

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2026.07.020

杨小玉, 谢里阳. 航空材料设计许用值的统计方法比较 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2026, 48(7): 248-260.

航空材料设计许用值的统计方法比较

杨小玉¹, 谢里阳²

1. 沈阳理工大学 装备工程学院, 辽宁 沈阳 110159; 2. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819

摘要: A/B 基准值是航空领域使用最广泛的设计容许值, 获得精确的设计允许值具有重要意义, 因此针对符合三参数威布尔分布的非结构数据进行统计分析, 构建了 4 种母体置信限曲线方法(非参数估计与相关系数法结合的 NP-CCM 方法、非参数估计与最小偏差法结合的 NP-MDM 方法、非参数估计与误差变量法结合的 NP-EIV 方法和非参数估计与最小二乘法结合的 NP-LSM 方法)估计 A/B 基准值。在不同样本量和不同威布尔分布下, 将 4 种母体置信限曲线方法与 MMPDS-16 标准方法进行仿真计算和对比, 结果表明: 在小样本条件下, 4 种母体置信限曲线方法对 A/B 基准值的估计均较 MMPDS-16 标准方法更为稳健, 且对 A 基准值的估计更为准确。采用一组航空材料单批样本进行了实例分析, 验证了 4 种母体置信限曲线方法的适用性和准确性。

关键词: A/B 基准值; 母体置信限曲线方法; 非参数估计; 最小偏差法; 误差变量法; MMPDS-16 标准

中图分类号: V221⁺.3; TB114.3

文献标识码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



文章编号: 1673-9868(2026)07-0248-13

Comparison of statistical methods for design allowables of aeronautical materials

Yang Xiaoyu¹, Xie Liyang²

1. School of Equipment Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang Liaoning 110159, China;

2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China

Abstract: A/B basis values are the most widely adopted design allowables in the aeronautical field, and the acquisition of accurate design allowables is of great significance. Statistical analysis was conducted on unstructured data following the three-parameter Weibull distribution, and four population confidence limit curve methods were constructed to estimate A/B basis values, namely the nonparametric estimation combined with correlation coefficient method (NP-CCM), nonparametric estimation combined with minimum discrepancy method (NP-MDM), nonparametric estimation combined with error-in-variable method (NP-EIV), and nonparametric estimation combined with least square method (NP-LSM). Under different

收稿日期: 2025-12-22

基金项目: 国家科技重大专项(J2019-V-0009-0103)。

作者简介: 杨小玉, 博士, 讲师, 主要从事可靠性评估研究。

sample sizes and different Weibull distribution parameters, simulation calculations and comparisons were carried out between the four proposed population confidence limit curve methods and the method specified in MMPDS-16 standard. The results revealed that under the small sample condition, the four proposed methods produced more robust estimates of A/B basis values than the MMPDS-16 standard method, and provided more accurate estimates for A basis value. A case study with a single batch of aeronautical material samples further verified the applicability and accuracy of the four proposed population confidence limit curve methods.

Key words: A/B basis values; population confidence limit curve method; nonparametric estimation; minimum discrepancy method; error-in-variable method; MMPDS-16 standard

A/B 基准值是表征航空复合材料层合板、高强铝合金、钛合金等关键材料性能统计分布下限的核心指标,是飞机机翼、机身等主承力结构强度设计与适航认证的主要依据。其中,A 基准值表示 95% 的置信度下 99% 的性能数值群的最小值;B 基准值表示 95% 的置信度下 90% 的性能数值群的最小值。在金属材料设计中,根据结构的具体需求选用相应的基准值。在需要冗余设计的情况下,倾向于采用 B 基准值^[1-4]。例如地梁,即使单个构件发生故障,也能安全地将负荷重新分配到其他构件,且不会超过结构的最大承载极限。而对于依赖单一载荷路径的结构,例如机翼和机身,通常建议使用更严格的 A 基准值,因为这些结构的故障可能导致飞机遭受灾难性的后果。因此,与 A 基准值相比,B 基准值提供了更大的设计容许范围。研究 A/B 基准值的统计方法为结构强度设计提供了可靠依据,极大提升了飞机在复杂载荷环境下的安全裕度。同时,精确的许用值评估有助于充分挖掘材料性能潜力,实现结构轻量化,显著改善燃油经济性与运载效益。此外,在面对高昂试验成本与小样本挑战时,健全的统计方法能够优化试验设计,支撑适航符合性。

众多学者对 B 基准值的确定方法进行了深入探讨。B 基准值的确定方法主要有蒙特卡罗模拟法与统计分析法,这 2 种方法都基于材料和几何特性及其统计分布,但在确定 B 基准值的策略上有所区别。Cardoso 等^[5]基于仿真数据训练人工神经网络代理模型,并借助该模型求解典型载荷工况下的 A/B 基准值。Yan 等^[6]提出一种有限拉伸试验数据结合数字孪生模型分析的混合方法,可以高效获取 SiC/SiC 复合材料拉伸的 B 基准值。Furtado 等^[7]将机器学习技术应用于预测复合材料层压板的统计设计容许值,通过分析生成的数据,使用 4 种机器学习算法预测复合材料层压板的缺口强度及其统计分布,以及相关材料属性和几何特征的不确定性。结果表明除了随机森林算法外,所有机器学习算法均表现出色,特别是高斯过程算法在数据点较少时表现突出,而人工神经网络在训练集较大时更为有效。本文将重点研究统计分析法,对于蒙特卡罗模拟法不作过多展开。

国内学者对基于统计分析法的 A/B 基准值估计进行了大量研究^[8-10]。傅惠民^[11]提出了一种新的单侧容限系数法,这种方法特别适用于正态分布和对数正态分布,并且在样本量较小的情况下,相比国际上常用的单侧容限系数法更精确地近似真实值。此外,傅惠民^[12]还提出二维单侧容限系数法,该方法可以利用过往数据,在维持同等精度的同时,减少一半的试验量。在三参数威布尔分布领域,傅惠民等^[13]提出了一种基于秩的非参数化方法,并开发了多种回归分析工具。马小兵等^[14]为小样本提供了一种新的 Fiducial 推断方法,用于确定分位数的置信区间。赵新攀等^[15]采用 Bootstrap 技术,极大提高了小样本概率加权矩法的准确性。章洛^[16]基于二分迭代算法给出了三参数威布尔分布参数估计 A/B 基准值的解析式,开发了融合相关系数法、概率加权矩估计与 Bootstrap 重采样技术的通用计算程序,可处理任意设定的置信度水平与性能数群规模的最小值计算问题。

除了以上经典的统计方法,贝叶斯理论在可靠性分析领域也备受关注。为了获得估计参数的后验分布,需要将历史数据等多种信息源有效地纳入现场数据进行推理。Hannig 等^[17]提出了广义先验推断(GFI)方法,由故障数据提供其先验信息,为贝叶斯方法提供了一种客观的替代方法。研究表明,广义基准推断

区间在保持所述覆盖率的同时，其平均区间长度比其他方法更短。Yan 等^[18]使用 GFI 方法分别估计了广义指数分布和洛马克斯分布的参数区间。结果表明，GFI 方法的均方根误差小于传统的参数估计方法。Yang 等^[19]根据 GFI 方法对三参数威布尔分布进行点估计和区间估计，与无先验信息的贝叶斯估计相比更加稳健、准确。总体来说，基于统计分析法计算三参数威布尔分布 A/B 基准值的方法较少，尤其是在小样本下的估计结果均不太理想。

本文针对服从三参数威布尔分布的非结构数据(单批样本数据)，构建了 4 种母体置信限曲线方法(非参数估计与相关系数法结合的 NP-CCM 方法、非参数估计与最小偏差法结合的 NP-MDM 方法、非参数估计与误差变量法结合的 NP-EIV 方法和非参数估计与最小二乘法结合的 NP-LSM 方法)进行 A/B 基准值的统计分析。在不同的样本量和不同的威布尔分布下，将 4 种母体置信限曲线方法与 MMPDS-16 手册中的方法^[20]进行对比分析，以验证本文方法的适用性与准确性。

1 基于 MMPDS-16 手册评估 A/B 基准值

根据 MIL-HDBK-17F 标准，在计算基准值时首先推荐使用三参数威布尔分布，其次是正态分布和对数正态分布。尽管美国联邦航空管理局(FAA)指出使用威布尔分布可能会得出较为保守的结果，但众多文献均表明，工程材料的性能通常遵循三参数威布尔分布。因此，本文优先采用三参数威布尔分布进行数据拟合分析。

三参数威布尔分布 $W(\beta, \eta, \gamma)$ 的概率密度函数和累积分布函数分别为：

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta} \right] \tag{1}$$

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta} \right] \tag{2}$$

其中： β 、 η 和 γ 分别为形状参数、尺度参数和位置参数。

1.1 异常值的检测

异常值通常指在一组数据中显著低于或高于其他观测值的数值。在进行统计分析之前，需要对数据集进行异常值的检测。本文使用最大范数残差法识别数据集中可能存在的异常值。

采用最大范数残差法，假设除异常值之外，样本数据遵循正态分布。如果一个样本观测值与样本均值的绝对偏差显著超出样本标准差的阈值，则该观测值将被视为异常值。最大范数残差法每次仅能识别出一个异常值，这使其更适合对单个数据点进行评估。

最大范数残差统计量的定义为：

$$MNR = \max_i \left\{ \left| \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right| \right\} \tag{3}$$

式中： x_i 为样本观测值， $i = 1, 2, \dots, n$ ； $\bar{x}$ 为样本均值； s 为样本标准差。

样本标准差为：

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \tag{4}$$

最大范数的临界值 C 定义为：

$$C = \frac{n - 1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t_{\alpha}^2}{n - 2 + t_{\alpha}^2}} \tag{5}$$

式中： t 为自由度 $n - 2$ 的 t 分布的 $1 - \frac{\alpha}{2n}$ 分位数； α 为显著性水平，本文取 0.05。

当最大范数残差统计量 MNR 低于临界值 C 时，以 $1 - \alpha$ 的置信水平认为样本中没有异常值；如果

MNR 超过临界值 C , 则以相同的置信水平认为与 MNR 相关的观测值可能是异常值。

1.2 分布参数检验

MMPDS-16 手册中针对三参数威布尔分布提出改进的 Anderson-Darling 检验方法, 用于确定给定数据集的曲线是否可以使用三参数威布尔曲线来拟合。该检验的实质是对观测数据的累积分布函数与整个测量范围内拟合威布尔曲线的累积分布函数进行数值比较, 该检验与原始的 Anderson-Darling 检验不同, 它强调低尾部。该检验方法可用于完全数据或删减数据的分析处理。

MMPDS-16 手册介绍了一种估计三参数威布尔分布位置参数的方法, 可用于拟合优度检验和计算 T_{99} 或 T_{90} 值(A/B 基准值)。令 K 小于等于 $\min\left\{\frac{4n}{15}, (1-p)\frac{n}{3}\right\}$ 的最大整数, p 为右尾部被删减的比例($p=0, 0.2, 0.5$), 定义函数 $W(\gamma)$ 为:

$$W(\gamma) = \frac{\sum_{i=K+1}^{3K-2} L_i(\gamma)}{\sum_{i=1}^{3K-2} L_i(\gamma)} \quad (6)$$

式中:

$$L_i(\gamma) = \frac{\ln(X_{(i+1)} - \gamma) - \ln(X_{(i)} - \gamma)}{D_i} \quad (7)$$

$$D_1 = n \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \quad (8)$$

$$D_2 = \frac{n(n-1)}{2} \ln\left[1 + \frac{1}{n(n-2)}\right] \quad (9)$$

$$D_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \ln\left[1 + \frac{2n-3}{(n-1)^3(n-3)}\right] \quad (10)$$

$$D_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \ln\left[1 + \frac{6n^4 - 48n^3 + 140n^2 - 176n + 81}{n(n-4)(n-2)^6}\right] \quad (11)$$

$$D_i = \ln\left[-\ln\left(1 - \frac{i+0.5}{n+0.25}\right)\right] - \ln\left[-\ln\left(1 - \frac{i-0.5}{n+0.25}\right)\right] \quad (i=5, 6, \dots, 3K-2) \quad (12)$$

使用 MMPDS-16 手册中的表 9.10.8 确定参数 r 。表 9.10.8 中的第 1 列用于估计与此处所述的 Anderson-Darling 拟合优度检验相关的位置参数 γ_{50} , 第 2 列和第 3 列用于估算 γ_{99} 和 γ_{90} , 可确定 T_{99} 和 T_{90} 。方程 $W(\gamma)=r$ 的解是位置参数 γ 的估计值。

当得到位置参数估计值后, 将样本值减去位置参数估计值得到新的样本值, 此时相当于两参数威布尔分布, 再使用极大似然估计对形状参数和尺度参数进行估计, 得到 3 个参数的估计值。估计出参数后, 可根据以下步骤计算 Anderson-Darling 统计量。

当 $i=1, \dots, r$ 时, 则:

$$F_i = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x_{(i)} - \gamma_{50}}{\eta_{50}}\right)^{\beta_{50}}\right] \quad (13)$$

令 $f_{n+1}=1$, 则:

$$C_i = \frac{2i-1}{n} \quad (14)$$

Anderson-Darling 统计量定义为:

$$AD = -\sum_{i=1}^r (C_i \ln F_i - 2F_i) + \frac{r^2}{n} \ln F_{r+1} - 2rF_{r+1} + \frac{n}{2} F_{r+1}^2 - \frac{n}{2} F_1^2 \quad (15)$$

如果存在:

$$AD \geq 0.3951 + 4.186 \times 10^{-5}n \quad (16)$$

可以得出抽取样本不是三参数威布尔分布的结论(误差风险为 5%)。否则, 不能拒绝样本服从三参数威布尔分布的假设。

1.3 基准值的计算

为了计算三参数威布尔分布总体的置信下限值, 必须具备以下条件: ① 位置参数的估计; ② 形状和尺度参数的估计; ③ 三参数威布尔分布的单侧容限系数表。若 $x_1, \dots, x_n$ 表示任意顺序的样本观测值, $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ 表示从小到大顺序排列的样本观测值, 使用 1.2 节中描述的方法分别计算 T_{99} 和 T_{90} 的位置参数估计值, 并分别用 γ_{99} 和 γ_{90} 表示。此外, 形状参数估计值用 β_{99} 和 β_{90} 表示, 尺度参数估计值用 η_{99} 和 η_{90} 表示。

当样本观测值减去估计的位置参数, 则形状参数和尺度参数可使用两参数威布尔分布的极大似然法进行估计。根据样本 $\{x_{(i)} - \gamma_{99} : i=1, \dots, r\}$ 计算估计值 β_{99} 和 η_{99} ; 同样, 根据样本 $\{x_{(i)} - \gamma_{90} : i=1, \dots, r\}$ 计算估计值 β_{90} 和 η_{90} 。

A/B 基准值计算公式分别为:

$$T_{99} = \gamma_{99} + Q_{99} \exp\left(\frac{-V_{99}}{\beta_{99} \sqrt{n}}\right) \quad (17)$$

$$T_{90} = \gamma_{90} + Q_{90} \exp\left(\frac{-V_{90}}{\beta_{90} \sqrt{n}}\right) \quad (18)$$

其中: $Q_{99} = \eta_{99} (0.010\ 05)^{\frac{1}{\beta_{99}}}$; $Q_{90} = \eta_{90} (0.010\ 05)^{\frac{1}{\beta_{90}}}$ 。

V_{99} 和 V_{90} 的通用计算公式为:

$$V = \frac{1}{d} \left\{ \frac{ck_n \left[a_{11} + 2a_{01}g(p) + a_{00}g^2(p) + \frac{c^2(a_{01}^2 - a_{00}a_{11})}{n} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{c^2 a_{00}}{n}} + \sqrt{n} \left[g(p) - k_n \frac{g(p) + \frac{c^2 a_{01}}{n}}{1 - \frac{c^2 a_{00}}{n}} \right] \right\} \quad (19)$$

式中: $g(p) = 0.45 + 0.779\ 7 \ln[-\ln(1-p)]$; 计算 V_{99} 时 $p = 0.01$, 计算 V_{90} 时 $p = 0.1$; $d = 0.779\ 696\ 8$;

$c = 1.645$; $k_n = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$; 无截尾数据时, $a_{00} = 0.607\ 9$ 、 $a_{01} = -0.474\ 0$ 、 $a_{11} = 0.977\ 5$ 。

2 基于 4 种母体置信限曲线方法评估 A/B 基准值

2.1 相关系数法

相关系数法(Correlation Coefficient Method, CCM)是当样本的相关系数取得最大值时得到位置参数估计值, 然后使用最小二乘法求得形状参数和尺度参数的方法。

样本的相关系数为:

$$R(\gamma) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y} \right)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \right)}} \quad (20)$$

式中: $x_i = \ln(t_i - \gamma)$; $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$; $y = \ln[-\ln(1 - F_i)]$; $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}$ 。

F 为累积分布函数, 可以使用中位秩来估计, 即:

$$\hat{F}(t_i) \approx \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \quad (21)$$

式中: i 为按升序排列的寿命样本序号, $i=1, 2, \dots, n$; n 为样本量。

获得位置参数估计后, 将原来的样本减去位置参数得到新的样本, 使用最小二乘方程可得到形状参数

和尺度参数, 即:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{CCM}} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \\ \hat{\eta}_{\text{CCM}} &= \exp\left(-\frac{\bar{y} - \hat{\beta}_{\text{CCM}} \bar{x}}{\hat{\beta}_{\text{CCM}}}\right) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

2.2 最小偏差法

最小偏差法(Minimum Discrepancy Method, MDM)由 Xie 等^[21]提出, 通过将尺度参数之间的差异最小化, 可估计出正确的形状参数和位置参数。

由式(2)转换为:

$$\eta = \frac{t - \gamma}{[-\ln(1 - F)]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (23)$$

式中: t 为寿命数据。累积分布函数可采用式(21)估计。

形状参数和位置参数的计算公式为:

$$(\hat{\beta}_{\text{MDM}}, \hat{\gamma}_{\text{MDM}}) = \underset{(\beta, \gamma)}{\operatorname{argmin}} \left(\operatorname{std} \left(\frac{t_i - \gamma}{(-\ln(1 - F_i))^{\frac{1}{\beta}}} \right) \right) \quad (24)$$

威布尔尺度参数的估计为:

$$\hat{\eta}_{\text{MDM}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{t_i - \hat{\gamma}_{\text{MDM}}}{[-\ln(1 - F_i)]^{\frac{1}{\hat{\beta}_{\text{MDM}}}}} \quad (25)$$

2.3 误差变量法

误差变量法^[22](Errors-in-Variables, EIV)是当样本观测值与根据累积分布函数转换得到的寿命平方差最小时, 估计出形状、尺度和位置参数的方法, 即:

$$(\hat{\beta}_{\text{EIV}}, \hat{\eta}_{\text{EIV}}, \hat{\gamma}_{\text{EIV}}) = \arg \min_{(\beta, \eta, \gamma)} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{si})^2 \quad (26)$$

式中: t_i 为失效数据。

t_{si} 的表达式如下:

$$t_{si} = \gamma + \eta \{-\ln[1 - F(i)]\}^{\frac{1}{\beta}} \quad (27)$$

式中: 累积分布函数可采用式(21)进行估计。

2.4 最小二乘法

最小二乘法(Least Squares Method, LSM)是累积分布函数的偏差平方和最小时, 估计出形状、尺度和位置参数的方法, 即:

$$(\hat{\beta}_{\text{LSM}}, \hat{\eta}_{\text{LSM}}, \hat{\gamma}_{\text{LSM}}) = \arg \min_{(\beta, \eta, \gamma)} \sum_{i=1}^n [F(t_i) - F(i)]^2 \quad (28)$$

式中: 累积分布函数可采用式(21)进行估计。

2.5 非参数估计

样本 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 来自三参数威布尔分布累积分布函数 $F(t; \beta, \eta, \gamma)$ 总体, 样本次序统计量为 $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)}$ 。 P_i 为第 i 个秩统计量, 表示总体中个体小于第 i 个观测值的百分率, $P_i = F(t_{(i)}; \beta, \eta, \gamma)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其概率密度函数为:

$$g_n(P_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} P_i^{i-1} (1 - P_i)^{n-1} \quad (29)$$

P_{ui} 和 P_{li} 定义如下:

$$\begin{cases} \int_0^{P_{ui}} g_n(P_i) dP_i = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \int_{P_{li}}^1 g_n(P_i) dP_i = 1 - \frac{\alpha}{2} \end{cases} \tag{30}$$

P_{ui} 和 P_{li} 表示置信度为 $1-\alpha$ 的非参数置信上限和置信下限, 即:

$$\begin{cases} P(P_i \leqslant P_{ui}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ P(P_i \geqslant P_{li}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \end{cases} \tag{31}$$

由于秩分布是一个贝塔分布, 可将上式变换得到:

$$P_{ui} = \frac{\left(\frac{i}{n-i+1}\right) F_{1-\alpha/2}[2i, 2(n-i+1)]}{1 + \left(\frac{i}{n-i+1}\right) F_{1-\alpha/2}[2i, 2(n-i+1)]} \tag{32}$$

$$P_{li} = \frac{i/(n-i+1)}{i/(n-i+1) + F_{1-\alpha/2}[2(n-i+1), 2i]} \tag{33}$$

由式(34)求得置信度 $1-\alpha$ 的概率 $P=F(t_p; \beta, \eta, \gamma)$ 的总体百分位值 t_p 的置信下限:

$$F(t_{Pl}; \beta, \eta, \gamma) = P \tag{34}$$

同样, 总体百分位值 t_p 的置信上限可由下式求得:

$$F(t_{Pu}; \beta, \eta, \gamma) = P \tag{35}$$

2.6 4 种母体置信限曲线法

由于 $R=1-P$, 使用式(34)和式(35)可计算出可靠寿命 t_R 的置信上下限。利用式(34)和式(35)可代替三参数威布尔分布相关系数法的中位秩式(21)估计出 $\beta_l, \eta_l, \gamma_l$ 和 $\beta_u, \eta_u, \gamma_u$ 。通过蒙特卡罗抽样从威布尔分布 $W(2, 1\ 00\ 0, 1\ 00\ 0)$ 中随机产生 20 个样本, 分别为 1 197.10、1 305.94、1 374.27、1 375.18、1 449.16、1 472.29、1 504.98、1 738.40、1 773.36、1 916.89、1 957.51、2 154.36、2 160.85、2 305.60、2 388.28、2 389.72、2 412.30、2 496.05、2 572.18 和 3 318.25。当置信水平为 90% 时, 使用不同的经验分布函数式(21)、式(34)和式(35)估计该样本的 3 个参数, 估计结果如表 1 所示。

表 1 参数估计结果

经验分布函数	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\gamma}$
式(21)	1.38	965.83	1 112.28
式(34)	1.96	1 033.90	721.62
式(35)	1.61	1 373.64	1 176.00

根据表 1 的参数估计结果得到以下 3 个累积分布函数:

$$F = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t - 1\ 112.28}{965.83} \right)^{1.38} \right] \tag{36}$$

$$F = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t - 721.62}{1\ 033.90} \right)^{1.96} \right] \tag{37}$$

$$F = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t - 1\ 176.00}{1\ 373.64} \right)^{1.61} \right] \tag{38}$$

将式(36)一式(38)的累积分布函数分别在图 1 中表示。由图 1 可以看出, 深蓝色曲线既可以表示累积分布函数的置信上限, 也可以表示可靠寿命的置信下限; 浅蓝色曲线既可以表示累积分布函数的置信下限, 也可以表示可靠寿命的置信上限; 红色虚线表示点估计的累积分布。

本节采用 4 种母体置信限曲线方法(NP-CCM、NP-MDM、NP-EIV 和 NP-LSM)对 A/B 基准值进行估计。

NP-CCM: 利用式(34)代替三参数威布尔分布相关系数法的中位秩式(21)估计 β_l 、 η_l 、 γ_l , 根据可靠寿命公式得到非参数估计和相关系数法结合的 A/B 基准值评估方法, 即:

$$T_{99} = \gamma_l + \eta_l [-\ln(1 - 0.01)]^{\frac{1}{\beta_l}} \quad (39)$$

$$T_{90} = \gamma_l + \eta_l [-\ln(1 - 0.1)]^{\frac{1}{\beta_l}} \quad (40)$$

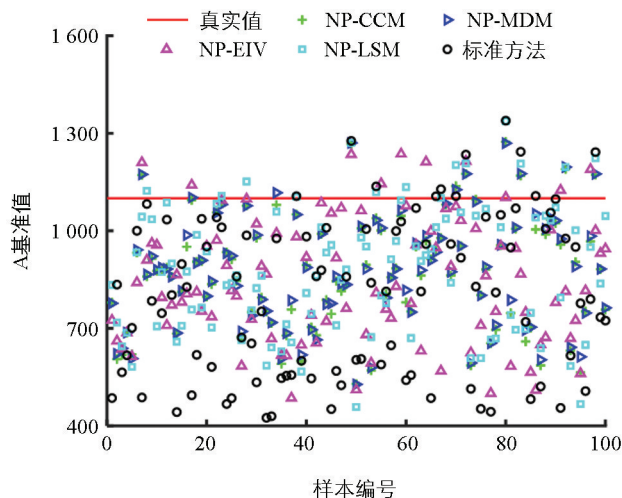
NP-MDM: 利用式(34)代替三参数威布尔分布最小偏差法的中位秩式(21)估计 β_l 、 η_l 、 γ_l , 根据可靠寿命公式得到非参数估计和最小偏差法结合的 A/B 基准值评估方法, 计算公式同式(39)和式(40)。

NP-EIV: 利用式(34)代替三参数威布尔分布误差变量法的中位秩式(21)估计 β_l 、 η_l 、 γ_l , 根据可靠寿命公式得到非参数估计和误差变量法结合的 A/B 基准值评估方法, 计算公式同式(39)和式(40)。

NP-LSM: 利用式(34)代替三参数威布尔分布最小二乘法的中位秩式(21)估计出 β_l 、 η_l 、 γ_l , 根据可靠寿命公式得到非参数估计和最小二乘法结合的 A/B 基准值评估方法, 计算公式同式(39)和式(40)。

3 仿真计算

为比较 4 种母体置信限曲线方法(NP-CCM、NP-MDM、NP-EIV 和 NP-LSM)与 MMPDS-16 标准方法的估计结果, 本文进行了大量的蒙特卡罗仿真计算。对不同威布尔分布 $W(2, 1\,000, 1\,000)$ 、 $W(2, 1\,000, 2\,000)$ 、 $W(3, 1\,000, 1\,000)$ 和 $W(3, 1\,000, 2\,000)$ 进行蒙特卡罗抽样, 样本量选用 $n=30, 50, 100$ 和 200, 重复抽取 1 000 次, 使用以上 5 种方法进行 A/B 基准值估计并进行对比。随机选取 100 组样本, 采用 5 种方法估计 $W(2, 1\,000, 1\,000)$ 和 $W(3, 1\,000, 1\,000)$ 的 A/B 基准值($n=30$), 并表示在图 2—图 3 中; 计算出 1 000 次估计结果的偏差(Std)和均方根误差(RMSE), 并表示在图 4—图 7 中。



a. A基准值

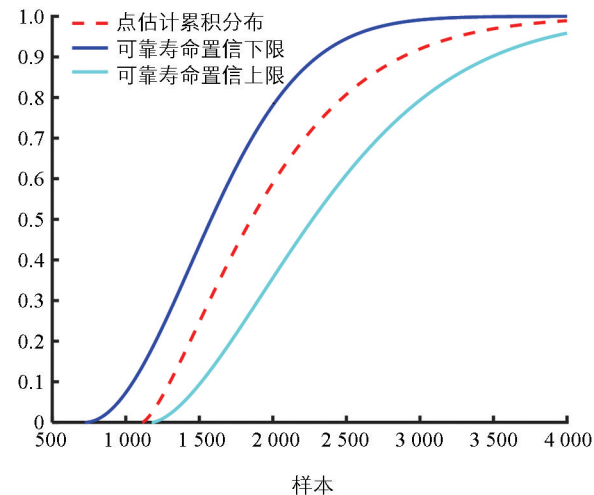
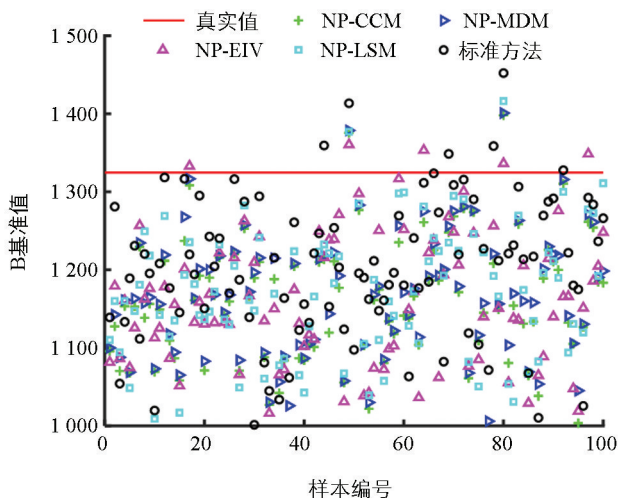


图 1 累积分布函数



b. B基准值

图 2 5 种方法估计 $W(2, 1\,000, 1\,000)$ 的 A/B 基准值($n=30$)

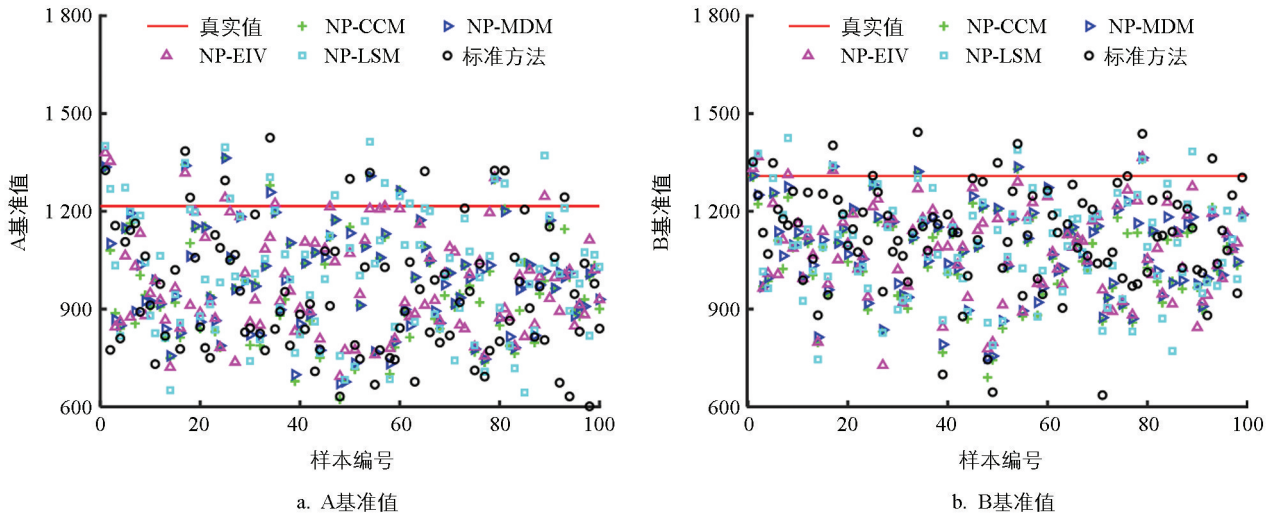


图 3 5 种方法估计 $W(3, 1\,000, 1\,000)$ 的 A/B 基准值 ($n=30$)

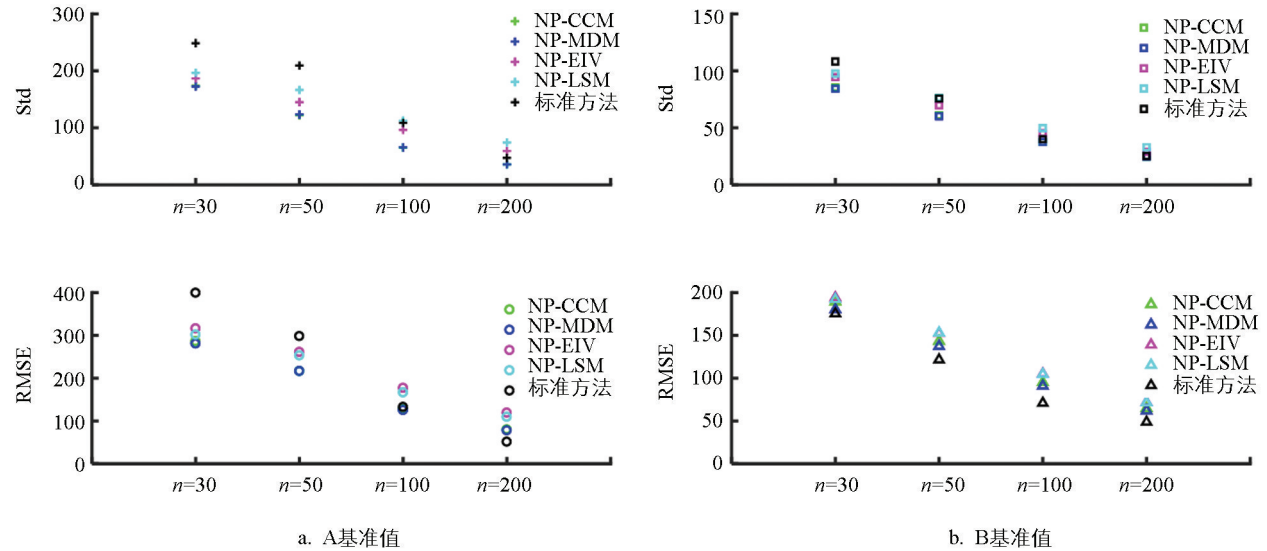


图 4 5 种方法估计 $W(2, 1\,000, 1\,000)$ A/B 基准值的统计特性比较

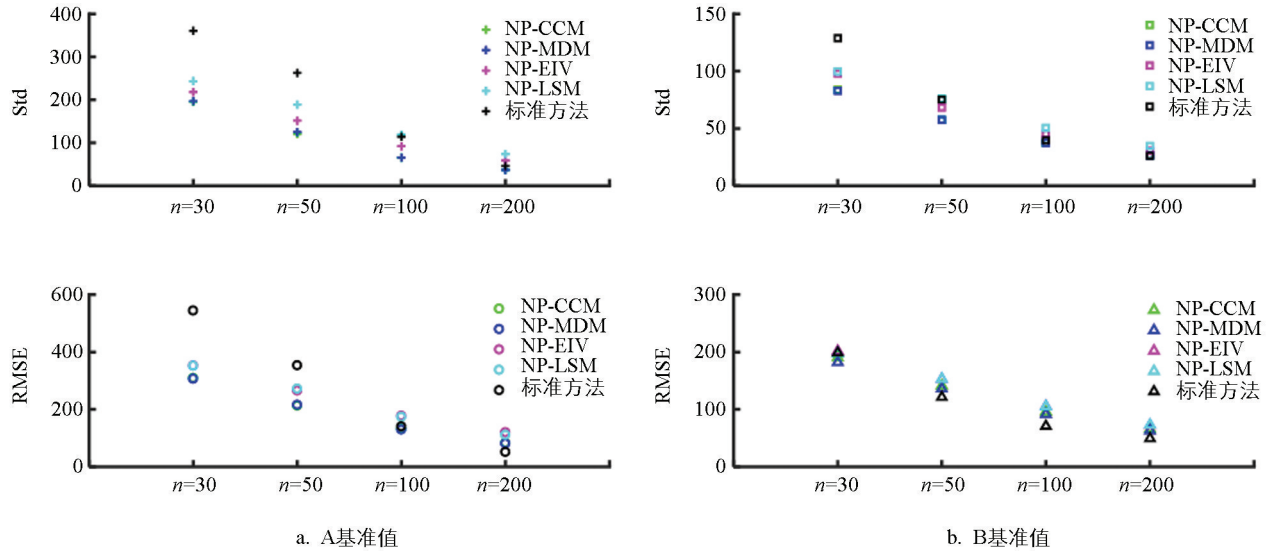


图 5 5 种方法估计 $W(2, 1\,000, 2\,000)$ A/B 基准值的统计特性比较

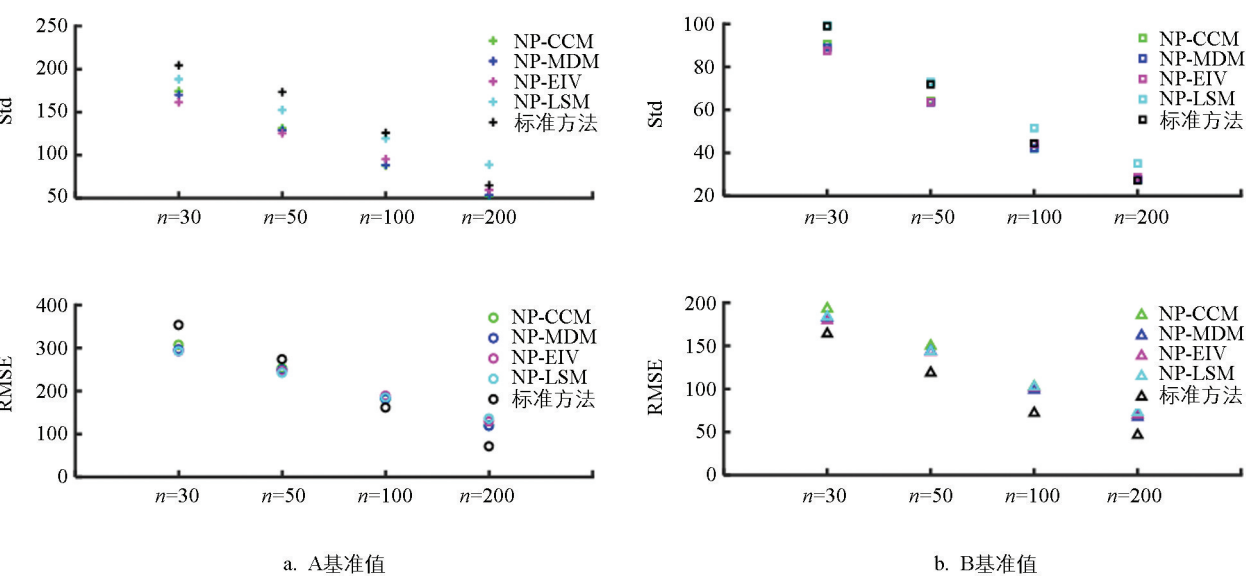


图 6 5 种方法估计 $W(3, 1\,000, 1\,000)$ A/B 基准值的统计特性比较

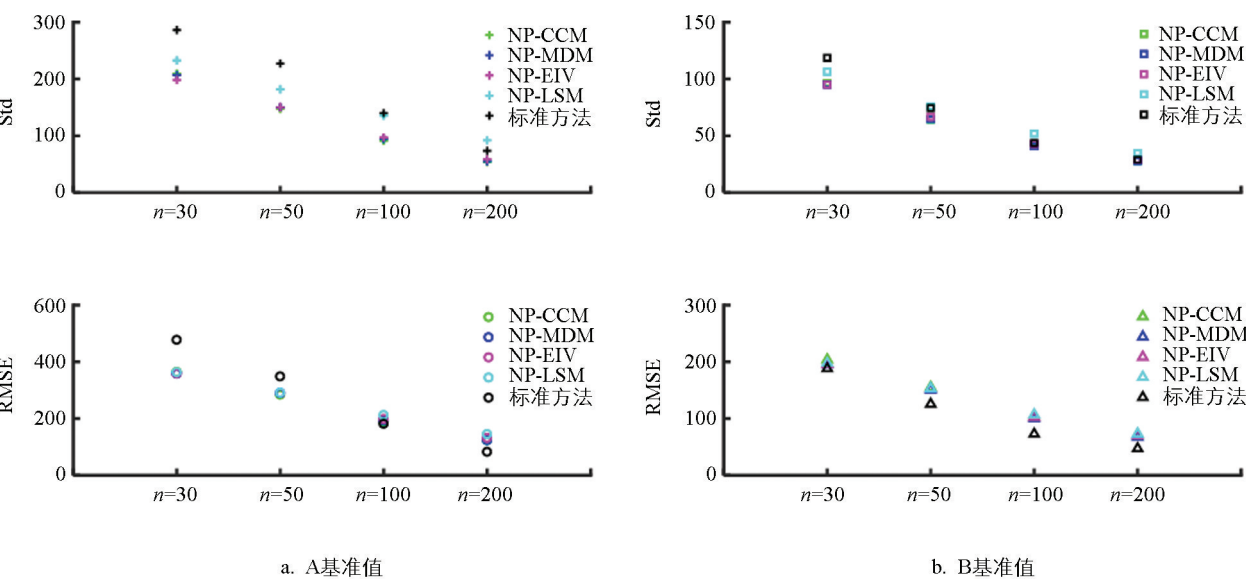


图 7 5 种方法估计 $W(3, 1\,000, 2\,000)$ A/B 基准值的统计特性比较

根据图 2—图 7 可得到以下结论：

- 1) 针对 A 基准值，以上 5 种方法分别在样本量为 $n=30$ 、50、100 和 200，威布尔分布为 $W(2, 1\,000, 1\,000)$ 、 $W(2, 1\,000, 2\,000)$ 、 $W(3, 1\,000, 1\,000)$ 和 $W(3, 1\,000, 2\,000)$ 的不同情况下进行比较。在样本量较小时，4 种母体置信限曲线法估计的 A 基准值结果比 MMPDS-16 标准方法估计的结果更加稳健、更加准确。当样本量增加到 100 和 200 时，标准方法的计算结果更加冒进，因此不推荐 MMPDS-16 标准方法。
- 2) 针对 B 基准值，以上 5 种方法分别在样本量为 $n=30$ 、50、100 和 200，威布尔分布为 $W(2, 1\,000, 1\,000)$ 、 $W(2, 1\,000, 2\,000)$ 、 $W(3, 1\,000, 1\,000)$ 和 $W(3, 1\,000, 2\,000)$ 的不同情况下进行比较。在样本量较小时，4 种母体置信限曲线方法估计的 B 基准值结果比 MMPDS-16 标准方法估计的结果更加稳健，MMPDS-16 标准方法估计 B 基准值的结果比 4 种母体置信限曲线法估计的结果更加准确，因此从准确性角度推荐 MMPDS-16 标准方法。

4 实例分析

选用文献[20]的一组航空材料单批样本(数据见表 2)进行实例分析。首先根据异常值的检测，计算出最大范数残差统计量 MNR 低于临界值 $C(MNR=2.896, C=3.384, \alpha=0.05)$ ，以 $1-\alpha$ 的置信水平认为样本中没有异常值，并且通过了 Anderson-Darling 检验($AD<0.395\ 1+4.186\times10^{-5}n, AD=0.196$)。再分别采用 4 种母体置信限曲线方法(NP-CCM、NP-MDM、NP-EIV 和 NP-LSM)以及 MMPDS-16 标准方法进行 A/B 基准值的计算，计算结果如表 3 所示。

表 2 单批样本数据

100 个样本数据									
135.373	139.626	141.518	142.838	144.200	145.061	145.802	146.967	148.708	151.523
135.500	139.827	141.582	142.859	144.276	145.072	145.876	147.149	148.954	151.605
135.775	139.839	141.592	143.141	144.313	145.082	146.091	147.224	148.988	152.086
136.450	140.022	141.731	143.180	144.418	145.082	146.096	147.305	149.082	152.467
137.114	140.461	141.937	143.397	144.465	145.331	146.159	147.500	149.123	152.646
137.241	140.957	142.125	143.426	144.650	145.460	146.302	147.657	149.590	152.852
137.900	141.083	142.138	143.444	144.672	145.606	146.303	147.675	149.831	153.164
138.916	141.149	142.298	143.558	144.847	145.626	146.447	147.833	149.974	153.675
139.158	141.435	142.441	143.722	144.901	145.754	146.797	148.084	150.325	155.492
139.307	141.473	142.785	143.886	144.924	145.785	146.937	148.556	151.484	157.944

表 3 5 种方法估计 A/B 基准值的结果

方法	A 基准值	B 基准值	方法	A 基准值	B 基准值
NP-CCM	132.693	137.749	NP-LSM	133.162	138.128
NP-MDM	132.722	137.798	标准方法	132.538	138.136
NP-EIV	133.522	137.930			

表 3 列出了以上 5 种方法计算实例样本 A/B 基准值的结果，构建的 4 种母体置信限曲线方法估计的 A/B 基准值都与 MMPDS-16 标准方法的计算结果十分接近，说明这 4 种母体置信限曲线方法是可行的。从上述 100 个样本中随机抽取 30 个样本，分别使用 5 种方法进行 A/B 基准值的计算。将样本量为 100 时 MMPDS-16 标准方法的计算结果作为真实值，同时将样本量为 30 时的 5 种方法计算结果进行对比，计算相对误差的绝对值列于表 4 中。由表 4 可知，在样本量为 30 时 4 种母体置信限曲线方法计算 A/B 基准值的结果比 MMPDS-16 标准方法的计算结果更加准确。

表 4 5 种方法估计 A/B 基准值的结果及相对误差的绝对值($n=30$)

方法	A 基准值	相对误差的绝对值/%	B 基准值	相对误差的绝对值/%
NP-CCM	125.242	5.505	134.039	2.966
NP-MDM	125.461	5.340	134.263	2.804
NP-EIV	126.908	4.248	134.556	2.592
NP-LSM	135.346	2.119	135.346	2.020
标准方法	119.782	9.624	133.991	3.001

同样,从上述 100 个样本中随机抽取 50 个样本,分别使用 5 种方法进行 A/B 基准值的计算。将样本量为 100 时 MMPDS-16 标准方法的计算结果作为真实值,同时将样本量为 50 时的 5 种方法计算结果进行对比,计算相对误差的绝对值列于表 5 中。由表 5 可知,在样本量为 50 时 4 种母体置信限曲线方法计算 A/B 基准值的结果比 MMPDS-16 标准方法的计算结果更加准确。

表 5 5 种方法估计 A/B 基准值的结果及相对误差的绝对值($n=50$)

方法	A 基准值	相对误差的绝对值/%	B 基准值	相对误差的绝对值/%
NP-CCM	131.643	0.675	137.324	0.588
NP-MDM	131.829	0.535	137.464	0.486
NP-EIV	133.834	0.978	137.910	0.164
NP-LSM	131.070	1.108	137.654	0.349
标准方法	122.173	7.820	136.898	0.896

5 结论

1) 针对符合三参数威布尔分布的非结构数据进行统计分析,构建了 4 种母体置信限曲线方法(NP-CCM、NP-MDM、NP-EIV 和 NP-LSM)估计 A/B 基准值。

2) 在不同的样本量和不同的威布尔分布下,将 4 种母体置信限曲线方法与 MMPDS-16 标准方法进行对比,在样本量较小时 4 种母体置信限曲线方法估计的 A 基准值结果比 MMPDS-16 标准方法估计的结果更加稳健、准确;当样本量增加到 100 和 200 时,MMPDS-16 标准方法的计算结果更加冒进,因此不推荐 MMPDS-16 标准方法。

3) 4 种母体置信限曲线方法估计的 B 基准值结果比 MMPDS-16 标准方法估计的结果更加稳健,MMPDS-16 标准方法估计 B 基准值的结果比 4 种母体置信限曲线方法估计的结果更加准确,从准确性角度推荐 MMPDS-16 标准方法。

4) 使用 4 种母体置信限曲线方法和 MMPDS-16 标准方法对一组航空材料单批样本进行了实例分析,验证了 4 种方法的实用性和准确性。本文构建的 4 种母体置信限曲线法为小样本条件下航空材料 A/B 基准值的高精度估计提供了有效且可靠的解决方案。

基于本文的研究基础与现有局限,未来可以结合贝叶斯理论引入先验信息,构建贝叶斯母体置信限,完成小样本下 A/B 基准值的评估。

参考文献:

[1] 张驰,闫源江,廖英强. 国产 T800 级碳纤维复丝性能的 B 基准值计算与对比分析 [J]. 宇航材料工艺, 2025, 55(增刊 1): 120-126.

[2] Balokas G, Heinecke F, Liebisch M, et al. Probabilistic analysis of composite stiffened panels including random AFP-produced defects towards enhanced design allowables [J]. Composite Structures, 2023, 313: 116923.

[3] Hijji H H, Mallouli A, Abdellah M Y, et al. Statistical equivalence of intra- and interlaminar mode I fracture toughness in IM7/8552; Weibull B-basis and bootstrap uncertainty [J]. Applied Sciences, 2026, 16(10): 4711.

[4] 赵旭,胡祎乐,杨春霞. 民机复材碳纤维层板挖补修理湿热性能分析 [J]. 民用飞机设计与研究, 2025(4): 58-66.

[5] Cardoso R A S, Reis M S, Ferreira L P S, et al. A-basis and B-basis buckling allowables for an aircraft composite wing [J]. Latin American Journal of Solids and Structures, 2025, 22(12): e8284.

[6] Yan W Z, Tian X X, Liang S F, et al. Efficient hybrid tensile B-basis value estimation for SiC/SiC composites using sparse testing and high-fidelity digital twin models [J]. Journal of the European Ceramic Society, 2025, 45(10): 117351.

[7] Furtado C, Pereira L F, Tavares R P, et al. A methodology to generate design allowables of composite laminates using machine learning [J]. International Journal of Solids and Structures, 2021, 233: 111095.

[8] 常楠, 辜良勇, 张勇波, 等. 湿热环境下 ZT7H/5429 复合材料层合板的拉伸性能 [J]. 航空动力学报, 2023, 38(11): 2659-2665.

[9] 王夏涵, 周银华, 程文杰, 等. 复合材料 B 基准值统计方法的对比分析 [J]. 复合材料科学与工程, 2025(1): 104-108.

[10] 汪梓迅. 碳纤维/环氧复合材料 B 基准值计算及其影响因素分析 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.

[11] 傅惠民. 正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式 [J]. 航空学报, 1994, 15(1): 94-101.

[12] 傅惠民. 二维单侧容限系数方法 [J]. 航空学报, 1993, 14(3): 166-172.

[13] 傅惠民, 高镇同, 徐人平. 三参数威布尔分布的置信限 [J]. 北京航空航天大学学报, 1991, 17(2): 79-86.

[14] 马小兵, 赵宇, 王华胜. 母体百分位值与百分率置信限的 Fiducial 推断 [J]. 中国铁道科学, 2009, 30(2): 103-107.

[15] 赵新攀, 吕震宙, 王维虎. 基于概率加权矩的三参数 Weibull 分布母体百分位值和可靠度置信限估计的新方法 [J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(3): 470-475.

[16] 章洛. 多种常用航空材料性能分布的任意置信限许用值计算 [D]. 武汉: 华中农业大学, 2024.

[17] Hannig J, Iyer H, Lai R C S, et al. Generalized fiducial inference: a review and new results [J]. Journal of the American Statistical Association, 2016, 111(515): 1346-1361.

[18] Yan L, Liu X H. Generalized fiducial inference for generalized exponential distribution [J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2018, 88(7): 1369-1381.

[19] Yang X Y, Xie L Y, Wang B W, et al. Inference on the high-reliability lifetime estimation based on the three-parameter Weibull distribution [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2024, 77: 103665.

[20] MMPDS-16: Metallic material properties development and standardization: Chapter 9 guidelines for presentation of DATA [S].

[21] Xie L Y, Wu N X, Yang X Y. A minimum discrepancy method for Weibull distribution parameter estimation [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2023, 23(8): 2350085.

[22] Jukić D, Marković D. On nonlinear weighted errors-in-variables parameter estimation problem in the three-parameter Weibull model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 215(10): 3599-3609.

责任编辑 柳剑