第 40 卷　第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2015 年 1 月
Vol. 40　No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan.　2015

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2015.01.004

求解热传导方程的一个高精度格式①

詹涌强

华南理工大学广州学院 计算机工程学院，广州 510800

摘要：用待定系数法构造了求解热传导方程的一个高精度隐式格式. 格式的截断误差达到 $O(\tau^3+h^6)$. 证明了当 $\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{185}}{40}\leqslant r<\frac{1}{2}$ 时，差分格式是稳定的. 通过数值试验，比较了差分格式的解和精确解的区别，说明了差分格式的有效性.

关 键 词：热传导方程；隐式差分格式；截断误差

中图分类号：**O241.82**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2015)1-0018-05

在渗流、扩散等领域中经常会遇到求解热传导方程的问题. 在一维的情形，其模型为初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\leqslant x\leqslant L,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ a>0\\ u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant L\\ u(0,t)=u(L,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\end{cases}\tag{1}$$

对问题(1)的求解，有限差分法是解决此类问题的常用方法. 常见的差分格式[1-2]诸如古典隐格式、Crank-Nicolson 格式和 Dufort-Frankel 格式等，虽都是绝对稳定的，但它们的截断误差较低. 前两者分别是 $O(\tau+h^2)$，$O(\tau^2+h^2)$；后者为 $O\left(\tau^2+h^2+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right)$，当 $\tau=h$ 时还失去了相容性. 文献[3-9]对上述问题进行了改进. 在这些研究成果中，有一些高精度的差分格式，如文献[7]给出了一族高精度恒稳格式，格式的截断误差达 $O(\tau^2+h^6)$. 文献[8]也构造了一个截断误差达 $O(\tau^4+h^4)$ 的高精度隐格式，稳定性条件为 $0<r\leqslant 0.5$. 而文献[9]则构造了一族六点隐式差分格式，格式的截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$. 本文对文献[9]作了进一步的改进，增加了 3 个结点，构造了一个高精度的三层九点隐式格式，格式的截断误差达到了 $O(\tau^3+h^6)$，稳定性条件为 $\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{185}}{40}\leqslant r<0.5$.

1　格式的构造

当问题(1)的解充分光滑时，有关系式

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial t^n}=a^n\frac{\partial^{m+2n}u}{\partial x^{m+2n}}\qquad m,n\in N\tag{2}$$

设时间步长为 τ，空间步长为 h，网格区域由点集 (x_j,t_n) $(j=0,1,2,\cdots,M;\ n=0,1,\cdots)$ 所组成，其中 $x_j=jh$，$t_n=n\tau$，$h=\frac{L}{M}$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$.

---

① 收稿日期：2014-05-16

基金项目：国家自然科学基金项目(61070165)；广东省部产学研结合基金项目(2011B090400458).

作者简介：詹涌强(1978-)，男，广东潮州人，讲师，硕士，主要从事偏微分方程数值解法研究.

用如下含参数的差分方程逼近微分方程(1)

$$\frac{c_1}{3}(\Delta_t u_{j+1}^n + \Delta_t u_j^n + \Delta_t u_{j-1}^n) + \frac{c_2}{3}(\Delta_t u_{j+1}^{n-1} + \Delta_t u_j^{n-1} + \Delta_t u_{j-1}^{n-1}) = ac_3\delta_x^2 u_j^{n+1} + ac_4\delta_x^2 u_j^n \tag{3}$$

其中：$r = \frac{a\tau}{h^2}$；$\Delta_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}$，$\delta_x^2 u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$，其余类推；$c_i(i = 1,\cdots,4)$ 为待定系数.

将(3)式中各节点上 u 的值在节点$(jh, n\tau)$处作 Taylor 展开，并利用关系式(2)整理可得

$$(c_1 + c_2)a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)a^2\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{3}(c_1 + c_2)ah^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{6}(c_1 + c_2)a^3\tau^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} +$$

$$\frac{1}{6}(c_1 - c_2)a^2h^2\tau\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1}{36}(c_1 + c_2)ah^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} =$$

$$(c_3 + c_4)a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12}(c_3 + c_4)ah^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_3a^2\tau\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360}(c_3 + c_4)ah^4\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} +$$

$$\frac{1}{2}c_3a^3\tau^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1}{12}c_3a^2h^2\tau\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\tau^3 + h^6)$$

为使格式(3)的截断误差达到 $O(\tau^3 + h^6)$，须满足下面方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_3 + c_4 = 1 \\ \frac{1}{2}(c_1 - c_2)a^2\tau + \frac{1}{3}ah^2 = \frac{1}{12}ah^2 + c_3a^2\tau \\ \frac{1}{6}a^3\tau^2 + \frac{1}{6}(c_1 - c_2)a^2h^2\tau + \frac{1}{36}ah^4 = \frac{1}{360}ah^4 + \frac{1}{2}c_3a^3\tau^2 + \frac{1}{12}c_3a^2h^2\tau \end{cases} \tag{4}$$

在方程组(4)中，令 $r = \frac{a\tau}{h^2}$，可解得

$$c_1 = \frac{100r^2 - 60r + 1}{60r(2r - 1)},\ c_2 = \frac{20r^2 - 1}{60r(2r - 1)},\ c_3 = \frac{20r^2 - 7}{30r(2r - 1)},\ c_4 = \frac{40r^2 - 30r + 7}{30r(2r - 1)}$$

将所得各值代入(3)式，可得截断误差为 $O(\tau^3 + h^6)$ 的一个隐式格式

$$\begin{aligned}&(-120r^3 + 100r^2 - 18r + 1)(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (240r^3 + 100r^2 - 144r + 1)u_j^{n+1} = \\ &(240r^3 - 100r^2 - 18r + 2)(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (-480r^3 + 440r^2 - 144r + 2)u_j^n + \\ &(20r^2 - 1)(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + (20r^2 - 1)u_j^{n-1}\end{aligned} \tag{5}$$

2　稳定性和收敛性

利用 Fourier 分析法，可算出格式(5)的传播矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

其中：

$$g_{11} = \frac{240r^2 - 180r + 6 - (960r^3 - 400r^2 - 72r + 8)s}{300r^2 - 180r + 3 + (480r^3 - 400r^2 + 72r - 4)s},$$

$$g_{12} = \frac{60r^2 - 3 - (80r^2 - 4)s}{300r^2 - 180r + 3 + (480r^3 - 400r^2 + 72r - 4)s},\ g_{21} = 1,\ g_{22} = 0,\ s = \sin^2\frac{kh}{2} \in [0, 1]$$

传播矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - g_{11}\lambda - g_{12} = 0 \tag{6}$$

引理 1[10]　特征方程(6)的根满足 $|\lambda_{1,2}| \leqslant 1$ 的充要条件是

$$|g_{11}| \leqslant 1 - g_{12} \leqslant 2 \tag{7}$$

引理 2[10]　差分格式(5)稳定，即矩阵族 $\boldsymbol{G}^n(s)(s \in [0, 1], n = 1,2,\cdots)$ 一致有界的充要条件是：

1) $|\lambda_{1,2}| \leqslant 1$($\lambda_{1,2}$ 是方程(6)的两个根)；

2) 使 $1 - \frac{g_{11}^2}{4} = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 成立的 s 或不存在，或不属于区间[0, 1].

首先考虑条件2)，当 $g_{12} \neq -1$ 时，使 $1-\frac{g_{11}^2}{4}=g_{11}^2+4g_{12}=0$ 的 s 不存在．再由条件(1)和式(7)知，格式(5)稳定的条件为 $-1+g_{12} \leqslant g_{11} \leqslant 1-g_{12} < 2$.

由 $g_{11} \leqslant 1-g_{12}$ 得

$$\frac{300r^2-180r+3-(960r^3-320r^2-72r+4)s}{300r^2-180r+3+(480r^3-400r^2+72r-4)s} \leqslant 1 \tag{8}$$

为确定起见，不妨假定

$$300r^2-180r+3+(480r^3-400r^2+72r-4)s<0$$

该式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases}100r^2-60r+1<0 & (9)\\ 480r^3-100r^2-108r-1<0 & (10)\end{cases}$$

当(9),(10)两式成立时，可得到(8)式对任意 $0<r \leqslant \frac{1}{2}$ 均成立，进一步得(8),(9),(10)三式同时成立的充分条件是

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{10}<r \leqslant \frac{1}{2} \tag{11}$$

又由 $1-g_{12}<2$ 可得

$$360r^2-180r+(480r^3-480r^2+72r)s<0$$

该式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases}360r^2-180r<0 & (12)\\ 480r^3-120r^2-108r<0 & (13)\end{cases}$$

由(12)式解得

$$r<\frac{1}{2} \tag{14}$$

可验证当 r 满足(14)式时，(13)式亦成立.

再由 $-1+g_{12} \leqslant g_{11}$ 得

$$480r^2-360r+12+(-480r^3+80r^2+144r-16)s \leqslant 0$$

该式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases}40r^2-30r+1 \leqslant 0 & (15)\\ -120r^3+140r^2-54r-1 \leqslant 0 & (16)\end{cases}$$

由(15)式解得

$$\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{185}}{40} \leqslant r \leqslant \frac{3}{8}+\frac{\sqrt{185}}{40} \tag{17}$$

而(16)式对任意 $r>0$ 均成立．故使(11),(14),(17)式同时成立的一个条件是

$$\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{185}}{40} \leqslant r<\frac{1}{2}$$

综上所述，并根据Lax的稳定性与收敛性等价定理可得：

定理1 当 $\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{185}}{40} \leqslant r<\frac{1}{2}$，差分格式(5)稳定且收敛.

3 数值例子

考虑热传导方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ t>0\\ u(x,0)=\sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin 1,\ t \geqslant 0\end{cases} \tag{18}$$

利用格式(5)求数值解，并与精确解进行比较.

取 $h=\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{30}$，$r=0.01,0.1,0.2,0.4$ 计算. 为方便起见，用式(18)的精确解 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin x$ 计算第一层的值 u_j^1. 按格式(5)计算到 $n=1\ 000$ 时与式(18)的精确解 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin x$ 进行比较，结果见表 1－3.

表 1　$h=\frac{1}{10}$ 格式(5)数值解与精确解的比较

r	项目	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.8$
0.01	精确解	0.090 333 010 952	0.267 397 740 772	0.433 802 166 491	0.649 090 633 101
	差分解	溢　出			
0.1	精确解	0.036 726 661 526	0.108 715 808 481	0.176 370 799 225	0.263 900 557 841
	差分解	0.036 726 661 526	0.108 715 808 482	0.176 370 799 226	0.263 900 557 842
0.2	精确解	0.013 510 983 718	0.039 994 310 870	0.064 883 191 057	0.097 083 589 743
	差分解	0.013 510 983 718	0.039 994 310 871	0.064 883 191 058	0.097 083 589 743
0.4	精确解	0.001 828 512 808	0.005 412 641 389	0.008 780 985 039	0.013 138 835 115
	差分解	0.001 828 512 809	0.005 412 641 392	0.008 780 985 043	0.013 138 835 118

表 2　$h=\frac{1}{20}$ 格式(5)数值解与精确解的比较

r	项目	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.8$
0.01	精确解	0.097 368 520 807 3	0.288 223 786 761 4	0.467 588 479 880 2	0.699 644 505 908 2
	差分解	溢　出			
0.1	精确解	0.077 750 343 061 2	0.230 151 368 361 2	0.373 376 984 889 3	0.558 677 485 333 5
	差分解	0.077 750 343 061 2	0.230 151 368 361 3	0.373 376 984 889 4	0.558 677 485 333 6
0.2	精确解	0.060 552 028 060 1	0.179 242 065 904 7	0.290 786 288 212 6	0.435 098 463 062 1
	差分解	0.060 552 028 060 1	0.179 242 065 904 7	0.290 786 288 212 7	0.435 098 463 062 2
0.4	精确解	0.036 726 661 526 2	0.108 715 808 481 4	0.176 370 799 225 0	0.263 900 557 841 0
	差分解	0.036 726 661 526 6	0.108 715 808 482 4	0.176 370 799 226 4	0.263 900 557 842 0

表 3　$h=\frac{1}{30}$ 格式(5)数值解与精确解的比较

r	项目	$x=0.1$	$x=0.3$	$x=0.5$	$x=0.8$
0.01	精确解	0.098 730 296 257 42	0.292 254 823 421 95	0.474 128 073 040 07	0.709 429 585 357 44
	差分解	溢　出			
0.1	精确解	0.089 334 866 347 49	0.264 443 099 833 64	0.429 008 821 427 94	0.641 918 434 293 15
	差分解	0.089 334 866 347 49	0.264 443 099 833 68	0.429 008 821 427 95	0.641 918 434 293 16
0.2	精确解	0.079 940 350 770 09	0.236 634 082 791 43	0.383 893 960 673 92	0.574 413 853 193 43
	差分解	0.079 940 350 770 09	0.236 634 082 791 43	0.383 893 960 673 92	0.574 413 853 193 43
0.4	精确解	0.064 011 228 863 90	0.189 481 760 896 01	0.307 398 253 065 48	0.459 954 657 005 55
	差分解	0.064 011 228 863 94	0.189 481 760 896 13	0.307 398 253 065 64	0.459 954 657 005 66

由表 1－3 可看出，当 $r=0.01$ 时，差分格式(5)的解是不稳定的，而当 $r=0.1,0.2$ 和 0.4 时，格式(5)的解与精确解有很好的吻合，且 h 越小格式(5)的精度越高，这与理论分析完全一致.

参考文献：

[1]　陆金甫，关　治. 偏微分方程数值解法 [M]. 北京：清华大学出版社，2010：82－85.

[2]　戴嘉尊，邱建贤. 微分方程数值解法 [M]. 南京：东南大学出版社，2008.

[3]　MA Ming-shu，WANG Xiao-feng. An Explicit Difference Scheme with High Accuracy and Branching Stability for Sol-

ving Parabolic Partial Differential Equation [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2000, 15(4): 99－103.
[4] WA Jia-ling, SUN Zhi-zhong. A Finite Difference Method for the Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition [J]. 高等学校计算数学学报, 2008, 30(4): 289－308.
[5] 徐金平, 单双荣. 解抛物型方程的一个高精度显示差分格式 [J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(4): 473－475.
[6] 马明书, 解抛物型方程的一个高精度两层显格式 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 1996, 24(1): 80－81.
[7] 曾文平, 抛物型方程的一族双参数高精度恒稳格式 [J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2002, 23(4): 327－331.
[8] MA Ming-shu, WANG Xiao-feng. A-High-Order Accuracy Implicit Difference Scheme for Solving the Equation of Parabolic Type [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2000, 15(2): 94－97.
[9] 詹涌强. 解抛物型方程的一族六点隐式差分格式 [J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2012, 36(4): 26－29.
[10] 马驷良. 二阶矩阵族 $G^n(k,\Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用 [J]. 高等学校计算数学学报, 1980, 2(2): 41－54.

A High Accuracy Difference Scheme for Solving Heat-Conducting Equations

ZHAN Yong-qiang

School of Computer Engineering, Guangzhou College of South China University of Technology, Guangzhou 510800, China

Abstract: This paper presents an implicit difference scheme with high accuracy for solving heat-conducting equation by means of undetermined parameters. The truncation error of the scheme is $O(\tau^3+h^6)$. The difference scheme is proved to be stable if $\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{185}}{40}\leqslant r<\frac{1}{2}$. The numerical experiment shows the numerical solutions of difference scheme and the precise solutions are matched and the difference scheme is effective.

Key words: heat-conducting equation; implicit difference schemes; truncation error

责任编辑 张 枸