第 40 卷　第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2015 年 1 月
Vol. 40　No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan.　2015

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2015.01.001

一类 Hassell-Varley 型随机恒化器系统的定性分析①

董庆来[1]，　保晓平[2]，　党晓一[1]

1. 延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000；2. 南社乡初级中学，陕西 渭南 711700

摘要： 考虑到稀释率受随机噪声的影响，研究了一类具有 Hassell-Varley 型功能反应函数的随机恒化器模型. 运用随机微分方程比较原理证明了模型正解的全局存在唯一性. 通过构造 Lyapunov 函数，利用 Itô 公式得到了随机有界性和绝灭平衡点的全局随机渐近稳定性的充分条件，研究了随机系统围绕确定性系统正平衡点的振荡行为.

关　键　词： Hassell-Varley 型功能反应函数；恒化器；Itô 公式；随机有界性；稳定性

中图分类号：O175　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000－5471(2015)1－0001－05

微生物连续培养模型(恒化器模型)的研究一直是众多数学和生物工作者所关注的热点课题之一[1-3]. 已有的微生物连续培养模型(恒化器模型)绝大多数是确定性的数学模型，很少考虑随机因素对微生物培养的影响. 不可避免地，微生物的培养过程会受到各种不可预知的环境噪声干扰. 建立随机恒化器模型来描述微生物培养过程以更好地反映实际现象就显得尤为重要. 文献[4]采用对整个系统加入随机扰动的方法建立随机恒化器模型来描述随机噪声对系统的影响，研究结果表明：在确定性恒化器模型中所有生物类都是持久的，但是在原模型中考虑环境白噪声时，随机系统却是终将灭亡的. 文献[5]研究的随机恒化器模型是营养的输入浓度和稀释率同时受到白噪声干扰的情形，研究结果揭示了在不同条件下模型的解围绕其相应确定性模型的各类平衡点的振荡行为. 文献[6]讨论的是比率型功能反应函数中半饱和常数受环境噪声干扰的随机恒化器模型，得到了与确定性模型不同的结论. 文献[7]研究了一类溢流率受随机噪声的干扰的具有比率型功能反应函数的随机恒化器模型. 研究结果一致表明，白噪声对微生物培养有重要影响，白噪声太大会使随机恒化器模型的解围绕确定性模型解的振荡幅度增大，一定条件下会导致培养失败.

在微生物连续培养过程中，微生物与营养基间的关系好比种群间的捕食与被捕食关系. 营养基是食饵，而微生物类则是捕食者. 在捕食与被捕食理论中，功能反应函数是数学模型中一个非常重要的因素. 1969 年，Hassell 和 Varley 提出的 Hassell-Varley 型功能反应函数是食饵密度($S(t)$)和捕食者密度的函数($X(t)$)，即

$$\mu(S,\ X)=\frac{\mu_m S}{(k_m X^\gamma+S)},\ \gamma\in(0,\ 1)$$

其中：γ 是 Hassell-Varley 常数，不同的 γ 值描述不同类型捕食群体，如描述水生捕食者组成的固定数量的紧密群体，可取 $\gamma=\frac{1}{3}$. Monod 型功能反应函数和比率型功能反应函数可分别看作 $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 时 Hassell-Varley 型功能反应函数的特例. 文献[8] 研究了具有 Hassell-Varley 型功能反应函数的恒化器模型，对平衡点的全局稳定性做了详细分析，将 Monod 型和比率型恒化器模型的结论推广至更为一般的情况. 然而，现有文献中并没有涉及受随机噪声干扰的具有 Hassell-Varley 型功能反应函数的恒化器模型. 因此，有必要建立稀释率受噪声干扰的具有 Hassell-Varley 型功能反应函数的恒化器模型并研究其渐近性态，

---

① 收稿日期：2014－05－03

基金项目：国家自然科学基金项目(11071013)；陕西省教育厅科研计划项目(2013JK0577)；延安大学自然科学专项基金(YD2012－03)；国家级大学生创新创业训练计划项目(201410719006).

作者简介：董庆来(1981－)，男，山东泰安人，副教授，硕士，主要从事微分方程稳定性与生物数学研究.

模型如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t) = \left(D(S_0 - S(t)) - \dfrac{\mu_m S(t)X(t)}{\delta(k_m X^\gamma + S(t))}\right)\mathrm{d}t + \alpha(S_0 - S(t))\mathrm{d}B(t) \\ \mathrm{d}X(t) = X(t)\left(\dfrac{\mu_m S(t)}{k_m X^\gamma + S(t)} - D\right)\mathrm{d}t - \alpha X(t)\mathrm{d}B(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中:$S(t)$ 表示在 t 时刻培养皿中营养的浓度,$X(t)$ 表示微生物在 t 时刻的密度,S_0 为输入的初始营养浓度,D 表示稀释率,δ 表示营养吸收转化率,并且 S_0,δ 均为正常数. $B(t)$ 和 α^2 分别为定义在完备概率空间上的标准布朗运动和噪声的强度,并且环境噪声对系统的影响表现为对稀释率的影响上,即 $D \to D + \alpha\dot{B}(t)$.

对式(1)进行无量纲化,令

$$X = \delta S_0 x,\ S = S_0 y,\ t = \tau D^{-1},\ m = \mu_m D^{-1},\ a = k_m \delta^\gamma S_0^{\gamma-1},\ \alpha = bD$$

并将半饱和常数 m 推广至微生物浓度方程和营养浓度方程各异的 m_1 和 m_2,模型简化为

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)\left(\dfrac{m_1 y(t)}{ax^\gamma(t) + y(t)} - 1\right)\mathrm{d}t - bx(t)\mathrm{d}B(t), \\ \mathrm{d}y(t) = \left(1 - y(t) - \dfrac{m_2 x(t)y(t)}{ax^\gamma(t) + y(t)}\right)\mathrm{d}t + b(1 - y(t))\mathrm{d}B(t) \end{cases} \tag{2}$$

下面研究系统(2)的动力学性态以揭示微生物连续培养动力学行为受随机噪声的影响.

本文总假设$(\Omega, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$为完备的概率空间,其中$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数流且满足通常条件(即右连续,F_0 包含所有零测集),并记 $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2: x_i > 0, i = 1,2\}$.

1 正解的全局存在唯一性和随机最终有界性

对于系统(2)的正解的全局存在唯一性有如下定理.

定理 1 对于任意给定的初值$(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$,系统(2)存在唯一的解$(x(t), y(t))(t \geqslant 0)$,且该解以概率 1 位于 $\mathbb{R}_+^2$ 中,即对所有的 $t \geqslant 0$,$(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^2$ a. s.

证 因为系统(2)的系数满足局部 Lipschitz 连续条件,所以对于任意给定的初值$(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$,系统(2)存在唯一的局部解$(x(t), y(t))(t \in [0, \tau_e))$,其中 τ_e 为爆破时间. 下面我们证明 $\tau_e = \infty$. 由于系统(2)的解在$[0, \tau_e)$上是正的,则

$$\mathrm{d}x \leqslant (m_1 - 1)x\mathrm{d}t - bx\mathrm{d}B(t) \tag{3}$$

$$\mathrm{d}y \leqslant (1 - y)\mathrm{d}t + b(1 - y)\mathrm{d}B(t) \tag{4}$$

设 $\Psi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 分别为下述随机微分方程的解

$$\mathrm{d}\Psi = (m_1 - 1)\Psi\mathrm{d}t - b\Psi\mathrm{d}B(t),\ \Psi_0 = x_0 \tag{5}$$

$$\mathrm{d}\Phi = (1 - y)\mathrm{d}t + b(1 - y)\mathrm{d}B(t),\ \Phi_0 = y_0 \tag{6}$$

则由随机微分方程的比较定理[9]得

$$x(t) \leqslant \Psi(t),\ y(t) \leqslant \Phi(t),\ t \in [0, \tau_e),\ \text{a. s.}$$

类似地

$$\mathrm{d}x \geqslant -x\mathrm{d}t - bx\mathrm{d}B(t)$$

$$\mathrm{d}y \geqslant \left(1 - y - \frac{m_2}{a}\Psi\right)\mathrm{d}t + b(1 - y)\mathrm{d}B(t)$$

设 $\psi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为下述随机微分方程的解

$$\mathrm{d}\Psi = -\Psi\mathrm{d}t - b\Psi\mathrm{d}B(t),\ \Psi_0 = x_0 \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \left(1 - \varphi - \frac{m_2}{a}\Psi\right)\mathrm{d}t + b(1 - \varphi)\mathrm{d}B(t),\ \varphi_0 = S_0 \tag{8}$$

则

$$x(t) \geqslant \psi(t),\ y(t) \geqslant \varphi(t),\ t \in [0, \tau_e),\ \text{a. s.}$$

又由于方程(5)-(8)均为线性随机微分方程,由文献[9-10]知,方程(5)-(8)的解均是正的且为全局存在的,从而 $\tau_e = \infty$. 定理证毕.

下面讨论随机系统(2)的解的有界性. 首先给出相关定义[9-10].

定义 1　模型(2)的解 $X(t)=(x(t),y(t))$ 称为随机最终有界的，如果对任意 $\varepsilon\in(0,1)$，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对具有初值 $(x(0),y(0))\in\mathbb{R}_+^2$ 的解满足

$$\limsup_{t\to\infty}P\{|X(t)|>\delta\}<\varepsilon$$

对于系统(2)的解的有界性有如下定理：

定理 2　对于任意给定的初值 $(x(0),y(0))\in\mathbb{R}_+^2$，系统(2)的解 $(x(t),y(t))(t\geqslant 0)$ 是随机最终有界的.

证　定义 $V(t)=m_2x(t)+m_1y(t)$，利用 Itô 公式，得

$$\mathrm{d}V=(m_1-V)\mathrm{d}t+b(m_1-V)\mathrm{d}B(t)\tag{9}$$

对等式(9)两侧从 0 到 t 取积分，再取期望，得

$$EV(t)=V(0)+\int_0^t(m_1-V(s))\mathrm{d}s$$

从而，

$$\frac{\mathrm{d}EV(t)}{\mathrm{d}t}=m_1-EV(t)$$

因此，

$$\lim_{t\to\infty}EV(t)=m_1$$

由于

$$|(x,y)|^{\frac{1}{2}}\leqslant\max\left\{\frac{m_1}{m_1m_2},\frac{m_2}{m_1m_2}\right\}(m_2x+m_1y)=\max\left\{\frac{m_1}{m_1m_2},\frac{m_2}{m_1m_2}\right\}V(t)$$

因此，

$$\limsup_{t\to+\infty}E|(x,y)|^{\frac{1}{2}}\leqslant\max\left\{\frac{m_1}{m_1m_2},\frac{m_2}{m_1m_2}\right\}\limsup_{t\to+\infty}V(t)=m_1\max\left\{\frac{m_1}{m_1m_2},\frac{m_2}{m_1m_2}\right\}\triangleq K$$

对任意 $\varepsilon\in(0,1)$，令 $\delta=\dfrac{K^2}{\varepsilon^2}$，由 Chebyshev 不等式得

$$\limsup_{t\to\infty}P\{|(x,y)|>\delta\}<\varepsilon$$

从而，系统(2)的解 $(x(t),y(t))(t\geqslant 0)$ 是随机最终有界的. 定理证毕.

2　绝灭平衡点的全局随机渐近稳定性

当 $m_1\leqslant 1$ 时，系统(2)所对应的确定性系统有一个全局稳定的平衡点 $E_0=(0,1)$. 显然，E_0 仍是系统(2)的绝灭平衡点. 下面讨论系统(2)的绝灭平衡点的全局随机渐近稳定性.

定理 3　当 $m_1\leqslant 1$ 时，如果 $b^2\leqslant\dfrac{8m_1m_2+C}{4m_1m_2+C}$ 成立，则 E_0 是全局随机渐近稳定的，其中 C 为正常数.

证　定义 Lyapunov 函数

$$V(x,y)=(m_2x+m_1y-m_1)^2+Cxy$$

其中 C 为正常数. 显然，$V(x,y)$ 是正定函数. 由 Itô 公式，得

$$\mathrm{d}V=LV\mathrm{d}t+(Cb(1-2y)-2b(m_2x+m_1y-m_1)^2)\mathrm{d}B(t),$$

$$\begin{aligned}LV=&2(m_2x+m_1y-m_1)(m_2\mathrm{d}x+m_1\mathrm{d}y)+(m_2\mathrm{d}x+m_1\mathrm{d}y)^2+C(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\\&-(2-b^2)(m_2^2x^2+m_1^2(y-1)^2)-2(2-b^2)m_1m_2x(y-1)+\\&Cxy\left(\frac{m_1y}{ax^\gamma+y}-1\right)+C(1-b^2)x(1-y)-C\frac{m_2x^2y}{ax^\gamma+y}\leqslant\\&-(2-b^2)(m_2^2x^2+m_1^2(y-1)^2)+\left(2(b^2-2)+\frac{C(b^2-1)}{m_1m_2}\right)m_1m_2x(y-1)\leqslant\\&-\left(4-2b^2-\frac{C(b^2-1)}{2m_1m_2}\right)(m_2^2x^2+m_1^2(y-1)^2)\end{aligned}$$

当 $b^2\leqslant\dfrac{8m_1m_2+C}{4m_1m_2+C}$ 时，$LV\leqslant 0$，并且 $LV=0$ 的充要条件是 $x=0$，$y=1$，从而，LV 负定.

因此，随机系统(2)的绝灭平衡点是全局随机渐近稳定的.

3 随机系统的解围绕确定性系统的正平衡点的振荡行为

当 $m_1>1$ 时，系统(2)所对应的确定性系统的存在唯一全局渐近稳定的正平衡点 $E^+=\left(\frac{m_1(1-y_*)}{m_2}, y_*\right)$. 显然，$E^+$ 不是系统(2)的正平衡点. 下面讨论系统(2)的解在正平衡点 E^+ 附近的振荡行为.

定理4 当 $m_1>1$ 时，若 b 满足 $b^2<2$，则对于任意给定的初值 $(x(0), y(0))\in\mathbb{R}_+^2$，系统(2)的解满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t(m_2^2(x(u)-x_*)^2+m_1^2(y(u)-y_*)^2)\mathrm{d}u\leqslant b^2m_2x_*(ax_*^\gamma+y_*)$$

证 定义 Lyapunov 函数

$$V(S, x)=(m_2x+m_1y-m_1)^2+\Theta\left(x-x_*-x_*\ln\frac{x}{x_*}\right)$$

其中 $\Theta=2(2-b^2)b^2m_2x_*(ax_*^\gamma+y_*)$. 显然，当 $b^2<2$ 时，$V(x, y)$ 是正定函数. 由 Itô 公式，得

$$\mathrm{d}V=LV\mathrm{d}t+(-2b(m_2x+m_1y-m_1)^2-\Theta b(x-x_*))\mathrm{d}B(t) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}LV=&-(2-b^2)(m_2x+m_1y-m_1)^2+\Theta\left(\frac{m_1y}{ax^\gamma+1}-1\right)(x-x_*)+\frac{\Theta b^2x_*}{2}=\\&-(2-b^2)(m_2^2(x-x_*)^2+m_1{}^2(y-y_*)^2)-2(2-b^2)m_1m_2(x-x_*)(y-y_*)+\\&\Theta\left(\frac{m_1y}{ax^\gamma+1}-1\right)(x-x_*)+\frac{\Theta b^2x_*}{2}\end{aligned}$$

由于

$$\Theta\left(\frac{m_1y}{ax^\gamma+1}-1\right)(x-x_*)\leqslant\frac{\Theta m_1}{ax_*^\gamma+y_*}(x-x_*)(y-y_*)$$

注意到 $\Theta=2(2-b^2)b^2m_2x_*(ax_*^\gamma+y_*)$，所以

$$LV\leqslant-(2-b^2)(m_2^2(x-x_*)^2+m_1^2(y-y_*)^2)+(2-b^2)b^2m_2x_*(ax_*^\gamma+y_*) \tag{11}$$

对式(10)两边从0到 t 积分，再取期望得：

$$E\int_0^t\mathrm{d}V=E\int_0^tLV\mathrm{d}t$$

因此，由(11)式得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t(m_2^2(x(u)-x_*)^2+m_1^2(y(u)-y_*)^2)\mathrm{d}u\leqslant 2b^2m_2x_*(ax_*^\gamma+y_*)$$

定理证毕.

定理4讨论了外界环境干扰强度较小时，微生物种群的渐近性态. 下面将讨论外界环境干扰强度比较大的时候，微生物种群的渐近性态.

定理5 对于任意给定的初值 $(x(0), y(0))\in\mathbb{R}_+^2$，系统(2)的解 $(x(t), y(t))(t\geqslant 0)$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x(t)}{t}\leqslant m_1-1-\frac{1}{2}b^2$$

证 利用推广的 Itô 公式，我们有

$$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2x^2}(\mathrm{d}x)^2\leqslant\left(m_1-1-\frac{1}{2}b^2\right)\mathrm{d}t-b\mathrm{d}B(t)$$

从而

$$\ln x(t)\leqslant\ln x(0)+\left(m_1-1-\frac{1}{2}b^2\right)t-b\mathrm{d}B(t)$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x(t)}{t}\leqslant m_1-1-\frac{1}{2}b^2$$

定理证毕.

定理的结论说明当噪声强度较大时，虽然确定性系统的正平衡点是全局渐近稳定的，但随机系统是终将灭绝的.

4　讨　　论

本文基于恒化器模型的研究现状，考虑到微生物与营养之间的关系以及稀释率所受的噪声干扰，建立了具有 Hassell-Varley 型功能反应函数的随机恒化器模型. 研究表明噪声对随机系统(2) 正解的全局存在唯一性并无影响(定理 1). 随机系统(2) 的绝灭平衡点在噪声强度不大时是全局随机渐近稳定的(定理 2). 虽然随机系统(2) 不存在正平衡点，但是随机系统(2) 的解在噪声强度不大时围绕所对应的确定性系统的正平衡点做随机振荡，且振幅是有限的(定理 4)；当噪声强度较大时，虽然确定性系统的正平衡点是全局渐近稳定的，但是随机系统确是终将灭绝的(定理 5). 本文的结论推广了文献[7]的相关结果，将 $\gamma=0$ 和 1 的情形推广至更为一般的 $\gamma\in[0,1]$.

参考文献：

[1] 陈兰荪，陈　键. 非线性生物动力系统 [M]. 北京：科学出版社，1993.

[2] SMITH H L，WALTMAN P. Theory of the Chemostat [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1995.

[3] WILLIAMS F M. Dynamics of Microbial Populations，Systems Analysis and Simulation in Ecology [M]. New York：Academic Press，1971.

[4] IMHOF L，WALCHER S. Exclusion and Persistence in Deterministic and Stochastic Chemostat Models [J]. J Differ Equ，2005，217(1)：26－53.

[5] 李　姣，孟琳琳，原三领. 具有多个参数扰动的随机恒化器模型研究 [J]. 上海理工大学学报：自然科学版，2013，35(6)：523－530.

[6] CHEN Z，ZHANG T. Dynamics of a Stochastic Model for Continuous Flow Bioreactor with Contois Growth Rate [J]. J Math Chem，2013，51(3)：1076－1091.

[7] 董庆来. 具有比率型功能反应函数的随机恒化器系统的渐近性态 [J]. 山东大学学报：理学版，2014，49(3)：68－72.

[8] DONG Q，SUN M，MA W. Qualitative Analysis of the Chemostat Model with Hassell-Varley Type Functional Response [C]// Proc of the 6th Conf of Biomath. London：World Academic Press，2008：687－690.

[9] MAO X. Stochastic Different Equations and Application [M]. Chichester：Horwood Publishing，1997.

[10] 王　克. 随机生物数学模型 [M]. 北京：科学出版社，2010.

On Qualitative Analysis of a Stochastic Chemostat Model with Hassell-Varley Functional Response

DONG Qing-lai[1]，　BAO Xiao-ping[2]，　DANG Xiao-yi[1]

1. School of Mathematics and Computer Science，Yanan University，Yanan Shanxi 716000，China；

2. Nanshe Junior High School of Fuping County，Weinan Shanxi 711700，China

Abstract：A stochastic Chemostat model with Hassell-Varley functional response has been considered，in which the dilution rate was influenced by white noises. By comparison theorem of stochastic equations and It? formula，it is shown that there is a unique positive solution to the system. Moreover，the sufficient conditions for some population dynamical properties including the stochastic ultimate boundedness and the stochastically asymptotic stability of the washout equilibrium have been obtained. Furthermore，it is also shown how the solution spirals around the positive equilibrium of deterministic system.

Key words：Hassell-Varley functional response；chemostat；Itô formula；stochastic ultimate boundedness；stability

责任编辑　张　枸