的光滑有限元法,用于功能梯度材料正方形板的静态、自由振动和屈曲分析。文献[13]提出了基于节点的应变平滑的一种改进的有限元方法,应用于分析功能梯度正方形板的静态、自由振动和机械热屈曲问题。文献[14]提出了一种基于等几何方法和高阶变形板理论的分析方法,研究了功能梯度材料矩形与圆形板的力学行为。文献[15]提出了一种改进的无网格径向点插值方法,分析了功能梯度矩形板的非线性弯曲问题。文献[16]基于 Levinson 板块理论和一阶剪切变形板块理论对功能梯度厚圆扇形板进行了弯曲分析。文献[17]用正弦剪切变形理论分析了功能梯度陶瓷-金属矩形板的弯曲问题。文献[18]基于修正的耦合应力理论、Kirchhoff/Mindlin 板理论以及 von Karman 几何非线性理论研究了弹性基础上简支功能梯度微孔矩形板的非线性弯曲和自由振动响应问题。文献[19]提出了一种简单的一阶剪切变形理论,用于分析功能梯度矩形板的弯曲和自由振动。文献[20]基于无网格自然单元法建立了功能梯度板的一阶剪切变形理论的自由振动分析格式,并通过矩形功能梯度板的基频优化了实例验证算法的可行性和有效性。文献[21]将能量辐射传递法推广到矩形功能梯度板模型中,预测结构的高频振动响应。文献[22]提出了基于 S-R 理论和分解定理的无网格法,用于求解矩形功能梯度板的非线性弯曲问题。文献[23]提出了一种简单精化板理论,利用此理论分析矩形功能梯度板的弯曲问题时只需 3 个未知量,而分析矩形功能梯度板的自由振动问题时只需 1 个未知量。文献[24]基于一阶剪切变形板理论提出了求解功能梯度板自由振动问题的 Cel-Based 光滑有限元方法。

总之,学者们对功能梯度板的研究成果主要集中在对功能梯度矩形板、圆扇形板、圆形板的研究,很少有对凹凸不规则复杂形状功能梯度板的研究。本研究基于一阶剪切变形理论,针对复杂形状功能梯度板弯曲问题展开探索。引入 R -函数理论^[25],借助其隐函数形式构建方程,可精准构造出复杂形状板的边界条件,能够便捷地描绘含缺角、凹凸及非对称等特征的一般性复杂形状,在形状描述的灵活性方面更优,为凹凸不规则复杂形状功能梯度板的分析提供新途径。通过引入 R -函数理论,可以方便地构造具有不规则凹凸形状的功能梯度板的挠度函数 w ,确保这些函数满足边界条件。 R -函数理论可以用隐式函数形式描述复

杂区域, 通过归一化方程 $\omega=0$ 表示问题边界, 并通过不等式 $\omega>0$ 定义区域本身。随后, 使用变分法求解这些不规则形状的功能梯度板的挠度函数。

本研究将 R -函数理论运用到功能梯度板的弯曲问题中, 以隐函数形式构造了满足复杂形状板边界条件的方程, 通过对功能梯度板弯曲总能量方程的变分, 求解出了复杂形状功能梯度板弯曲问题的解, 给出了不规则形状功能梯度板的详细数值分析案例。使用 MATLAB 软件求解变分公式, 并将所得结果与有限元分析数据进行比较, 以验证所提出方法的可靠性。

1 材料属性

研究对象是板厚恒为 h 的功能梯度板。功能梯度板由陶瓷和钢复合而成, 上表面为陶瓷, 下表面为钢, 其弹性模量符合幂律函数, 则功能梯度板的弹性模量 $E(z)$ 表示为该板的弹性参数随厚度变化的律分布, 其值为:

$$E(z) = (E_c - E_s) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_s \quad (1)$$

式中: $k(k \geq 0)$ 表示梯度指数; 下标中的 c 和 s 分别代表陶瓷和钢, E_c 是陶瓷的弹性模量, E_s 是钢的弹性模量; z 是厚度方向坐标 $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right)$ 。

2 用变分法计算功能梯度板的弯曲问题

在修正的一阶剪切变形理论中, 横向位移 w 分为弯曲项和剪切项

$$w = w_b + w_s \quad (2)$$

式中: w_b 为弯曲项; w_s 为剪切项。

假设:

$$\varphi_x = -w_{bx} \quad \varphi_y = -w_{by} \quad (3)$$

式中: 下标 x 和 y 分别代表对弯曲项 x 和 y 的偏导数。得到以下位移场:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z w_{bx} \quad (4)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z w_{by} \quad (5)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (6)$$

式中: u 、 v 、 w 分别为 x 、 y 、 z 方向位移; u_0 、 v_0 分别是中面($z=0$)处 x 、 y 方向位移; w_b 为弯曲项位移, w_s 为剪切项位移。

由(4)–(6)式得:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial w_b}{\partial y} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) = k \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \gamma_{yz}(x, y, z) = k \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{cases} \quad (8)$$

式中: ϵ_x 、 ϵ_y 分别为板面内沿 x 、 y 轴正应变; γ_{xy} 为板面内剪应变, γ_{xz} 、 γ_{yz} 为横向剪应变。

当考虑一阶剪切变形理论时, 功能梯度板的线性本构方程为:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中: σ_x 、 σ_y 分别为板面内沿 x 、 y 轴正应力; τ_{xy} 为板面内剪应力, τ_{yz} 、 τ_{xz} 为横向剪应力; $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})^T$ 和 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})^T$ 分别是应力矢量和应变矢量; 刚度系数 Q_{ij} 表示为:

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \mu^2} \\ Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \mu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = k \frac{E(z)}{2(1 + \mu)} \end{cases} \quad (10)$$

式中: μ 为泊松比。

在直角坐标系 $oxyz$ 下, 整个弹性体势能为:

$$V_{\epsilon} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (11)$$

式中: V_{ϵ} 为弹性体势能; 积分域 V 为功能梯度板所占空间区域。

由于剪切一阶变形理论是二维剪切变形理论, 当考虑二维剪切变形理论时, $\epsilon_z = 0$, 即:

$$\begin{aligned} V_{\epsilon} &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iint_A \left(N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right) dx dy + \\ &= \frac{1}{2} \iint_A \left(-2M_{xy} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial w_s}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{cases} (N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \end{cases} \quad (13)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (14)$$

对于(14)式, 若为厚板或中厚板, 则需变为:

$$(Q_x, Q_y) = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (15)$$

式中: K 是与板厚度相关的修正系数。

对于功能梯度板的应变能计算, 需将厚度方向离散化。将板的厚度范围 $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ 离散化为 n 个小的厚度区间, 每个区间的厚度增量为 $\Delta z = \frac{h}{n}$ 。定义厚度离散点 $z_i = -\frac{h}{2} + i \times \Delta z, i = 0, 1, 2, \dots, n$ 。

计算每个厚度区间的应变能贡献: 对于每个厚度区间 $[z_i, z_{i+1}]$, 根据 $E(z)$ 随厚度变化的公式

$$E(z) = (E_c - E_s) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_s \quad (16)$$

计算该区间中点 $z_{\text{mid}} = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$ 处的 $E(z)$ 值。

计算该厚度区间对应板平面内的应变能贡献:

$$dV_\varepsilon = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (17)$$

式中: dz 在该区间近似于 Δz 。得到应变能:

$$dV_\varepsilon = \frac{1}{2} (\sigma_x(z_{\text{mid}}) \varepsilon_x(z_{\text{mid}}) + \sigma_y(z_{\text{mid}}) \varepsilon_y(z_{\text{mid}}) + \tau_{xz}(z_{\text{mid}}) \gamma_{xz}(z_{\text{mid}})) dx dy dz +$$

$$\frac{1}{2} (\tau_{yz}(z_{\text{mid}}) \gamma_{yz}(z_{\text{mid}}) + \tau_{xy}(z_{\text{mid}}) \gamma_{xy}(z_{\text{mid}})) dx dy dz \quad (18)$$

对所有厚度区间的应变能贡献进行求和, 得到近似的总应变能:

$$V_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} dV_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \iint_A (\sigma_x(z_{\text{mid}}) \varepsilon_x(z_{\text{mid}}) + \sigma_y(z_{\text{mid}}) \varepsilon_y(z_{\text{mid}}) + \tau_{xz}(z_{\text{mid}}) \gamma_{xz}(z_{\text{mid}})) dx dy +$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \iint_A (\tau_{yz}(z_{\text{mid}}) \gamma_{yz}(z_{\text{mid}}) + \tau_{xy}(z_{\text{mid}}) \gamma_{xy}(z_{\text{mid}})) dx dy \quad (19)$$

将(7—8)式代入(19)式并利用广义胡克定律得:

$$V_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4(\mu+1)} \iint_A E(z_{\text{mid}}) \left(\frac{\partial}{\partial y} u_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} V_0(x, y) - 2z_{\text{mid}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} w_b(x, y) \right)^2 dx dy -$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}})}{v^2 - 1} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right) dx dy -$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) \mu}{\mu^2 - 1} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \right) dx dy -$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}})}{v^2 - 1} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \right) dx dy -$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) \mu}{\mu^2 - 1} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, y) - z_{\text{mid}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right) dx dy +$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4(\mu+1)} \iint_A \left[E(z_{\text{mid}}) \left(\frac{\partial}{\partial x} w_s(x, y) \right)^2 + E(z_{\text{mid}}) \left(\frac{\partial}{\partial y} w_s(x, y) \right)^2 \right] dx dy \quad (20)$$

式中: $E(z_{\text{mid}})$ 为厚度区间中点处的弹性模量。

现在把 u 、 v 、 w 的表达式设定为:

$$u = \sum_m A_m u_m \quad v = \sum_m B_m v_m \quad w = \sum_m C_m w_m \quad (21)$$

式中: A_m 、 B_m 、 C_m 为待定系数; u_m 、 v_m 为设定函数; C_m 为互不依赖的 m 个待定系数; w_m 为满足板位移边界条件(即约束条件)的设定函数, w_{bm} 、 w_{sm} 分别为弯曲项设定函数和剪切项设定函数, $w_m = w_{bm} + w_{sm}$, 当研究对象为功能梯度薄板时, 不考虑厚度拉伸效应, 且横向位移中只考虑弯曲项, 则可假设 $w_m = w_{bm}$ 。这样, 不论 C_m 如何取值, (21)式所示的挠度 w 总能满足位移边界条件。注意: 挠度 w 的变分只是由系数 C_m 的变分来实现的; 设定函数 w_m 仅随坐标而变, 与上述变分完全无关。

为了确定系数 C_m , 需应用下列式子:

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_m} = \iiint_V f_z w_m dV + \iint_S \bar{f}_z w_m dS \quad (22)$$

式中: f_z 为方向 z 的体积力集度; $\bar{f}_z$ 为边界面力集度; S 是表面积分区域。

在薄板的弯曲问题中, 体力及面力都归入荷载 q 。由此可以得出 C_m 的 m 个线性方程用来确定 C_m , 从而由(20)式得出挠度 w , 求得板的内力。

根据最小势能原理, 总势能取极值的条件为:

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial A_m} = 0 \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial B_m} = 0 \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_m} = 0 \quad (23)$$

(23) 式又可以写成:

$$-\frac{\partial}{\partial A_m} \iiint_V v_m dV + \iiint_V F_x u_m dV + \iint_{S_\sigma} \bar{f}_x u_m dS = 0 \quad (24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial B_m} \iiint_V v_m dV + \iiint_V F_y v_m dV + \iint_{S_\sigma} \bar{f}_y v_m dS = 0 \quad (25)$$

$$-\frac{\partial}{\partial C_m} \iiint_V v_m dV + \iiint_V F_z w_m dV + \iint_{S_\sigma} \bar{f}_z w_m dS = 0 \quad (26)$$

式中: F_x 、 F_y 、 F_z 分别为 x 、 y 、 z 方向集力; $\bar{f}_x$ 、 $\bar{f}_y$ 为 x 、 y 方向边界面力集度。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_m} = & \sum_{i=0}^{n-1} \iint_A \left[\frac{E(z_{\text{mid}})(z_{\text{mid}})^2}{\mu+1} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w_b(x, y) \right)^2 - \frac{E(z_{\text{mid}})\mu(z_{\text{mid}})^2}{\mu^2-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right] dx dy - \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2(\mu^2-1)} \iint_A \left[E(z_{\text{mid}})(z_{\text{mid}})^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b(x, y) \right)^2 + E(z_{\text{mid}})(z_{\text{mid}})^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b(x, y) \right)^2 \right] dx dy + \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4(\mu+1)} \iint_A \left[E(z_{\text{mid}}) \left(\frac{\partial}{\partial x} w_s(x, y) \right)^2 + E(z_{\text{mid}}) \left(\frac{\partial}{\partial y} w_s(x, y) \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (27)$$

3 R-函数理论

根据 R -函数理论, 一个复杂区域 ω_0 的各个子域可通过布尔操作 $\vee_a$ 、 $\wedge_a$ 来实现($\vee_a$ 、 $\wedge_a$ 分别为求并集与求交集)。若各子域的函数 ω_l 满足一阶规范化方程, 则 ω_0 也满足一阶规范化方程。

一阶规范化方程定义为:

$$\omega_l(x, y) = 0 \quad |\nabla \omega_l| = 1, \forall (x, y) \in \Omega \quad (28)$$

$$\omega_l(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad (29)$$

式中: Ω 为复杂形状区域; $\partial\Omega$ 为区域边界线。

设 X 与 Y 满足一阶规范化方程, 则布尔操作 $X \vee_a Y$ 、 $X \wedge_a Y$ 也满足一阶规范化方程:

$$\begin{cases} X \vee_a Y = \frac{1}{1+\alpha} (X + Y + \sqrt{X^2 + Y^2 - 2\alpha XY}) \\ X \wedge_a Y = \frac{1}{1+\alpha} (X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2 - 2\alpha XY}) \end{cases} \quad (30)$$

式中: α 是布尔操作参数 ($-1 \leq \alpha \leq 1$)。

4 推导变分方程

挠度的表达式为:

$$w = \omega_0^2 \sum_m C_m w_m \quad (31)$$

在弯曲问题中, 将 R -函数加入公式(31), 讨论固支边的情况, 固支边挠度为 0, 转角为 0。参考 R -函数的性质, 将得到的 ω_0 进行平方使其满足固支边的边界条件。

将(31)式代入(20)式, 得:

$$\frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial x^2} = \sum_m C_m \left[\left(2 \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right)^2 + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \right) \tau_{bm} + 4\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \frac{\partial \tau_{bm}}{\partial x} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial x^2} \right] \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial y^2} = \sum_m C_m \left[\left(2 \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial y} \right)^2 + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \right) \tau_{bm} + 4\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \tau_{bm}}{\partial y} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial y^2} \right] \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial x \partial y} = 2 \sum_m C_m \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \tau_{bm} + \omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \tau_{bm} + \omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \frac{\partial \tau_{bm}}{\partial y} + \omega_0^3 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \tau_{bm}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial x \partial y} \right) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \tau_s(x, y)}{\partial x} = \sum_m C_m \left(2\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \tau_{sm} + \omega_0^2 \frac{\partial \tau_{sm}}{\partial x} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial y} = \sum_m C_m \left(2\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \tau_{sm} + \omega_0^2 \frac{\partial \tau_{sm}}{\partial y} \right) \quad (36)$$

进一步对 C_i 求导 ($i=1, 2, 3, \dots, m-1, m$), 可得:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial x^2} = \left(2 \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right)^2 + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \right) \tau_{bi} + 4\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \frac{\partial \tau_{bi}}{\partial x} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \tau_{bi}}{\partial x^2} \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial y^2} = \left(2 \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial y} \right)^2 + 2\omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \right) \tau_{bi} + 4\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \tau_{bi}}{\partial y} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \tau_{bi}}{\partial y^2} \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\partial^2 \tau_{bm}}{\partial x \partial y} = 2 \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \tau_{bi} + \omega_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \tau_{bi} + \omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \frac{\partial \tau_{bi}}{\partial y} + \omega_0^3 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \tau_{bi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tau_{bi}}{\partial x \partial y} \right) \quad (39)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\partial \tau_s}{\partial x} = 2\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \tau_{si} + \omega_0^2 \frac{\partial \tau_{si}}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial C_i} \frac{\partial \tau_s}{\partial y} = 2\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \tau_{si} + \omega_0^2 \frac{\partial \tau_{si}}{\partial y} \end{cases} \quad (40)$$

将(32)–(40)式代入(22)式, 化简之后得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial C_i} = & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_m C_m \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) \sigma_{11}}{2(\mu+1)} \left[\left(w_0 \frac{\partial \tau_{si}}{\partial x} + 2\tau_{si} \sigma_{14} \right)^2 + \left(w_0 \frac{\partial \tau_{si}}{\partial y} + 2\tau_{si} \sigma_{13} \right)^2 \right] dx dy - \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_m C_m \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) \mu z_{\text{mid}}^2}{\mu^2 - 1} (\sigma_7 (w_{bj} \sigma_8 + \sigma_{11} \sigma_4 + 4\sigma_{13} w_0 \sigma_2) + (w_{bj} \sigma_{10} + \sigma_{11} \sigma_5 + 4\sigma_{14} w_0 \sigma_1) \sigma_6) dx dy + \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_m C_m \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) z_{\text{mid}}^2}{\mu + 1} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + 2\sigma_{13} w_0 \sigma_{12} + 2\sigma_{14} w_0 \sigma_9 + 2\sigma_{13} w_{bi} \sigma_{14} + 2w_{bi} w_0 \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial y} \right) dx dy - \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_m C_m \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) z_{\text{mid}}^2}{\sigma_3} (\sigma_7 (w_{bj} \sigma_{10} + 2\sigma_{11} \sigma_5 + 8\sigma_{14} w_0 \sigma_1) + \sigma_6 (w_{bj} \sigma_8 + 2\sigma_{11} \sigma_4 + 8\sigma_{13} w_0 \sigma_2)) dx dy + \\ & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_m C_m \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}}) z_{\text{mid}}^2}{\mu + 1} \left(2\sigma_{11} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + 4\sigma_{13} w_0 \sigma_1 + 4\sigma_{14} w_0 \sigma_2 + 4\sigma_{13} w_{bj} \sigma_{14} + 4w_{bj} w_0 \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (41)$$

式中: $\sigma_1 = \frac{\partial}{\partial x} w_{bj}(x, y)$; $\sigma_2 = \frac{\partial}{\partial y} w_{bj}(x, y)$; $\sigma_3 = 2(\mu^2 - 1)$; $\sigma_4 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_{bj}(x, y)$; $\sigma_5 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_{bj}(x, y)$;

$\sigma_6 = w_{bi}(x, y) \sigma_8 + \sigma_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_{bi}(x, y) + 4\sigma_{13} w_0(x, y) \sigma_9$; $\sigma_7 = w_{bi}(x, y) \sigma_{10} + \sigma_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_{bi}(x, y) +$

$4\sigma_{14} w_0(x, y) \sigma_{12}$; $\sigma_8 = 2w_0(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_0(x, y) + 2\sigma_{13}^2$; $\sigma_9 = \frac{\partial}{\partial y} w_{bi}(x, y)$; $\sigma_{10} = 2w_0(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0(x,$

$y) + 2\sigma_{14}^2$; $\sigma_{11} = w_0(x, y)^2$; $\sigma_{12} = \frac{\partial}{\partial x} w_{bi}(x, y)$; $\sigma_{13} = \frac{\partial}{\partial y} w_0(x, y)$; $\sigma_{14} = \frac{\partial}{\partial x} w_0(x, y)$ 。

经推导可得系数方程组:

$$\mathbf{A}(C_1, \dots, C_m) = \mathbf{B} \quad (42)$$

式中: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times m}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times 1}$ 为荷载向量。

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}})\sigma_{11}}{2(\mu+1)} \left[\left(w_0 \frac{\partial w_{si}}{\partial x} + 2w_{si}\sigma_{14} \right)^2 + \left(w_0 \frac{\partial w_{si}}{\partial y} + 2w_{si}\sigma_{13} \right)^2 \right] dx dy - \\ & \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}})\mu z_{\text{mid}}^2 (\sigma_7(w_{bj}\sigma_8 + \sigma_{11}\sigma_4 + 4\sigma_{13}w_0\sigma_2) + (w_{bj}\sigma_{10} + \sigma_{11}\sigma_5 + 4\sigma_{14}w_0\sigma_1)\sigma_6)}{\mu^2 - 1} dx dy + \\ & \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}})z_{\text{mid}}^2}{\mu + 1} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + 2\sigma_{13}w_0\sigma_{12} + 2\sigma_{14}w_0\sigma_9 + 2\sigma_{13}w_{bi}\sigma_{14} + 2w_{bi}w_0 \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial y} \right) dx dy - \\ & \iint_A E(z_{\text{mid}})z_{\text{mid}}^2 \left(\frac{\sigma_7(w_{bj}\sigma_{10} + 2\sigma_{11}\sigma_5 + 8\sigma_{14}w_0\sigma_1)}{\sigma_3} + \frac{\sigma_6(w_{bj}\sigma_8 + 2\sigma_{11}\sigma_4 + 8\sigma_{13}w_0\sigma_2)}{\sigma_3} \right) dx dy + \\ & \iint_A \frac{E(z_{\text{mid}})z_{\text{mid}}^2}{\mu + 1} \left(2\sigma_{11} \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + 4\sigma_{13}w_0\sigma_1 + 4\sigma_{14}w_0\sigma_2 + 4\sigma_{13}w_{bj}\sigma_{14} + 4w_{bj}w_0 \frac{\partial \sigma_{14}}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (43)$$

$$b_{ij} = \int_{\Omega} q\omega_0^2 w_i d\Omega \quad (44)$$

式中: $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m; \Omega$ 为笛卡尔坐标系中横截面($x \circ y$)所包含的区域。

5 数值算例

例 1(功能梯度薄板) 设 U 形功能梯度薄板泊松比取 0.3, 板厚度 h 取 0.01 m, 均布荷载大小 q 为 5×10^3 Pa, 如图 1 所示, 其中 $a = b = 0.5$ m, $c = d = 0.25$ m。上表面为陶瓷, 下表面为钢, 其弹性模量符合幂律函数, 则功能梯度薄板的弹性模量 $E(z)$ 表示为该板的弹性参数随厚度变化的律分布, 如公式(1)所示。陶瓷的弹性模量 E_c 取 210 GPa, 钢的弹性模量 E_s 取 390 GPa。功能梯度材料的组成材料确定后, 板的弹性模量取决于梯度指数。随着梯度指数的增大, 板的材料中陶瓷成分的比例逐渐减少而钢成分的比例逐渐增多。当梯度指数增大到无穷时, 板的材料近似于纯钢板, 从而最大挠度也近似于钢板的最大挠度。在此算例中分别取 $k = 0, k = 1, k = 10$ 和 $k = +\infty$ 。

令 $n = 20$, 将板的厚度范围 $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ 离散化为 20 个小的厚度区间, 每个区间的厚度增量为 $\Delta z = \frac{h}{n}$,

定义厚度离散点 $z_i = -\frac{h}{2} + i \times \Delta z (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 。计算每个厚度区间的应变能贡献: 对于每个厚度

区间 $[z_i, z_{i+1}]$, 计算该区间中点 $z_{\text{mid}} = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$ 处的 $E(z)$ 值, 代入(42)式即可得系数方程组。

根据 R- 函数理论, U 型功能梯度薄板的 ω_0 表达式为:

$$\omega_0 = (\omega_1 \wedge_a \omega_2) \wedge_a (\omega_3 \vee_a \omega_4) \quad (45)$$

$$\text{式中: } \omega_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0; \omega_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0; \omega_3 = (c - x) \geq 0; \omega_4 = \frac{y^2 - d^2}{2d} \geq 0。$$

当研究对象为功能梯度薄板时不考虑厚度拉伸效应, 且横向位移只考虑弯曲项。假设 $w_m = w_{bm}, w_s = 0$, 则设定函数 w_m 取 $1, x, y^2, x^3, y^4, x^5, y^6, y^8, xy^4, x^3y^2$ 。

数值计算中将 U 形功能梯度薄板划分为 3 个矩形, 第一个矩形板划分为 $4N \times N$ 网格, 第二个矩形板划分为 $3N \times 2N$ 网格, 第三个矩形板划分为 $4N \times N$ 网格。

当 $k = 0$ 和 $k = +\infty, m = 10, N$ 取不同值时, 中间点挠度结果如表 1。当 $k = 0, N = 12, m = 10$ 时, 本文方法与有限元法计算 $y = 0$ 上的挠度曲线结果对比如图 2。当 $k = +\infty, m$ 取不同值时, 计算 $y = 0$ 上的挠度曲线如图 3。说明了本文方法是收敛的、正确的。当取 $k = 0, k = 1, k = 10$ 和 $k = +\infty$, 试函数数量

$m = 10$, 网格数取 $N = 12$ 时, $y = 0$ 上的挠度曲线如图 4。变化趋势显示, 在其他条件相同的情况下, k 值越大, 挠度越小, 验证了本文方法的可行性与正确性。

表 1 N 取不同值时薄板中心点挠度

	N 的值	$k = 0$		$k = +\infty$	
		中心点挠度/mm	误差/%	中心点挠度/mm	误差/%
本文方法	4	0.636 2	100.14	0.366 1	113.91
	6	0.377 9	18.89	0.238 6	39.41
	8	0.342 1	7.62	0.185 4	8.34
	10	0.332 4	4.57	0.179 0	4.63
	12	0.319 1	0.40	0.171 8	0.39
有限元法	—	0.317 9	—	0.171 2	—

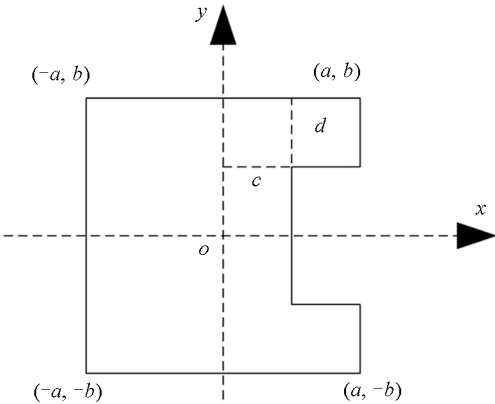


图 1 U 形功能梯度薄板

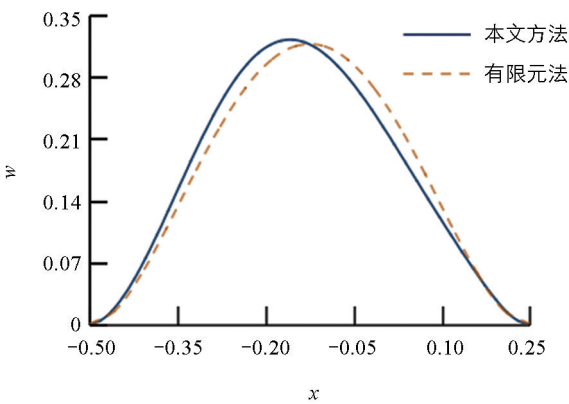


图 2 本文方法与有限元法的挠度曲线对比(薄板)

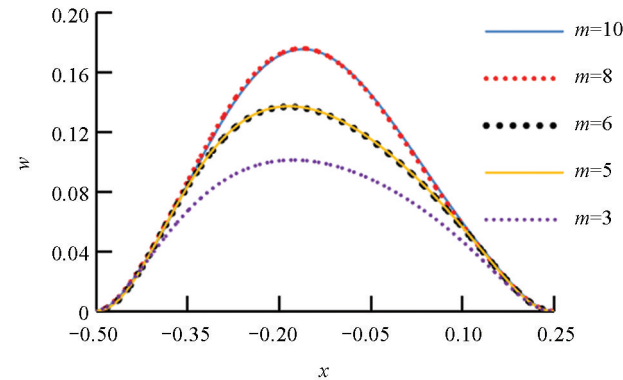


图 3 m 取不同值时的挠度曲线变化(薄板)

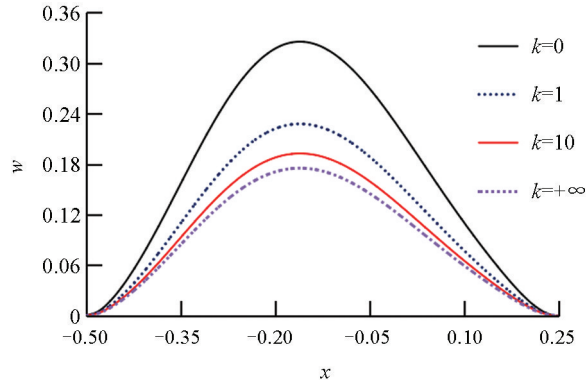


图 4 k 取不同值时的挠度曲线对比(薄板)

例 2(功能梯度中厚板) 设矩形功能梯度中厚板的边长分别为 $2a$ 和 $2b$, $a = b = 0.5$ m, 泊松比取 0.3 , 板厚度 h 取 0.12 m, 均布荷载大小 q 为 2×10^7 Pa, 如图 5 所示。鉴于当前板的宽度为 1 m, 厚度达 0.12 m, 故在相关计算中需要引入剪切修正因子 K , 取值为 $\frac{5}{6}$ 。其他参数取值如例 1。矩形功能梯度中厚板的上表面为陶瓷, 下表面为钢, 其弹性模量符合幂律函数, 则功能梯度中厚板的弹性模量 $E(z)$ 表示为该板的弹性参数随厚度变化的律分布, 如公式(1)。

根据 R -函数理论, 取:

$$\omega_0 = \omega_1 \wedge_a \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

(46)

式中： $\omega_1=\frac{a^2-x^2}{2a}\geqslant 0,\omega_2=\frac{b^2-y^2}{2b}\geqslant 0$ 。

将厚度离散化为 30 个小区间。假设 $w_m=w_{bm}+w_{sm}$ 。此板的形状为对称图形，设定挠度 w 的函数为 x 及 y 的偶函数，所以 w_{bm} 取 $7, 7x^2, 7y^2, 7x^4, 7y^4, 7x^2y^2, 7x^6, 7y^6, 7x^2y^4, 7x^4y^2$ 。 w_{sm} 取 $1, x^4, y^4, x^8, y^8, x^4y^4, x^{12}, y^{12}, x^4y^8, x^8y^4$ 。

数值计算中将矩形区域划分成 $N\times N$ 网格。当 $k=0$ 和 $k=+\infty$ ，试函数数量 $m=10$ ，网格数分别取 $10\times 10, 15\times 15, 20\times 20, 35\times 35$ 时，板中心点挠度结果如表 2。由表 2 可知本文方法计算的功能梯度中厚板中心点挠度是有效的。当 $k=+\infty, m=10$ 时，本文方法与有限元法计算 $y=0$ 上的挠度曲线吻合得很好（图 6）。由此证明了本文方法的可行性与正确性。当 $k=0, m$ 取不同值时，功能梯度板 $y=0$ 上的挠度曲线如图 7。当取 $k=0, k=1, k=10$ 和 $k=+\infty$ ，试函数数量 $m=10$ ，网格数取 35×35 时 $y=0$ 上的挠度曲线如图 8。

表 2 N 取不同值时中厚板中心点挠度

	网格密度	$k=0$		$k=+\infty$	
		中心点挠度/mm	误差/%	中心点挠度/mm	误差/%
本文方法	10×10	2.195 8	130.54	1.182 3	130.53
	15×15	1.570 0	64.84	0.845 4	64.84
	20×20	1.072 7	12.62	0.577 6	8.87
	35×35	0.941 1	1.19	0.506 8	1.19
有限元法	—	0.952 5	—	0.512 9	—

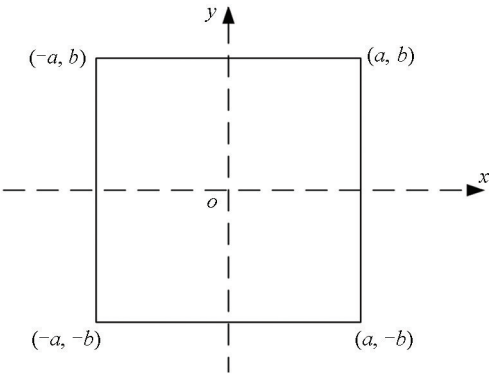


图 5 矩形功能梯度中厚板

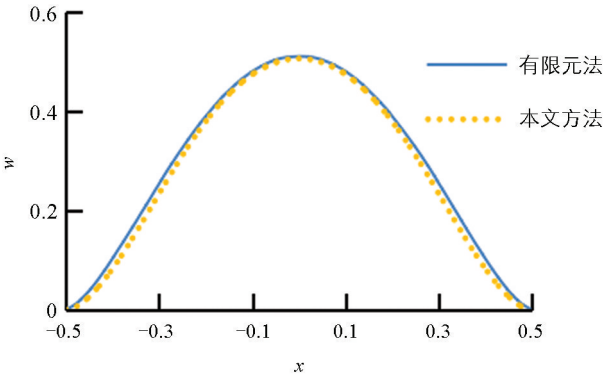


图 6 本文方法与有限元法的挠度曲线对比(中厚板)

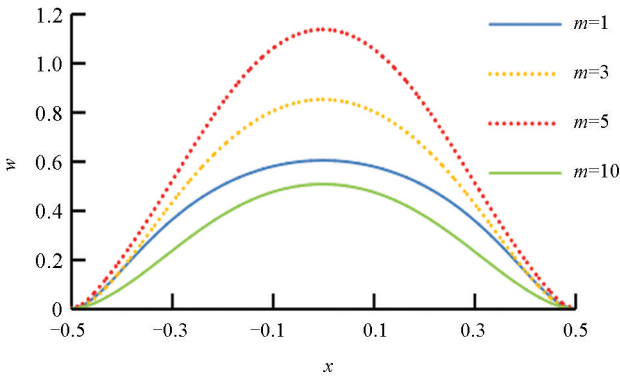


图 7 m 取不同值时的挠度曲线变化(中厚板)

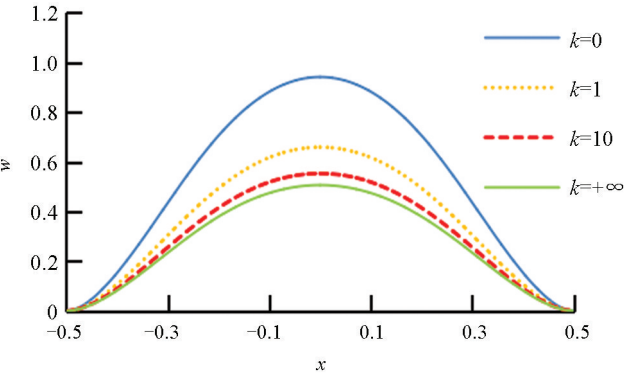


图 8 取 k 取不同值的挠度曲线对比(中厚板)

例 3(功能梯度厚板) 设功能梯度厚板的泊松比取 0.3, 板厚度 h 取 0.25 m, 均布荷载大小 q 为 2×10^8 Pa, 如图 9 所示。 $a=b=0.5$ m。鉴于当前板的宽度为 1 m, 厚度 0.25 m, 故在相关计算中需要引入剪切修正因子 K , 取值为 $\frac{5}{6}$ 。其他参数取值如例 1。矩形功能梯度厚板的上表面为陶瓷, 下表面为钢, 其弹性模量符合幂律函数, 则功能梯度厚板的弹性模量 $E(z)$ 表示为该板的弹性参数随厚度变化的律分布, 如公式(1)。

根据 R -函数理论, 取 ω_0 为:

$$\omega_0 = (\omega_1 \wedge_a \omega_2 \wedge_a \omega_3) \tag{47}$$

式中: $\omega_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0; \omega_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0; \omega_3 = \frac{(x-a)^2 + y^2 - r^2}{2r} \geq 0$ 。

将厚度离散化为 50 个小区间。此处板的形状为不对称图形, 设定挠度 w 的函数为 x 及 y 的偶函数和奇函数, 所以 w_{bm} 取 $1、x^2、y^2、x、y^4、x^3、y^6、xy^2、x^2y^2、x^2y^4$, w_{sm} 取 $1、0.3x^{12}、0.3y^{12}、0.3x^{11}、0.3y^{14}、0.3x^{13}、0.3y^{16}、0.3x^{11}y^2、0.3x^{12}y^2、0.3x^2y^{14}$ 。

将矩形区域划分成 $N \times N$ 网格, 获取所有坐标后, 去除半圆形所包含的坐标。当 $k=0$ 和 $k=+\infty$, 试函数数量 $m=10$, 网格数分别取 $10 \times 10、15 \times 15、35 \times 35$ 时, 板中心点挠度结果如表 3, 由表 3 可知本文方法计算的功能梯度厚板中心点挠度是有效的。当 $k=0, m=10$ 时, 有限元法与本文方法计算 $y=0$ 上的挠度曲线对比如图 10。由此证明了本文方法的可行性与正确性。当 $k=0$, 网格数为 $35 \times 35, m$ 取不同值时, 功能梯度板 $y=0$ 上的挠度曲线如图 11。当取 $k=0、k=1、k=10$ 和 $k=+\infty$, 试函数数量 $m=10$, 网格数取 35×35 时, $y=0$ 上的挠度曲线如图 12。

表 3 N 取不同值时厚板中心点挠度

	网格密度	$k=0$		$k=+\infty$	
		中心点挠度/mm	误差/%	中心点挠度/mm	误差/%
本文方法	10×10	1.815 7	8.30	0.977 7	8.30
	15×15	1.738 1	4.67	0.945 9	4.78
	35×35	1.615 5	3.64	0.869 9	3.65
有限元法	—	1.676 5	—	0.902 8	—

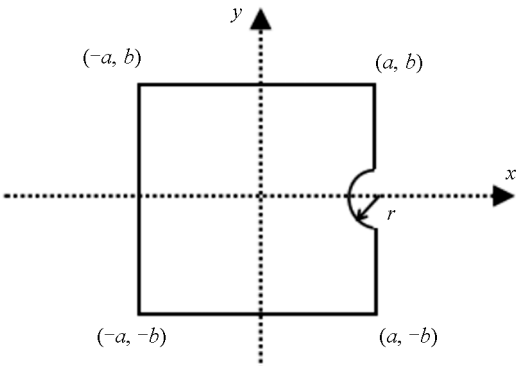


图 9 其他形状功能梯度厚板

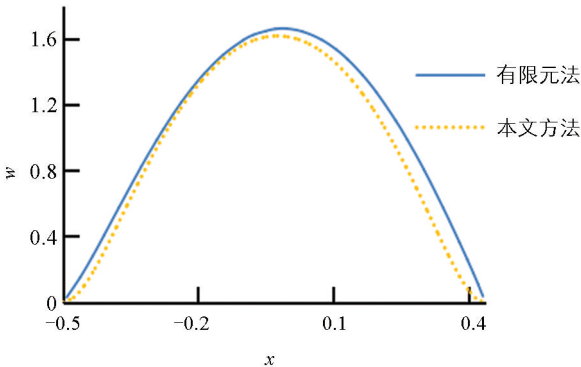


图 10 本文方法与有限元法的挠度曲线对比(厚板)

R -函数理论可精确描述复杂几何形状的边界条件, 将不规则形状转化为数学表达式, 极大地简化了数值计算过程并保障了几何信息的准确性。而变分法基于能量最小化原理, 把挠度问题转化为求解能量泛函最小值的问题。 R -函数理论与变分法的结合不仅能够妥善处理复杂的几何边界条件, 还能确保计算结果具备高精度, 在处理不同形状以及不同厚度的功能梯度板的挠度计算时展现出良好的有效性。在试函数数量

和网格划分精细程度方面,本文方法对计算结果有着重要影响。对于试函数,本文方法用于描述功能梯度板的可能变形模式。当试函数数量增加时,能更精细地拟合实际的变形状况。例如在考虑功能梯度板的剪切变形时,添加包含剪切变形相关项的试函数,便可更精准地描述板在受载下的实际变形,进而提高了计算结果的精度。同样,网格划分越精细,计算结果越接近有限元解。与有限元法的结果的一致性进一步证实了本文方法在工程应用中的价值。

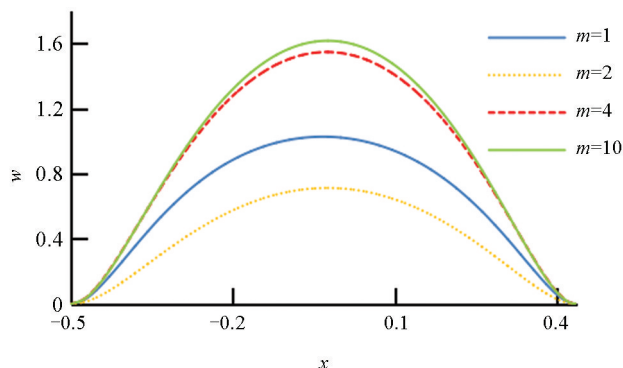


图 11 m 取不同值时的挠度曲线变化(厚板)

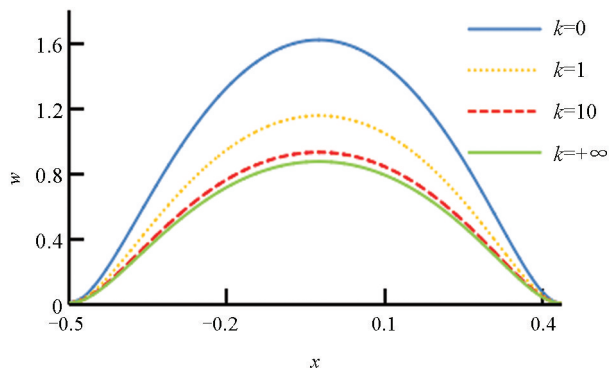


图 12 k 取不同值时的挠度曲线对比(厚板)

在计算实例中,本文方法与有限元法计算的结果存在一定偏差,可能由以下因素引起:

1) 本文选定的试函数可能在非边界区域意外地符合一些本不存在的边界条件,这种情形可能会干扰研究的计算结果。以 x^2 为例,该函数在 $x=0$ 的直线上恒为 0,这显然与考虑的情况相悖。

2) 本文的探讨中可能存在一个局限性,即在选取试验函数时可能未能纳入充足的数量。在分析中,可以观察到当 m 值偏低,意味着试验函数的数量较少时,最终得出的计算结果与有限元法的结果相比,存在偏差。这一发现说明,为了通过变分法获得更为精确的解,必须尽可能地增加试验函数的数量,以确保结果的可靠性和精确性。

3) 在对 R -函数进行积分操作时,可能会遇到分母在边界处为 0 的特殊情况。因此,必须采用类似于有限元分析的方法,通过划分网格并逐个求解各个网格单元的积分,然后累加以获得整体解。这一过程强调了网格划分的精细度对于最终结果准确性的重要性。在应用 R -函数理论与变分原理相结合的数值求解策略时,为了提高解的精度,应当在计算过程中采用尽可能密集的网络划分。

4) 在本文的讨论过程中,可能存在关于剪切修正系数的局限性。由于剪切修正系数的局限性,在某些特定情况,如特定的板厚、荷载以及材料分布组合下,可能会导致预测结果的精度不足,这在一定程度上限制了该剪切修正方法在厚板精确分析中的应用。尤其是当工程设计与分析对精度有较高要求时,可能需要采用更精确的剪切修正方法,或考虑采用可变剪切修正系数的理论来满足需求。为有效解决这一问题,可针对不同厚度的厚板开展实验与模拟分析,以确定相应的剪切修正系数,从而提高挠度计算的精度。鉴于此,未来的一个重要研究方向是基于厚板的厚度差异构建剪切修正系数模型,以便更精准地预测不同厚度厚板的挠度行为,为工程实践提供更可靠的理论支撑。

6 总结

变分法被广泛应用于解决工程和物理问题,特别是在计算功能梯度材料的变形和应力分布方面。然而,当遇到形状复杂的功能梯度板时,传统的变分法可能会遇到一些问题。这时,引入 R -函数的概念,可以作为一种补充方法来处理边界条件的复杂性。

R -函数理论能够在不直接定义边界条件的情况下,通过隐函数来描述复杂的几何形状。将 R -函数

理论与变分法结合使用, 可以有效地简化复杂边界条件下的功能梯度板弯曲问题。本文通过理论推导, 将 R -函数理论和变分原理结合, 为求解挠度变化提供了一个新方法。这种方法不仅提高了求解过程的效率, 而且也增加了模型的适用性和灵活性。本文通过结合具体的工程实例, 展示了这种结合方法的有效性。通过对比分析, 可以观察到本文方法的计算结果与有限元法计算结果的一致性, 验证了本文方法的准确性和可靠性。

此外, 本文还探讨了计算结果与变分法中使用的试函数选择、积分网格的划分等因素之间的关系。这种分析有助于优化计算过程, 提高结果的精度, 同时也为 R -函数在功能梯度板弯曲问题中的应用提供了理论支持和实践指导。

总之, R -函数理论与变分法的结合为解决具有复杂边界条件的功能梯度板弯曲问题提供了一种新的视角和方法, 这种结合能够提高计算效率。

参考文献:

- [1] JOSHI K K, KAR V R. Elastoplastic Behaviour of Multidirectional Porous Functionally Graded Panels: A Nonlinear FEM Approach [J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 2024, 48(1): 307-329.
- [2] WANG Z Z, WANG T, DING Y M, et al. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Plates Based on a New Generalized Single-Variable Shear Deformation Plate Theory [J]. Archive of Applied Mechanics, 2023, 93(6): 2549-2564.
- [3] PATHAN F, SINGH S, NATARAJAN S, et al. An Analytical Solution for the Static Bending of Smart Laminated Composite and Functionally Graded Plates with and without Porosity [J]. Archive of Applied Mechanics, 2022, 92(3): 903-931.
- [4] MOHAMMADI M, MOHSENI E, MOEINFAR M. Bending, Buckling and Free Vibration Analysis of Incompressible Functionally Graded Plates Using Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory [J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 69: 47-62.
- [5] VU T V, NGUYEN N H, KHOSRAVIFARD A, et al. A Simple FSDT-Based Meshfree Method for Analysis of Functionally Graded Plates [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2017, 79: 1-12.
- [6] VU T V, KHOSRAVIFARD A, HEMATIYAN M R, et al. A New Refined Simple TSDT-Based Effective Meshfree Method for Analysis of Through-Thickness FG Plates [J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 57: 514-534.
- [7] VU T V, KHOSRAVIFARD A, HEMATIYAN M R, et al. Enhanced Meshfree Method with New Correlation Functions for Functionally Graded Plates Using a Refined Inverse Sin Shear Deformation Plate Theory [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2019, 74: 160-175.
- [8] VU T V, NGUYEN-VAN H, NGUYEN C H, et al. Meshfree Analysis of Functionally Graded Plates with a Novel Four-Unknown Arctangent Exponential Shear Deformation Theory [J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2023, 51(2): 1082-1114.
- [9] VU T V, TAI NGUYEN H T, NGUYEN-VAN H, et al. A Refined Quasi-3D Logarithmic Shear Deformation Theory-Based Effective Meshfree Method for Analysis of Functionally Graded Plates Resting on the Elastic Foundation [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2021, 131: 174-193.
- [10] CAO H L, VU T V. Natural Frequencies Analysis of Functionally Graded Porous Plates Supported by Kerr-Type Foundations via an Innovative Trigonometric Shear Deformation Theory [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2024, 32: 274-293.
- [11] LEE Y Y, ZHAO X, LIEW K M. Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Plates Using the Element-Free

- Kp-Ritz Method [J]. Smart Materials and Structures, 2009, 18(3): 035007.
- [12] NGUYEN-XUAN H, TRAN L V, NGUYEN-THOI T, et al. Analysis of Functionally Graded Plates Using an Edge-Based Smoothed Finite Element Method [J]. Composite Structures, 2011, 93(11): 3019-3039.
- [13] NGUYEN-XUAN H, TRAN L V, THAI C H, et al. Analysis of Functionally Graded Plates by an Efficient Finite Element Method with Node-Based Strain Smoothing [J]. Thin-Walled Structures, 2012, 54: 1-18.
- [14] TRAN L V, FERREIRA A J M, NGUYEN-XUAN H. Isogeometric Analysis of Functionally Graded Plates Using Higher-Order Shear Deformation Theory [J]. Composites Part B: Engineering, 2013, 51: 368-383.
- [15] VAN DO V N, LEE C H. Nonlinear Analyses of FGM Plates in Bending by Using a Modified Radial Point Interpolation Mesh-Free Method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 57: 1-20.
- [16] SAHRAEE S. Bending Analysis of Functionally Graded Sectorial Plates Using Levinson Plate Theory [J]. Composite Structures, 2009, 88(4): 548-557.
- [17] HADJI L, ZOUATNIA N, KASSOUL A. Bending Analysis of FGM Plates Using a Sinusoidal Shear Deformation Theory [J]. Wind and Structures, 2016, 23(6): 543-558.
- [18] LOU J, HE L W. Closed-Form Solutions for Nonlinear Bending and Free Vibration of Functionally Graded Microplates Based on the Modified Couple Stress Theory [J]. Composite Structures, 2015, 131: 810-820.
- [19] THAI H T, CHOI D H. A Simple First-Order Shear Deformation Theory for the Bending and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates [J]. Composite Structures, 2013, 101: 332-340.
- [20] 魏星, 陈莘莘, 童谷生, 等. 基于自然单元法的功能梯度板固有频率优化 [J]. 力学季刊, 2017, 38(1): 135-143.
- [21] 许爱林, 代成浩, 陈海波. 基于能量辐射传递法的功能梯度板高频振动响应分析 [J]. 振动与冲击, 2023, 42(22): 40-48, 219.
- [22] 宋彦琦, 石博康, 李向上. 基于 S-R 和分解定理的无网格法在功能梯度板中的应用 [J]. 上海大学学报(自然科学版), 2022, 28(4): 702-714.
- [23] 高祥雨, 王壮壮, 马连生. 功能梯度板弯曲和自由振动分析的简单精化板理论 [J]. 固体力学学报, 2023, 44(1): 96-108.
- [24] 段文峰, 周立明, 蔡斌, 等. 功能梯度板动力分析的光滑有限元法研究 [J]. 力学季刊, 2015, 36(4): 713-720.
- [25] 李善倾, 袁鸿. 各向异性杆扭转问题的一种数值方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(12): 179-184.

责任编辑 廖坤

崔玉洁